Concours de la formation doctorale 12.12.12

Epreuve d'équations différentielles ordinaires

Ex1 : Résoudre 1) $y'' - 2y' + y = e^{x}$

2) $\left(\dfrac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + x\dfrac{d^3y}{dx^3} - \dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$

3) $\dfrac{dy}{dx} - \cos(x)\, y = \cos(x).\, y^2$

Ex2 Eliminer la première dérivée par la substitution de la variable indépendante $t = \varphi(x)$ dans l'équation

$xy'' - y' - 4x^3y = 0$ et la résoudre.

Ex3 Soit le système
$$\frac{dx}{dt} = x + y + 2e^{-t}$$
$$\frac{dy}{dt} = 4x + y + 4e^{-t}$$

Sachant que $\begin{pmatrix} 0 \\ -2e^{-t} \end{pmatrix}$ est une solution particulière de ce système donner la solution générale de ce système.

Ex4 : Etudier l'existence et l'unicité de la solution du problème $\dfrac{dy}{dx} = 3xy^{\frac{1}{3}}$, $y(0) = 0$ dans le domaine

$D = \{(x,y) \mid -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2},\ -1 \leq y \leq 1\}$.

Ex5 Résoudre et tracer les orbites du système

$\dfrac{dx}{dt} = 2xy, \quad \dfrac{dy}{dt} = y^2 - x^2.$

U.S.T.H.B **Faculté des Mathématiques.**

Département d'analyse, Laboratoire AMNEDP.

Concours d'entrée en doctorat : Analyse E.D.P. (02 décembre 2012)

Deuxième épreuve. Durée : deux heures

==================================

Soient a et b $(a < b)$ deux réels fixés. On rappelle que l'espace $L^2(]a,b[)$ des (classes) de fonctions réelles définies sur $]a,b[$ et de carré sommable pour la mesure de Lebesgue est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(f,g) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx.$$

L'espace de Sobolev $H^1(]a,b[)$ est défini par

$$H^1(]a,b[) = \left\{ u \in L^2(]a,b[) ; u' \in L^2(]a,b[) \right\}$$

et est muni de la norme définie par

$$\|u\|^2_{H^1(]a,b[)} = \|u\|^2_{L^2(]a,b[)} + \|u'\|^2_{L^2(]a,b[)}$$

(où u' désigne la dérivée distribution de u).

On note $H_0^1(]a,b[)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(]a,b[)$ (l'ensemble des fonctions réelles sur $]a,b[$, indéfiniment dérivables et à support compact) dans $H^1(]a,b[)$.

1) On considère l'espace vectoriel

$$\mathbb{V} = \left\{ v \in H_0^1(]a,b[); v''' \in L^2(]a,b[) \right\}$$

et on le munit de la norme canonique définie par

$$\|v\|^2_{\mathbb{V}} = \|v\|^2_{H_0^1(]a,b[)} + \|v'''\|^2_{L^2(]a,b[)}$$

Démontrer que $\mathbb{V}$ est un espace de Hilbert (montrer juste la complétude).

2) Soit S une distribution sur $]a,b[$ à dérivée S' appartenant à $L^2(]a,b[)$. Pour tout x dans $]a,b[$ on pose

$$v(x) = \int_a^x S'(x)\, dx.$$

Exercice 3 (10pts)

Quelques notations:

- $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est la classe des fonctions C^∞ à décroissance rapide sur $\mathbb{R}$.
- $\widehat{\psi}$ est la transformée de Fourier de ψ, supp= support.
- $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est l'espace des distributions sur $\mathbb{R}$.

Soit $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que supp $\widehat{\psi} \subset [\frac{1}{4}\,, 3]$. On pose $\psi_j(x) = 2^j\,\psi(2^j x)$, $j \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$.

Soit f une fonction donnée. On pose $T_f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi_j * f$.

(1) On suppose que $\left(\int_{\mathbb{R}} |T_f(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} < +\infty$. Démontrer que $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(2) Démontrer que la somme $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}_j(\xi)$ est formée d'un nombre fini de termes non nuls, à trouver ce nombre.

(3) Calculer $\widehat{\psi}_j$.

(4) Déduire: $\exists c > 0$ telle que $\|T_f\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq c\,\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$.

(5) Déduire que

$$\left|\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\xi^m}\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}_j(\xi)\Big)\right| \leq c\,|\xi|^{-m}.$$

USTHB, Faculté de Mathématiques Le 25 novembre 2012

Concours d'accès à la Formation Doctorale
"Recherche Opérationnelle et Mathématiques Discrètes"

Epreuve de Recherche Opérationnelle (Durée : 2h) Sujet n° 2

Question 1. Des camions arrivent dans une station service pour passer des tests de sécurité, suivant un processus de Poisson de taux de 6/ jour. La durée des tests pour chaque camion est une v.a. exponentielle de moyenne de 1h 30mn. On suppose que le processus d'arrivée ne s'interrompt pas et que la station travaille jour et nuit. La longueur moyenne de la file d'attente $\overline{Q}$ en régime permanant est

$$(A)\quad \overline{Q} = \frac{7}{40}.$$
$$(B)\quad \overline{Q} = \frac{9}{40}.$$
$$(C)\quad \overline{Q} = \frac{11}{40}.$$
$$(D)\quad \overline{Q} = \frac{13}{40}.$$
$$(E)\quad \overline{Q} = \frac{17}{40}.$$

Question 2. Soit $\overline{Q}$ la longueur moyenne de la file d'attente dans un système $M/M/2$ en régime stationnaire et $\overline{N}$ le nombre moyen d'individus dans le système.

$$(A)\quad \overline{Q} = \overline{N} - 2,$$
$$(B)\quad \overline{Q} = \overline{N} - 2 + 2p_0 + p_1,$$
$$(C)\quad \overline{Q} = \overline{N} - 2 + p_0 + p_1,$$
$$(D)\quad \overline{Q} = \overline{N} - 1,$$
$$(E)\quad \overline{Q} = \overline{N} - 1 + 2p_0 + 2p_1,$$

où p_k est la probabilité qu'il y aik k individus dans le système.

Question 3. Dans un cabinet médical, l'arrivée des patients peut être décrite par un processus poissonien de moyenne 5 patients par heure. La durée de traitement suit une loi exponentielle de moyenne 10 minutes. Si l'on admet de plus que la salle d'attente ne contient qu'une seule place, la probabilité p qu'une personne qui arrive puisse être traitée est

5 patient / H
E (10 min)
1 place

$$(A)\quad p = \frac{6}{11}.$$
$$(B)\quad p = \frac{36}{67}.$$
$$(C)\quad p = \frac{18}{43}.$$
$$\times\ (D)\quad p = \frac{1}{6}$$
$$(E)\quad p = \frac{1}{5}.$$

I U

USTHB, Faculté de Mathématiques | Le 25 novembre 2012

Concours d'accès à la Formation Doctorale
"Recherche Opérationnelle et Mathématiques Discrètes"

Epreuve de Mathématiques Discrètes (Durée : 2h) | Sujet n° 2

Question 1. Un graphe planaire de Berge est

(A) parfait.

(B) faiblement parfait.

(C) imparfait critique.

(D) quatre coloriable.

Question 2. Pour la classe des graphes quasi localement sans patte,

(A) il existe un algorithme polynomial de reconnaissance.

(B) la reconnaissance est un problème NP-complet.

(C) le problème du nombre chromatique est un problème ouvert.

(D) il existe un algorithme polynomial de calcul du nombre chromatique.

Question 3. Lors d'une contraction de deux sommets non-adjacents,

(A) le nombre chromatique du nouveau graphe augmente.

(B) le nombre chromatique du nouveau graphe diminue.

(C) le nombre chromatique du nouveau graphe ne change pas.

(D) l'opération extension de la coloration du graphe contracté au graphe initial se fait en temps polynomial.

Question 4. Considérons le problème de l'analyse de la transmission de signaux où les sommets sont des signaux et les arêtes relient deux signaux pouvant être distingués aisément l'un de l'autre. Chercher le plus grand ensemble de signaux clairement distinguables revient à chercher

(A) un stable maximum.

(B) une clique maximum.

(C) une coloration optimale.

(D) un transversal minimum.

Question 5. Un trou est

(A) localement scindé.

(B) localement triangulé.

(C) localement parfait.

(D) faiblement parfait.

Question 17. On veut réaliser une coloration propre des sommets d'un graphe complet K_n avec m couleurs. Le nombre de manières de réaliser cette coloration est :

(A) $\frac{m!}{n!}$.
(B) $\frac{n!}{m!(n-m)!}$.
(C) $\frac{m!}{(m-n)!}$.
(D) $\frac{n!}{m!}$.

Question 18. Soit C_n le treillis des faces du n-cube.

(A) Tout intervalle de C_n est isomorphe à un treillis booléen.
(B) Tout intervalle de C_n est isomorphe à un treillis des faces du n-cube.
(C) Le $i^{\text{ème}}$ niveau de C_n possède $2^{n-i}\binom{n}{i}$ éléments.
(D) Le $i^{\text{ème}}$ niveau de C_n possède $2^{i}\binom{n}{i}$ éléments.

Question 19. L'algorithme de "parenthésage" de Greene et Kleitman appliqué au treillis Booléen B_6 montre que la chaîne symétrique qui passe par le sommet $\{1,3,5\}$ est :

(A) $\{3,5\} \subset \{1,3,5\} \subset \{1,3,5,6\}$.
(B) $\{1,3\} \subset \{1,3,5\} \subset \{1,3,5,6\}$.
(C) $\{1,5\} \subset \{1,3,5\} \subset \{1,3,5,6\}$.
(D) $\{3\} \subset \{3,5\} \subset \{1,3,5\} \subset \{1,3,5,6\} \subset \{1,3,4,5,6\}$.

Question 20. Soit P un poset.

(A) P régulier $\Longrightarrow$ P normal.
(B) P normal $\Longrightarrow$ P régulier.
(C) P normal $\Longleftrightarrow$ P régulier.
(D) Il n'existe aucune relation entre la normalité et la régularité des posets.

Question 6.

(A) Tout graphe admet un ensemble dominant double.

(B) Le nombre de domination couplée est au moins égal à 2 fois le nombre de domination.

(C) Pour tout arbre d'ordre $n \geq 2$, les nombres de domination et de domination double sont distincts.

(D) Dans tout arbre T de degré maximum $\triangle(T)$, le nombre de domination double est égal à la somme entre le nombre de domination et $\triangle(T)$.

Question 7. Le graphe $G = (V, E)$ avec $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}$ et $E = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_6v_7, v_7v_8, v_8v_9, v_9v_{10}, v_3v_{11}, v_8v_{11}, \}$ vérifie :

(A) $\gamma(G) = 5$ et $\Gamma(G) = 6$.

(B) $ir(G) = 5$ et $\Gamma(G) = 5$.

(C) $ir(G) = 4$ et $\gamma(G) = 5$.

(D) $\gamma(G) = 4$ et $\Gamma(G) = 5$.

où $ir(G)$, $\gamma(G)$ et $\Gamma(G)$ sont respectivement le nombre d'irrédondance, de domination et de domination supérieure de G.

Question 8. Soient x et y deux réels, a, b, c des entiers relatifs tels que $0 \leq a < c$ et $b + c > 0$, et soit $(T_n)_n$ la suite de terme général :

$$T_{n+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-a)/(b+c) \rfloor} \binom{n-bk}{a+ck} x^{?????} y^{a+ck} \quad (n \geq 0).$$

Nous savons que la suite $(T_n)_n$ satisfait la relation de récurrence suivante :

$$T_n - x\binom{c}{1}T_{n-1} + x^2\binom{c}{2}T_{n-2} + \cdots + (-1)^c x^c \binom{c}{c} T_{n-c} = y^c T_{n-c-b}.$$

(A) $????? = a + ck$.

(B) $????? = n - bk$.

(C) $????? = n - bk + a + ck$.

(D) $????? = n - a - (b+c)\,k$.

Question 9. Soient $\{F_n\}_{n \geq 0}$ la *suite de Fibonacci et* $\{L_n\}_{n \geq 0}$ la *suite de Lucas.*

(A) $F_{n+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k}, \quad (n \geq 0)$.

(B) $L_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k}, \quad (n \geq 0)$.

(C) $F_{n+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k}, \quad (n \geq 1)$.

(D) $L_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k}, \quad (n \geq 1)$.

Question 16. La solution de l'équation de récurrence d'ordre 1 $y_n = \frac{1}{2}y_{n-1} + 10$ avec $u_0 = 1$ est

(A) $-15/2^n + 24$.
(B) $-16/2^n + 23$.
(C) $-17/2^n + 22$.
(D) $-18/2^n + 21$.
(E) $-19/2^n + 20$.

+1

Question 17. Pendant les années 70, la logistique consistait à gérer

(A) les flux physiques.
(B) les flux d'information.
(C) les flux financiers.

+1

Question 18. Les sous traitants concernés par la chaîne logistique globale sont

(A) le fournisseur initial.
(B) le client ultime.
(C) le fournisseur direct.
(D) le client direct.

-1

Question 19. Les fonctions principales de la chaîne logistique globales sont

(A) l'approvisionnement.
(B) le stockage.
(C) la distribution.
(D) le conditionnement.
(E) la planification.
(F) le chargement/déchargement.
(G) la manutention.
(H) la production.

-1

Question 20. La gestion en aval dans la chaîne logistique globale consiste à gérer

(A) le processus Approvisionnement.
(B) le processus de distribution.
(C) le processus de production.
(D) le processus de stockage M.P.
(E) le processus de stockage P.F.

-1

Question 13. On veut utiliser le chiffre de Hill. Indiquer, parmi les matrices suivantes celle(s) qui peut(peuvent) faire l'affaire

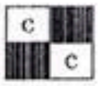
(A) $\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 2 & a \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ a & 4 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & a \end{pmatrix}$

Question 14. Indiquer parmi les permutations suivantes celle(s) qui correspond(ent) à la grille tournante ci-dessous (c : indique les cellules du masque).



(A) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Question 15. Le texte chiffré "NGEJKHHTGFGEGUCT" est obtenu à partir du chiffre de César. Une des lettres suivantes indique la valeur du décalage. Préciser-la puis déchiffrer le message.

(A) H.

(B) T.

(C) G.

(D) E.

Déchiffrement : ....

Question 16. Le nombre d'entiers à trois chiffres, avec au moins un chiffre pair, et formés des chiffres 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9 est :

(A) 118.

(B) 218.

(C) 2012.

(D) 2018.

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene

Faculté de Mathématiques
Département d'Algèbre et Théorie des Nombres

Concours d'entrée au Doctorat ACC
Année 2014/2015

EPREUVE N°2

Exercice 1. Soit $\mathcal{A} = \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ l'ensemble des fonctions arithmétiques (c'est à dire l'ensemble des applications de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}$). On rappelle que $\mathcal{A}$ muni de l'addition $+$ et du produit de Dirichlet $*$ définis par

$$\forall (f,g) \in \mathcal{A}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ (f+g)(n) = f(n)+g(n) \quad \text{et} \quad (f*g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$$

est un anneau commutatif unitaire.

(1) Présicer l'élément neutre δ de la multiplication de $\mathcal{A}$.

(2) Montrer que le groupe des unités de $\mathcal{A}$ est

$$U(\mathcal{A}) = \{f \in \mathcal{A} \ / \ f(1) \neq 0\}.$$

(3) On dit qu'une fonction arithmétique $f \in \mathcal{A}$ est multiplicative si on a $f(1) \neq 0$ et si

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*,\ \ (n,m) = 1 \Longrightarrow f(mn) = f(m)f(n).$$

On désigne par $\mathcal{M}$ l'ensemble des fonctions arithmétiques multiplicatives. Montrer que $\mathcal{M}$ est un sous-groupe de $U(\mathcal{A})$.

(4) On désigne par $\mathbf{1}$ et j les fonctions arithmétiques définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ \mathbf{1}(n) = 1 \ \text{ et } \ j(n) = n.$$

(a) Montrer que $\mathbf{1}$ et j appartiennent à $\mathcal{M}$.

(b) On désigne par μ et φ la fonction de Möbius et la fonction indicatrice d'Euler définies respectivement par

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ (-1)^k & \text{si } n \text{ est le produit de } k \text{ nombres premiers distincts,} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$\varphi(n) = card\,\{k \in \mathbb{N}^* / \ 1 \leq k \leq n \text{ et } (k,n) = 1\}.$$

Prouver que μ est l'inverse pour le produit de Dirichlet de la fonction arithmétique $\mathbf{1}$ et que $\mathbf{1}^*\varphi = j$.

f

USTHB

Faculté de Mathématiques

Concours pour le doctorat Systèmes dynamiques

Epreuve Analyse, Topologie

Utiliser une double feuille par exercice séparément

Exercice 1 : Analyse sur 5 points

Résoudre les équations différentielles : $y'' + 2y' + 2y = 0,\ y'' + 4y' + 4y = 2e^{-x}cosx$.

Soit f la solution commune des deux équations différentielles. On définit la série de terme général $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x)dx$. Montrer que $\sum_n u_n$ converge et calculer sa somme.

Exercice 2 : Topologie sur 5 points

Soit dans R^2 les ensembles
$A=\{ (x, y), x\text{-}2 \leq y \leq x^2\}$, $B = \{(x, y), x^2 < y$ ou $y < x\text{-}2\}$,

$C = \{(x, y), 0 \leq x \leq 1, x\text{-}2 \leq y \leq x^2\}$.

a) *Faites un dessin.*
b) *Quelles sont les parties fermées, connexes par arcs, compactes, complètes ? Expliquez vos réponses.*

USTHB

Faculté de Mathématiques

Concours pour le doctorat Systèmes dynamiques

Epreuve EDO, Courbes et surfaces

Utiliser une double feuille par exercice séparément

Exercice 1 : EDO sur 5 points

Considérons le système différentiel réel suivant

$$\begin{cases} x' = -ax + ay \\ y' = bx - y - xz \\ z' = -cz + xy \end{cases} \qquad (1)$$

où $c > 0, a > c + 1$ et $b > 0$, appelé système différentiel de Lorenz.

1- Vérifier que dans le cas $b < 1$ le seul point d'équilibre du système différentiel (1) est la solution nulle.
2- Déterminer les points d'équilibre de ce système différentiel dans le cas $b > 1$.
3- Etudier la stabilité de la solution nulle.

Exercice 2 : courbes sur 5 points

Soit dans R^3 la courbe qui a pour équations :

$x = \cos t$
$y = \sin t$
$z = bt$

où b est une constante.

a) Faites un dessin.
b) Déterminer le trièdre de Frenet-Serret (T,N B).
c) Démontrer que la courbure et la torsion sont constantes en tout point.

Une courbe de courbure et de torsion constantes est appelée hélice circulaire droite.

Exercice 3.

On pose,

$$f(t) = \frac{\log t}{t^2 - 1}, \quad I = \int_0^1 f(t)dt, \quad I_n = \int_0^1 t^n f(t)dt \ ,$$

$$J_n = \int_0^1 t^n \log t dt \quad et \quad S_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{(2k+1)^2}, \ (n \in \mathbb{N}) \quad .$$

1) Montrer que I est convergente.
2) Vérifier que J_n est convergente, puis calculer J_n , $(n \in \mathbb{N})$.
3) Prouver qu'il existe une constante M (> 0), tel que:

$$| t^2 f(t) | < M \quad \forall t \in]0, 1[.$$

4) Etablir la relation: $I = S_n + I_{n+2}$, $(n \in \mathbb{N})$.
5) Montrer que, $I = \lim_{n \to \infty} S_n$.

Exercice4.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1 + nx^2)}.$$

1) Etudier la convergence simple et uniforme de la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ sur $[0, +\infty[$.

2) On note S la fonction somme de la série

$$S(x) = \sum_{n \geq 1} f_n(x) .$$

i) Montrer que S est de classe C^1 sur tout intervalle $[a, b] \subset]0, +\infty[$, puis sur $]0, +\infty[$ et donner l'expression de sa dérivée.

ii) Montrer que

$$\lim_{x \to +\infty} S(x) = 0.$$

USTHB Faculté de Mathématiques

Analyse II (E.D., Courbes et Surfaces).

Exercice 1 :

Soit l'équation différentielle $x'' + x = 0$.

a) Intégrer cette équation.

b) Donner le Champ de Vecteurs associé dans le plan de phases.

c) Trouver une intégrale première.

d) Montrer que toutes les trajectoires sont fermées.

e) Donner explicitement l'équation de la trajectoire (C) du point $A(-1,0)$ qui passe par le point $B(0,1)$.

f) Calculer le temps mis pour aller du point A au point B.

g) En déduire la période de la trajectoire (C).

h) Soit l'équation différentielle $x'' + x = x^2$.
Donner le champ de vecteurs associé et calculer ses points singuliers.

i) Définissez la nature de chaque point singulier et une intégrale première.

j) En déduire l'allure des trajectoires.

Exercice 2 :

Soit l'ensemble C de $\mathbb{R}^3$ des points (x, y, t) vérifiant $x^2 + y^2 = 1$.

a) Définissez cet ensemble et dessinez- le.

b) Montrer que la trajectoire du champ $(x\prime = ty, y\prime = -tx, t\prime = t^2)$ qui passe par le point $(1, 0, 0)$ est entièrement contenue dans l'ensemble C.

c) Donner son allure en expliquant.

Exercice 3.

1) Soient a et b dans $\mathbb{R}^*$. En effectuant dans $\mathbb{R}^2$, le changement de variables, $u = bx + ay$ et $v = bx - ay$, trouver les fonctions $f(x, y)$ vérifiant :

$$a\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + b\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 \quad .$$

On précisera le domaine de définition de f .

2) Trouver toutes les fonctions g et h, définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,de classe C^2; de sorte que la fonction f définie de $\mathbb{R}_+^*$ x $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, par $f(x, y) = g(\frac{y}{x}) + h(x)$, soit solution de l'équation:

$$x\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} + y\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \frac{y}{x^2} \quad .$$

USTHB/ Fac.Math. (2013/2014)

Analyse I

Exercice 1.

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Montrer que, $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1$ si $(x,y) \neq (0,0)$. En déduire que f est dérivable à l'origine. Et donner sa différentielle.
2) Etudier la continuité sur $\mathbb{R}^2$ de f , $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.
3) Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ prouver que, f admet des dérivées partielles d'ordre 2.
4) Calculer les dérivées partielles mixtes d'ordre 2 de f en $(0,0)$.
5) Que peut-on conclure?

Exercice 2.

On définit de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, l'application $N(x,y) = \max(|x|, |2x+y|)$

1) Montrer que N définit une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2) Décrire la boule ouverte, $B(a,r)$, centrée en a dans $\mathbb{R}^2$ et de rayon r (>0).
3) Trouver deux constantes réelles strictement positives a et b, tel que:

$$a \| (x,y) \|_1 \leq N(x,y) \leq b \| (x,y) \|_1$$

4) Decrire l'interieur et l'adhérence de l'ensemble A:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \mid 2x - y \mid < 1\}$$

5) L'ensemble A est-il compact? Est-il connexe?

USTHB
Faculté de Mathématiques

Concours Cycle D « Maths Fondamentales et Cryptographie »2014-15 13/10/2014

Complexité (Durée : 2H 00)

[1]

Exercice 1 :

1) Classer dans l'ordre croissant : $4^n; n+n!\ ; (1+\frac{1}{n})^n; n^{2n};\ (n!)^2; n^3$. Justifier
2) Evaluer les sommes $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(i+2)(i+3)}$; $\sum_{i=0}^{n} i^2 3^i$; $1 + C_n^4 + C_n^8 + \cdots$.
3) Trouver une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ telles que $n^\alpha = O(f(n))$ et $f(n) = O(\beta^n)$ pour tous $\alpha > 0$ et $\beta > 1$. Conclure.
4) Montrer que : $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2,\ \frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!} \in \mathbb{N}$

Exercice 2 :

1) Donner la signification algorithmique puis résoudre t(n)=7t(n/2)+2n^2 et t(1)=1.
2)i) Résoudre : t(n+3)-4t(n+2)+t(n+1)+6t(n)=0 et t(0)=1, t(1)=0, t(2)=6
ii) Résoudre par les séries génératrices t(n)=2t(n-1)+3t(n-2), t(0)=0 et t(1)=1
3) Soit $(u_n)_n$ la suite définie par : $u_0 = u_1 = 1,\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + 4u_n$
i) Ecrire un algorithme récursif calculant u_n. Evaluer sa complexité
ii) Ecrire un algorithme itératif calculant u_n. Evaluer sa complexité.
4) Evaluer la complexité de :
Fonction f(n,m :entier) :entier ; {0¡=m¡=n}
Début si (m=n) ou (m=0) alors f :=1 sinon f :=f(n,m-1)+f(n-1,m-1) ; fin.

Exercice 3 :

Le tri par fusion est un algorithme récursif qui permet de ranger un tableau de taille n dans l'ordre croissant avec une complexité en O(nlog$_2$n) .
1) Décrire un algorithme en O(log$_2$n) qui détermine si une valeur val se trouve ou pas dans un tableau de taille n supposé trié.
2) On considère un ensemble S à n¿=2 entiers stockés dans un tableau V.
a) Décrire un algorithme de complexité O(n) pour trouver deux éléments x et y de S tels que $|x-y| \geq |u-v|$ pour tous u,v de S.
b) Décrire un algorithme de complexité O(nlog$_2$n) pour trouver deux éléments x et y de S tels que $x \neq y$ et $|x-y| \leq |u-v|$ pour tous u,v de S, $u \neq v$
c) Soit m un entier ; décrire un algorithme de complexité O(nlog$_2$n) pour déterminer s'il existe deux éléments x et y de S tels que $x + y = m$.

Exercice 4 :

1) Evaluer la complexité binaire du produit de entiers.
2) Décrire le problème de satisfiabilité SAT
3) Donner la définition d'un problème NP.

---

[1]N.B : Il sera attaché une grande importance à la rigueur et à la présentation

USTHB
Faculté de Mathématiques

Concours Cycle D « Maths Fondamentales et Cryptographie »2014-15 13/10/2014

GÉOMÉTRIE (Durée : 2H 00)

[1]

Exercice 1 :

Montrer que les variétés différentiables de dimension 6 : $S_2 \times S_4$ et $\mathbb{C}P^3$, ne sont pas difféomorphes.

Exercice 2 :

Soit M une variété différentiable de dimension 2n. Une 2-forme différentielle ω sur M est dite non dégénérée si

$$\omega^n := \underbrace{\omega \wedge \ldots \wedge \omega} \in \omega^{2n} M$$

est non nulle en chaque point de M. Une 2-forme différentielle ω sur M est dite symplectique si elle est non dégénérée et fermée.

On suppose que M est compacte et admet une Une 2-forme non dégénérée ω.

1) Montrer que M est orientable.

2) Montrer que :

$$\int_M \omega^n \neq 0$$

quelle que soit l'orientation choisie sur M pour définir l'intégrale.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que ω est une 2-forme symplectique sur M.

3) Montrer que : $H^2k(M) \neq 0$, $\forall k \in \{0, 1, \cdots, n\}$.

4) Pour quels entiers $n \geq 1$ existe t-il une 2-forme symplectique sur la sphère S^n ? Justifier.

Exercice 3 :

Soit a un nombre réel positif

1) Quelle est l'image de la bande $\{x \,/\, 0 \leq x \leq a\}$ par l'application exponentielle $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$?

2) Déterminer le groupe fondamental de la couronne $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

3) Déterminer le revêtement universel de A. Quel est son groupe d'automorphismes ? Décrire tous les revêtements connexes de A

Exercice 4 :

On considère la projection naturelle $\mathbb{C}^2 - \{0\} \longrightarrow P^1(\mathbb{C})$ et sa restriction p à la sphère unité

$$p : S^3 \longrightarrow P^1(\mathbb{C})$$

Verifier que toutes les fibres de p sont des cercles mais que S^3 n'est pas homéomorphe au produit $P^1(\mathbb{C}) \times S^1$

[1]**N.B : Il sera attaché une grande importance à la rigueur et à la présentation**

USTHB
Faculté de Mathématiques

Concours Cycle D « Maths Fondamentales et Cryptographie »2014-15 13/10/2014

Codage (Durée : 2H 00)[1]

Exercice 1 *Les affirmations suivantes sont elles vraies ? justifiez vos réponses.*

1. *Tout code linéaire est un code cyclique.*
2. *Un anneau à chaine est un anneau de Galois.*
3. *Tout anneau principal est un anneau à chaine.*
4. *La caractéristique d'un anneau de Galois est toujours première.*
5. *Un anneau de Galois n'admet pas d'éléments nilpotents.*
6. *Tout code libre est auto dual ?*

Exercice 2 *Soit n un entier ≥ 1. Alice utilise le cryptosystème RSA afin de se faire envoyer des messages codés par des éléments de $\mathbb{Z}_n$. Soit (n, e) sa clé publique.*

1. *Soient p et q deux nombres premiers distincts congrus à 2 modulo 3. Posons*
$$n = pq \quad \text{et } e = \frac{2(p-1)(q-1)+1}{3} \quad (e \text{ est un entier}).$$
Montrer que e est premier avec $\varphi(n)$ et calculer son inverse modulo $\varphi(n)$.
2. *Alice choisit comme clé publique le couple $(n, e) = (187, 107)$. Elle reçoit le cryptogramme 9. Quel est le message envoyé ?*

Exercice 3 *Les matrices suivantes peuvent elles être des matrices génératrices de codes sur $\mathbb{Z}_4$*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 6 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans l'affirmative

1. *Quel est le type et la longueur du code.*
2. *Est-il auto-dual ? Préciser la matrice de contrôle.*
3. *Est-il un code libre ?*

Exercice 4 *Déterminer tous les anneaux de Galois d'ordre 64, préciser leurs caractéristiques, corps résiduels et groupes multiplicatifs.*

[1] **N.B : Il sera attaché une grande importance à la rigueur et à la présentation**

USTHB
Faculté de Mathématiques

Concours Cycle D « Maths Fondamentales et Cryptographie »2014-15 13/10/2014

Algèbre (Durée : 2H 00)[1]

Exercice 1 :

1) Soient H et K deux sous groupes distingués et résolubles d'un groupe G. Montrer que $H.K$ est distingué et résoluble.
2) Soient H et K deux sous groupes distingués d'un groupe G tels que $\frac{G}{H}$ et $\frac{G}{K}$ soient résolubles. Montrer que $\frac{G}{H \cap K}$ est résoluble.
3) Déterminer à isomorphisme près les groupes d'ordre 15, 35.
4) Déterminer une suite de Jordan-Hölder pour les groupes finis suivants :
a) $\frac{\mathbb{Z}}{18\mathbb{Z}}$, b) $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$, c) S_3, S_4, S_5

Exercice 2 :

Soit A un anneau.

1) Montrer par un contre exemple que l'ensemble des éléments nilpotents de A ne forme pas un sous-groupe abélien de A (on pourra choisir $A = M_2(\mathbb{C})$).
2) Soit $N = \{a \in A \ / \ ax \text{ est nilpotent}, \ \forall x \in A\}$. Montrer que N est un idéal bilatère de A et que tout élément de N est nilpotent.
3) Soit I un idéal bilatère de A dont tout élément est nilpotent. Montrer que $I \subset N$.

Exercice 3 :

Soit K un corps. On pose $A = \frac{K[X,Y]}{(X^2, XY, Y^2)}$

1) Déterminer les éléments inversibles de A.
2) Déterminer tous les idéaux principaux de A.
3) Déterminer tous les idéaux de A.

Exercice 4 :

Soient L et M deux A-modules, $f : L \longrightarrow M$ un homomorphisme d'anneaux.

1) On suppose que $\mathcal{K}er(f)$ et $\mathcal{I}m(f)$ sont de type fini. Montrer que L est de type fini.
2) On suppose que $\mathcal{K}er(f) \simeq A^p$ et $\mathcal{I}m(f) \simeq A^q$. Montrer que $L \simeq A^{p+q}$.

[1] N.B : Il sera attaché une grande importance à la rigueur et à la présentation

Faculté de Mathématiques.
USTHB.
Laboratoire AMNEDP.

Spécialité EDP.
Concours d'accès au Doctorat LMD.
Epreuve 1 (durée 2 h).

02 Décembre 2012.

Exercice 1 (8 points)

Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles.
Pour $f \in E$, on pose :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$$

1) Montrer que l'on définit ainsi une norme sur E. On munit E de cette norme.
On considère l'application Φ définie sur E par :

$$\Phi(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$$

2) Montrer que $\Phi(f)$ est dans E.
3) Montrer que Φ est linéaire continue et $\|\Phi\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1$, où

$$\|\Phi\|_{\mathcal{L}(E)} = \sup_{f \in E,\, f \neq 0} \frac{\|\Phi(f)\|_1}{\|f\|_1} = \sup_{f \in E,\, \|f\|_1 \leq 1} \|\Phi(f)\|_1 = \sup_{f \in E,\, \|f\|_1 = 1} \|\Phi(f)\|_1.$$

4) Pour $n \geq 0$, on considère f_n, l'élément de E défini par :

$$f_n(x) = ne^{-nx}, \ x \in [0,1].$$

Calculer $\|f_n\|_1$ et $\|\Phi(f_n)\|_1$. En déduire $\|\Phi\|_{\mathcal{L}(E)}$.

Exercice 2 (12 points)

Soit H, l'espace des fonctions numériques continues sur $[0,+\infty[$, telles que $\int_0^\infty |f(t)|^2\,dt < +\infty$.

1) Montrer que l'application définie de $H \times H$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$$(f,g) \mapsto (f,g) = \int_0^\infty f(t)g(t)dt,$$

est un produit scalaire.

2) En utilisant la suite de fonctions

$$f_n(t) = \begin{cases} 1, & si \quad 0 < t < 1 - \frac{1}{n} \\ -nt + n, & si \quad 1 - \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \\ 0, & si \quad t \geq 1. \end{cases}$$

montrer que H muni de la norme $\|f\| = (\int_0^\infty |f(t)|^2\,dt)^{1/2}$

n'est pas complet (on dit dans ce cas que H est un espace préhilbertien!)

3) A chaque f de H, on associe la fonction F définie par :

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt, \quad x > 0$$

Montrer que l'on définit ainsi une injection linéaire T de H dans l'espace des fonctions continûment dérivables sur $]0, +\infty[$.

4) Montrer à l'aide d'une intégration par parties et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que pour $f \in H$ et $0 < \alpha < \beta < \infty$, on a :

$$\int_\alpha^\beta (F(x))^2dx \leq 2\left[\int_\alpha^\beta (F(x))^2dx \cdot \int_\alpha^\beta (f(x))^2dx\right]^{1/2} + \alpha F^2(\alpha)$$

En déduire que T opère de H dans H et qu'il est continu pour la norme définie en question 2.

Bon courage.

U.S.T.H.B Faculté des Mathématiques.
Département d'analyse, Laboratoire AMNEDP.
Concours d'entrée en doctorat : Analyse E.D.P. (02 décembre 2012)
Deuxième épreuve. Durée : deux heures

Soient a et b ($a < b$) deux réels fixés. On rappelle que l'espace $L^2(]a,b[)$ des (classes) de fonctions réelles définies sur $]a,b[$ et de carré sommable pour la mesure de Lebesgue est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(f,g) = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx.$$

L'espace de Sobolev $H^1(]a,b[)$ est défini par

$$H^1(]a,b[) = \left\{u \in L^2(]a,b[) \,;\, u' \in L^2(]a,b[)\right\}$$

et est muni de la norme définie par

$$\|u\|^2_{H^1(]a,b[)} = \|u\|^2_{L^2(]a,b[)} + \|u'\|^2_{L^2(]a,b[)}$$

(où u' désigne la dérivée distribution de u).

On note $H^1_0(]a,b[)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(]a,b[)$ (l'ensemble des fonctions réelles sur $]a,b[$, indéfiniment dérivables et à support compact) dans $H^1(]a,b[)$.

1) On considère l'espace vectoriel

$$\mathrm{V} = \left\{v \in H^1_0(]a,b[) ; v''' \in L^2(]a,b[)\right\}$$

et on le munit de la norme canonique définie par

$$\|v\|^2_{\mathrm{V}} = \|v\|^2_{H^1_0(]a,b[)} + \|v'''\|^2_{L^2(]a,b[)}$$

Démontrer que V est un espace de Hilbert (montrer juste la complétude).

2) Soit S une distribution sur $]a,b[$ à dérivée S' appartenant à $L^2(]a,b[)$. Pour tout x dans $]a,b[$ on pose

$$v(x) = \int_a^x S'(t)\,dt.$$

a) Calculer la dérivée de la distribution v et en déduire que S est dans $L^2(]a,b[)$.
b) Montrer que si u est dans V alors u'' est dans $L^2(]a,b[)$.
3) Soient g donnée dans $H_0^1(]a,b[)$ et η un réel fixé. Pour v dans V, on pose

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_a^b \left(|v'(x)|^2 + |v'''(x)|^2\right) dx - \int_a^b g'(x)\, v'(x)\, dx - \eta v''(b).$$

a) Justifier l'existence de $v''(b)$.
b) Démontrer que la fonction J est différentiable sur V et calculer $dJ(u)v$ (la valeur en v de la différentielle de J en u).
c) Montrer que si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{D}(]a,b[)$ convergeant vers 0 alors la suite $(dJ(u)\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
d) Expliciter la distribution T définie par

$$\langle T, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(]a,b[)\times\mathcal{D}(]a,b[)} = dJ(u)\varphi.$$

4) On pose

$$a(u,v) = \int_a^b \left(u'(x)\, v'(x) + u'''(x)\, v'''(x)\right) dx$$

$$l(v) = \int_a^b g'(x)\, v'(x)\, dx + \eta v''(b)$$

a) Vérifier que la forme bilinéaire a est continue et coercive sur V et que la forme linéaire l est continue sur V.
b) Démontrer que le problème (P) suivant admet une solution unique :

$$(P)\begin{cases} u \in V, \forall v \in V \\ a(u,v) = l(v) \end{cases}$$

c) Montrer que si $u \in V$ est solution de (P) alors

$$J(u) \leq J(v), \forall v \in V$$

5) Démontrer qu'à tout élément $\varphi \in \mathcal{D}(]a,b[)$ on peut associer un unique élément $v \in V$ vérifiant l'équation :

$$-v'' = \varphi$$

et en déduire que la solution u du problème $(\mathcal{P})$ vérifie:

$$u^{(4)} + u = g \text{ dans } \mathcal{D}'(]a,b[)$$

6) **Justifier l'existence de** $u^{(3)}(a)$ et $u^{(3)}(b)$.

7) Démontrer que la solution u du problème $(\mathcal{P})$ vérifie les conditions aux limites:

$$\begin{cases} u^{(3)}(a) = 0, \\ u^{(3)}(b) = \eta. \end{cases}$$

U.S.T.H.B **Faculté des Mathématiques.**

Département d'analyse, Laboratoire AMNEDP.

Concours d'entrée en doctorat : Analyse E.D.P. (02 décembre 2012)

Deuxième épreuve. Durée : deux heures

================================

Soient a et b $(a < b)$ deux réels fixés. On rappelle que l'espace $L^2(]a,b[)$ des (classes) de fonctions réelles définies sur $]a,b[$ et de carré sommable pour la mesure de Lebesgue est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(f,g) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx.$$

L'espace de Sobolev $H^1(]a,b[)$ est défini par

$$H^1(]a,b[) = \left\{ u \in L^2(]a,b[) \,;\, u' \in L^2(]a,b[) \right\}$$

et est muni de la norme définie par

$$\|u\|^2_{H^1(]a,b[)} = \|u\|^2_{L^2(]a,b[)} + \|u'\|^2_{L^2(]a,b[)}$$

(où u' désigne la dérivée distribution de u).

On note $H_0^1(]a,b[)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(]a,b[)$ (l'ensemble des fonctions réelles sur $]a,b[$, indéfiniment dérivables et à support compact) dans $H^1(]a,b[)$.

1) On considère l'espace vectoriel

$$\mathbb{V} = \left\{ v \in H_0^1(]a,b[) ; v''' \in L^2(]a,b[) \right\}$$

et on le munit de la norme canonique définie par

$$\|v\|^2_{\mathbb{V}} = \|v\|^2_{H_0^1(]a,b[)} + \|v'''\|^2_{L^2(]a,b[)}$$

Démontrer que $\mathbb{V}$ est un espace de Hilbert (montrer juste la complétude).

2) Soit S une distribution sur $]a,b[$ à dérivée S' appartenant à $L^2(]a,b[)$. Pour tout x dans $]a,b[$ on pose

$$v(x) = \int_a^x S'(x)\, dx.$$

et en déduire que la solution u du problème $(\mathcal{P})$ vérifie:

$$u^{(4)} + u = g \text{ dans } \mathcal{D}'(]a, b[)$$

6) Justifier l'existence de $u^{(3)}(a)$ et $u^{(3)}(b)$.

7) Démontrer que la solution u du problème $(\mathcal{P})$ vérifie les conditions aux limites:

$$\begin{cases} u^{(3)}(a) = 0, \\ u^{(3)}(b) = \eta. \end{cases}$$

Exercice 1 (8 points) .
Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles.
Pour $f \in E$, on pose :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$$

1) Montrer que l'on définit ainsi une norme sur E. On munit E de cette norme.
On considère l'application Φ définie sur E par :

$$\Phi(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$$

2) Montrer que $\Phi(f)$ est dans E.
3) Montrer que Φ est linéaire continue et $\|\Phi\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1$, où

$$\|\Phi\|_{\mathcal{L}(E)} = \sup_{f\in E,\, f\neq 0} \frac{\|\Phi(f)\|_1}{\|f\|_1} = \sup_{f\in E,\, \|f\|_1\leq 1} \|\Phi(f)\|_1 = \sup_{f\in E,\, \|f\|_1=1} \|\Phi(f)\|_1 .$$

4) Pour $n \geq 0$, on considère f_n, l'élément de E défini par :

$$f_n(x) = ne^{-nx}\ ,\ x \in [0,1].$$

Calculer $\|f_n\|_1$ et $\|\Phi(f_n)\|_1$. En déduire $\|\Phi\|_{\mathcal{L}(E)}$.

Exercice 2 (12 points) .
Soit H, l'espace des fonctions numériques continues sur $]0,+\infty[$, telles que $\int_0^\infty |f(t)|^2\,dt < +\infty$.
1) Montrer que l'application définie de $H \times H$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$$(f,g) \mapsto \langle f,g\rangle = \int_0^\infty f(t)g(t)dt,$$

est un produit scalaire.
2) En utilisant la suite de fonctions

$$f_n(t) = \begin{cases} 1, & si \quad 0 < t < 1-\frac{1}{n} \\ -nt+n, & si \quad 1-\frac{1}{n} \leq t \leq 1 \\ 0, & si \quad t \geq 1. \end{cases}$$

montrer que H muni de la norme $\|f\| = (\int_0^\infty |f(t)|^2\,dt)^{1/2}$

n'est pas complet (on dit dans ce cas que H est un espace préhilbertien !)

3) A chaque f de H, on associe la fonction F définie par :

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt, \quad x > 0$$

Montrer que l'on définit ainsi une injection linéaire T de H dans l'espace des fonctions continûment dérivables sur $]0, +\infty[$.

4) Montrer à l'aide d'une intégration par parties et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que pour $f \in H$ et $0 < \alpha < \beta < \infty$, on a :

$$\int_\alpha^\beta (F(x))^2dx \leq 2\left[\int_\alpha^\beta (F(x))^2dx \cdot \int_\alpha^\beta (f(x))^2dx\right]^{1/2} + \alpha F^2(\alpha)$$

α *En déduire que T opère de H dans H et qu'il est continu pour la norme définie en question 2.*

Bon courage.

USTHB **Faculté de Mathématiques**

Concours d'entrée à l'école doctorale *EDP et Applications.*

23 octobre 2013

Première épreuve

Durée : deux heures

Exercice 1 : Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des matrices carrées d'ordre n. Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$.

1) Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} N: & E & \to & \mathbb{R}_+ \\ & M & \to & N(M) = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Mx\|}{\|x\|} \end{array}$$

définit une norme sur E.

2) Montrer que $N(M_1 M_2) \leq N(M_1) N(M_2)$.

3) Montrer que l'application Φ

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & E & \to & E \\ & M & \to & M^3 \end{array}$$

est différentiable et donner la forme précise de la différentielle de Φ en un point M.

Exercice 2 : Etant donnée une fonction f continue et périodique de période 2π, on appelle coefficients de Fourier de f, les nombres

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx; \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Etant donnée une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, on dit que la série : $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n$ est convergente si les séries $\sum_{n\geq 0} \alpha_n$ et $\sum_{n\geq 1} \alpha_{-n}$ le sont, et on pose alors

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n = \sum_{n\geq 0} \alpha_n + \sum_{n\geq 1} \alpha_{-n}.$$

1) Dire pour quelles valeurs du couple $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-|n|t} e^{inx}$ est convergente.

2) On suppose maintenant $t > 0$ et on définit sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ la fonction P par

$$P(t, x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-|n|t} e^{inx}$$

a) Vérifier que $P(t, x)$ est réelle et calculer $\int_{-\pi}^{\pi} P(t, x)\, dx$.

b) Vérifier que la fonction P est indéfiniment dérivable.

c) Calculer :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}.$$

3) Calculer les coefficients de Fourier de la fonction P.

Exercice 3 :

A) Soit f dans l'espace de Lebesgue $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

1) Soit $E = \{x \in \mathbb{R};\ |\sin x| = 1\}$. Evaluer la mesure de Lebesgue de E.

2) Calculer

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) (\sin x)^n \, dx.$$

B) Soit $\alpha \geq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose :

$$f_{n,\alpha}(x) = \frac{e^{-\alpha|x|}}{n} I_{[0,n^2]}(x)$$

où $I_{[0,n^2]}$ est la fonction indicatrice de l'intervalle $[0, n^2]$.

1) Montrer que la suite $(f_{n,\alpha})_{n \geq 1}$ tend vers 0 uniformément sur $\mathbb{R}$ lorsque $n \to +\infty$.

2) Etudier la limite suivante :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_{n,\alpha}(x) \, dx$$

pour $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$. Que peut-on en conclure?

USTHB, Faculté de Mathématiques

Le 20 octobre 2013

Concours d'accès à la Formation Doctorale
"Recherche Opérationnelle et Mathématiques Discrètes, ROMaD"

Epreuve de Mathématiques Discrètes (Durée : 2h)

PARTIE I :
(Répondre sur une seule double feuille)

Exercice 1.

Soit $G = (V, E)$ un Graphe connexe non orienté. On note par :

$\chi(G)$ le nombre chromatique de G,

$\omega(G)$ la cardinalité d'une clique maximum de G,

$\alpha(G)$ la cardinalité du plus grand stable de G.

1. Montrer que $\chi(G) \geq \omega(G)$,

2. Montrer que $\chi(G) \times \alpha(G) \geq |V(G)|$,

3. Montrer que si G est planaire alors $\chi(G) \leq 5$,

4. Montrer que si G est planaire et parfait alors $\chi(G) \leq 4$.

5. Si G est supposé planaire non nécessairement parfait, a-t-on $\chi(G) \leq 4$?

(justifier votre réponse),

6. Proposer un algorithme polynomial de la 5-coloration de G si G est planaire.

Exercice 2.

1. Un graphe $G = (V, E)$ est dit multiparti-complet si V admet une partition en p stables $S_1, S_2, \ldots, S_p$, telle que pour $i = 1, 2, \ldots, p$, tout sommet de S_i est adjacent à tout sommet de S_j, pour tout $j \neq i$. Est-il possible de vérifier en temps polynomial qu'un graphe connexe non-orienté G est multiparti complet ?

(Justifier votre réponse en présentant un algorithme de reconnaissance dans le cas d'une réponse positive sinon, argumenter par des exemples).

2. Etant donné un graphe connexe non-orienté G, est-il possible de vérifier en temps polynomial que G est biparti ? (Justifier votre réponse en présentant un algorithme de reconnaissance dans le cas d'une réponse positive sinon, argumenter par des exemples).

3. Le problème du nombre chromatique respectivement du nombre de stabilité d'un graphe parfait est polynomial ?, NP-Complet ? (Justifier votre réponse en donnant l'auteur ou les auteurs du résultat ainsi que le principe de la méthode, dans le cas d'une réponse positive, sinon, argumenter par des exemples).

U. S. T. H. B
Faculté des Mathématiques
Département de Recherche Opérationnelle

Année universitaire 2013/2014

Concours d'accès au Doctorat LMD
en Recherche Opérationnelle et Management
Epreuve : Analyse multicritère de données et de décision
durée 2h.

Observation : *- La réponse de chaque exercice doit être rédigé sur une feuille séparée;*
- Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en considération.

8 points

Exercice 1 :

Soit le programme linéaire multiobjectif suivant :

$$(P)\begin{cases} Min\ Z(x) = \left(Z_i(x) = c^i x\right) i = 1..r \\ \quad x \in S = \{x \in \mathcal{R}^n / \ Ax \leq b, x \geq 0\} \end{cases}$$

où $c^i\ i = 1..r$ est un $1\times n$-vecteur réel, A est une $m \times n$-matrice réelle et b est un $m \times 1$-vecteur réel.

1- Ecrire le programme mathématique *(Q)* correspondant à *(P)* dans l'espace des critères
2- On note S(x) l'ensemble dominant en un point $x \in$S.
Montrer que x est une solution efficace pour *(P)* si et seulement si S(x)∩ S={x}.
3- Montrer que si l'ensemble des solutions réalisables S de *(P)* est un polyèdre convexe alors, l'ensemble des solutions réalisables du programme *(Q)* est aussi un polyèdre convexe, dont les sommets correspondent aux images des sommets de S.
4- Montrer que si x et y sont deux sommets de S efficaces pour *(P)* alors, tout point du segment reliant x et y dans S est aussi solution efficace pour *(P)*.

6 points

Exercice2. *Un patron peut ou non inspecter son employé à un cout h. L'employé peut travailler ou paresser. La désutilité du travail pour l'employé est g, la valeur du travail est v pour le patron. Si le patron inspecte et que l'employé paresse, il est dspensé de le payer, sinon il lui paye w.*
On suppose $0 < h < g < w$.

1. *Décrire cette situation par un jeux $2 * 2$.*
2. *Montrer qu'il n'existe qu'un équilibre mixte. Commenter ce fait et calculer l'équilibre. Comment varie cet équilibre lorsque h augmente ? Lorsque g augmente ?*

USTHB, Faculté de Mathématiques

Le 20 octobre 2013

Concours d'accès à la Formation Doctorale
"Recherche Opérationnelle et Mathématiques Discrètes, ROMaD"

Epreuve de Recherche Opérationnelle (Durée : 2h)

PARTIE I :
(Répondre sur une seule double feuille)

Exercice 1. Définir les problèmes d'ordonnancement suivants et donner leurs complexité :

a/ $P2||C_{max}$.

b/ $P||\overline{C}$.

c/ $1|r_i|C_{max}$.

d/ $1||L_{max}$.

e/ $1||T_{max}$.

f/ $1||\sum u_i$.

g/ $F2||C_{max}$.

h/ $F3||C_{max}$.

i/ $F2|nowait|C_{max}$.

j/ $O2||C_{max}$.

Exercice 2. Considérons l'instance à quatre tâches ci-dessous.

T_i	T_1	T_2	T_3	T_4
p_{i1}	8	5	6	7
p_{i2}	2	4	1	3
p_{i3}	4	5	3	2

12
14

a/ Déterminer un ordonnancement optimal pour le problème $F3||C_{max}$.

b/ Déterminer un ordonnancement pour le problème $R3||C_{max}$.

En déduire que pour tout entier k, on a
$$\left(\frac{p-k}{p}\right) = \left(\frac{k}{p}\right).$$

(3) Prouver que l'on a
$$\sum_{k=1}^{p-1} k\left(\frac{k}{p}\right) = 0.$$

Indication : On pourra remarquer que pour toute suite de nombres complexes $(a_k)_{1\leq k\leq p-1}$, on a
$$\sum_{k=1}^{p-1} a_k = \sum_{k=1}^{p-1} a_{p-k}.$$

(4) Pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, on désigne par q_k et r_k respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de k^2 par p :
$$k^2 = pq_k + r_k \quad \text{avec } 0 \leq r_k < p.$$

On remarquera que
$$q_k = \left[\frac{k^2}{p}\right].$$

Montrer que l'on a
$$\sum_{\ell=1}^{\frac{p-1}{2}} r_\ell = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p-1}\left(1+\left(\frac{k}{p}\right)\right)k.$$

(5) Déduire alors des questions précédentes l'expression de $\sum_{\ell=1}^{\frac{p-1}{2}} r_\ell$ en fonction de p.

(6) Prouver que l'on a
$$\sum_{\ell=1}^{\frac{p-1}{2}}\left[\frac{\ell^2}{p}\right] = \frac{1}{p}\sum_{\ell=1}^{\frac{p-1}{2}}\ell^2 - \frac{1}{p}\sum_{\ell=1}^{\frac{p-1}{2}} r_\ell.$$

(7) Exprimer $\sum_{\ell=1}^{\frac{p-1}{2}}\left[\frac{\ell^2}{p}\right]$ en fonction de p et déduire de tout ce qui précède la relation (0.1).

Exercice 3. Soit la courbe définie par :
$$E : y^2 = x^3 + \theta x^2 + \theta$$

sur le corps $\mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3(\theta)$, où $\theta^2 = -1$.

(5) Prouver que si $f, g \in \mathcal{A}$, on a

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(n) = \sum_{d|n} g(d)\right) \Leftrightarrow \left(\forall n \in \mathbb{N}^*,\ g(n) = \sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d}) f(d)\right).$$

Exercice 2. Dans tout ce qui suit, p désigne un nombre premier congru à 1 modulo 4. On pose $n = \frac{p-1}{4}$. On se propose de prouver que l'on a

$$[\sqrt{p}] + \left[\sqrt{2p}\right] + \left[\sqrt{3p}\right] + \cdots + \left[\sqrt{\frac{p-1}{4}p}\right] = \frac{p^2-1}{12}, \tag{0.1}$$

$[x]$ désignant la partie entière du nombre réel x ($[x]$ est l'unique entier vérifiant $[x] \leq x < x+1$).

(1) Verifier la relation (0.1) pour $p = 5$, $p = 13$ et $p = 17$.

(2) On considère les ensembles

$$E = \left\{(k, \ell) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* / \ 1 \leq k \leq n \text{ et } 1 \leq \ell < \sqrt{kp}\right\}$$

et

$$F = \left\{(k, \ell) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* / \ 1 \leq \ell \leq 2n \text{ et } \frac{\ell^2}{p} < k \leq n\right\}$$

(a) Prouver que $E = F$.

(b) En calculant le nombre d'éléments de E et de F (ou bien autrement), prouver que

$$\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{4}} \left[\sqrt{kp}\right] = \frac{(p-1)^2}{8} - \sum_{\ell=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{\ell^2}{p}\right].$$

Dans ce qui suit, on se propose de calculer en fonction de p la somme $\sum_{\ell=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{\ell^2}{p}\right]$.

(1) Prouver que l'on a

$$\sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{k}{p}\right) = 0,$$

$\left(\frac{\cdot}{p}\right)$ désignant le symbole de Legendre.

(2) Prouver que l'on a

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = 1.$$

(1) Montrer que E est une courbe elliptique. Calculer son discriminant et son j-invariant.

(2) Déterminer les points de $E(\mathbb{F}_9)$.

(3) En déduire la valeur t de la trace du Frobenius.

(4) Le groupe $E(\mathbb{F}_9)$, est-il cyclique ?

(5) Quelle est la plus petite extension k de $\mathbb{F}_9$ tel que $E(k)$ ait un point d'ordre 2 ?

Exercice 4. (a) Montrer que le polynôme $P(X) = X^3 + X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{F}_5[X]$. En déduire que $\mathbb{F}_{125} = \mathbb{F}_5(\theta)$ où $\theta^3 + \theta^2 + 1 = 0$.

(b) Calculer θ^{-1} en fonction de θ.

(c) Calculer θ^{30}, puis θ^{31}. En déduire que θ et $-\theta$ sont des carrés dans $\mathbb{F}_{125}$.

Exercice 5.

(A) Soit C le code binaire linéaire de matrice génératrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer une matrice génératrice sous forme standard de C.

(2) Déterminer une matrice de contrôle de C et en déduire sa distance minimale.

(3) Le code C est-il MDS ?

(4) On reçoit le vecteur 110110. Retrouver le mot envoyé.

(B) Le polynôme énumérateur des poids d'un code linéaire de longueur n sur $\mathbb{F}_q$ est donné par

$$A(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i,$$

où a_i désigne le nombre de mots du code de poids i. Soit $A(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ le polynôme énumérateur d'un $[n,k]$-code binaire C et soit $B(X) = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i$ le polynôme énumérateur du code orthogonal $C^\perp$. Démontrer que :

$$B(X) = \frac{1}{2^k} \sum_{i=0}^{n} a_i (1-X)^i (1+X)^{n-i}.$$

Exercice 3. Soit K un corps commutatif. Soient $f \in K[X]$ un polynôme à coefficients dans K, F le corps des racines de f et $G = \mathrm{Aut}_K F$ le groupe des automorphismes de F sur K.

(1) On suppose que la caractéristique de K est différente de 2 et f séparable de degré n. Soient $\alpha_1, ..., \alpha_n$ les racines de f et on définit le discriminant de f qu'on note D par

$$D = \prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^2$$

(a) Montrer que $D \in K$.

(b) Montrer que $\sigma \in G$, en tant que permutation, est paire si et seulement si $\sigma\left(\sqrt{D}\right) = \sqrt{D}$. En déduire que si f est irréductible de degré 3, on a

$G \simeq A_3 \iff D \in K^2$, où A_3 est le groupe alterné de degré n

(2) On considère $f = X^5 + X^4 - 4X^3 - 3X^2 + 3X + 1 \in \mathbb{Z}[X]$

(a) Montrer que f est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

(b) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ un zéro de $f(\alpha) = 0$, vérifier que $\alpha^2 - 2$, $\alpha^3 - 3\alpha$, $\alpha^4 - 4\alpha^2 + 2$ et $-\alpha^4 - \alpha^3 + 3\alpha^2 + 2\alpha - 1$ sont des zéros de f. En déduire que l'extension $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ est normale.

Exercice 4. Soient $n \geq 2$ un entier et ξ_n une racine primitive n-ème de l'unité. On pose $L = \mathbb{Q}(\xi_n)$.

(1) On suppose que $n = 5$.

(a) Déterminer le polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$ de ξ_5.

(b) Montrer que $L/\mathbb{Q}$ est galoisienne et déterminer $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$.

(c) Déterminer $\mathrm{Min}\left(\xi_5 + \xi_5^{-1}, X\right)$ et montrer que $\sqrt{5} \in L$.

(d) Déterminer les extensions $E/\mathbb{Q}$, $E \subseteq L$. En déduire qu'il existe une unique extension $E/\mathbb{Q}$ de degré 2 que l'on déterminera.

(e) Donner le groupe de Galois de $(X^2 - 5)(X^5 - 1)$ et celui de $(X^2 + 3)(X^5 - 1)$.

(2) On pose $n = 9$.

(a) Montrer que L est une extension cyclique de degré 6 sur $\mathbb{Q}$. Déterminer le degré de $[\mathbb{Q}(\cos {}^{2\pi}/_9) : \mathbb{Q}]$.

(b) Montrer que L contient un unique sous-corps cubique K sur $\mathbb{Q}$. Déterminer un élément primitif de K.

Concours de formation doctorale 12.12.12

Epreuve de systèmes dynamiques Durée 1H30

ex1 Calculer l'indice à l'infini du système

$$\frac{dx}{dt} = x - y, \quad \frac{dy}{dt} = x - y^2.$$

ex2 Montrer que le système suivant possède au moins une solution périodique qui entoure l'origine $(0,0)$,

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + \dfrac{1}{4}x.(1-2r^2) & \text{où } r^2 = x^2+y^2. \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + \dfrac{1}{2}y.(1-r^2) \end{cases}$$

ex3 Soit le système $\dot{x}_1 = -x_1, \quad \dot{x}_2 = x_2 + x_1^2$.

1) Chercher la solution $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ telle que $\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

2) Montrer que l'ensemble $S = \{(x_1, x_2) / x_2 = -\frac{x_1^2}{3}\}$ est invariant par le flot ϕ_t.

ex4 Soit le système $\frac{dx}{dt} = -x + y^2, \quad \frac{dy}{dt} = y + x^2 + yx^3$.

étudier l'existence des cycles limites

ex5 Chercher les variétés centrale et stable au voisinage du point d'équilibre $(0,0)$ du système suivant et tracer les orbites

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^2.y - x^5 \\ \dfrac{dy}{dt} = -y + 2x^3 \end{cases}$$

PARTIE II :

(Répondre sur une seule double feuille)

Exercice 3.

1. Soit la suite d'entiers définie par

$$U_{n+1} = \sum_{k} \binom{n-qk}{p+rk} x^{\star} y^{p+rk},$$

dire rigoureusement à quoi correspond chacun des paramètres n, q, p et r par rapport au triangle de Pascal, puis remplacer $\bigstar$ par la bonne expression.

2. Montrer que la suite précédente satisfait la relation de récurrence

$$U_n - x\binom{q}{1}U_{n-1} + x^2\binom{q}{2}U_{n-2} + \cdots + (-1)^q x^q \binom{q}{q} U_{n-q} = y^q U_{n-p-q}$$

[ind. $\sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s}\binom{u-s}{v} = \binom{u-r}{v-r}$].

Exercice 4.

1. Interpréter combinatoirement le coefficient binomial puis établir la formule de Pascal généralisée correspondante (justifier votre réponse).

2. Calculer l'hyperdéterminant de l'hypermatrice $M = (a_{ijk})_{1 \leq i,j,k \leq 3}$ avec $a_{ijk} = \binom{i+j+k}{i,j,k}$ et $a_{ijk} = i - j + k$.

Quelle différence fondamentale y a -t-il entre les deux exemples ?

PARTIE II :

(Répondre sur une seule double feuille)

Exercice 3. Considérons une file d'attente $M\ /M\ /2$ dont le taux d'arrivée moyen est de λ clients par seconde et les temps de service sont mutuellement indépendants, identiquements distribués selon une loi exponentielle de taux μ et que les clients sont servis dans l'ordre premier arrivé, premier servi, $\lambda < 2\mu$.

1) Déterminer les équations différentielles qui régissent les probabilités $P_k(t)$ (probabilité qu'il y ait k clients dans le système au temps t) ainsi que le régime permanent $P_k = \lim_{t\to\infty} P_k(t)$.

2) A l'intant $t = 0$, un client A arrive dans cette file d'attente qu'il trouve dans l'état suivant : les 2 serveurs sont occupés et n autres clients (lui non compris) attendent dans la fille. Nous supposons qu'aucun nouveau client n'est accèpté (après le client A), quel est le temps d'attente moyen du client A dans la file ? Quel est le temps moyen de vidage du système ?

Exercice 4. Une petite usine possède m machines du même type fonctionnant indépendamment. La probabilité qu'une machine se dérègle au cours d'une journée et nécessite une réparation est de 0.5. Lorsqu'un tel incident se produit, le technicien la répare au cours de la soirée. Malheureusement, le technicien ne peut réparer plus d'une machine au cours d'une même soirée.

Notons par X_n pour le nombre de machines qui fonctionnement au début de la n-ème journée et posons $X_0 = 1$.

(a)- Modélisez cette situation à l'aide d'une chaine de Markov en donnant son espace d'états et sa matrice de transition.

(b)- La chaine admet-elle une distribution stationnaire ? Justifier votre réponse.

(c)- Soit l'événement A_n :="Le technicien travaille durant la soirée de la n-ème journée". Montrer que la proportion des soirées où le technicien doit travailler est $p = 1 - \left(1 - \frac{1}{2^m}\right)\pi_m$, où π_m est la probabilité qu'il y a m machines en marche à l'état permanent.

Université Mouloud Mammeri Tizi-Ouzou
Faculté des Sciences - Dept. Mathématiques
École doctorale Mathématiques

Épreuve : Équations Différentielles

Exercice 1 : Soit la matrice $A(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & t \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$

On considère le système différentiel : $X'(t) = A(t).X(t)$ (*)

1) Déterminer un système fondamental de solutions de (*)
2) Préciser la résolvante $R(t,s)$ associée à (*)
3) Déduire l'unique solution du problème :

$$\begin{cases} X'(t) = A(t).X(t) + B(t) \\ X(s) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{avec } B(t) = e^{t^2/2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 : Soit l'équation différentielle :

$$x^2 y''(x) - 3x y'(x) + 4y(x) = 0 \quad (E)$$

1) Vérifier que (E) admet des solutions polynômes sur $]0,+\infty[$
2) Donner un système fondamental de solutions de (E)
3) Préciser la résolvante $R(t,s)$ associée à (E)
4) Déduire l'unique solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x^2 y''(x) - 3x y'(x) + 4y(x) = x^3 \\ y(s) = \alpha, \quad y'(s) = \beta \end{cases}$$

Que se passe t-il lorsque $s \to 0$?

Barème : Exo 1 : 2pts - 3pts - 3pts
Exo 2 : 3pts - 3pts - 3pts - 3pts

Université de Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

Le 18/11/12

Durée : 2h

Concours d'entrée en Doctorat LMD Option : Analyse et Probabilité

Epreuve : Probabilités et Statistique

Exercice1 : (4 pts)

Un livre de 1500 pages contient 1000 erreurs réparties au hasard. On ouvre le livre à une page quelconque et on désigne par X le nombre d'erreurs rencontrées dans cette page.

1. Donner la distribution de la variable aléatoire X ainsi que ses paramètres.
2. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X que l'on désigne par E(X) et var(X).
3. On se propose d'approximer la loi de la variable aléatoire X par la loi de Poisson. Est-ce légitime ? Dans l'affirmative, déterminer le paramètre de cette loi.
4. Calculer la probabilité de n'avoir aucune erreur
5. Calculer la probabilité de rencontrer plus de deux erreurs

Exercice 2: (6 pts)

Soit X une variable aléatoire sur (Ω, F, P) de densité $f_X(x) = \frac{1}{x^2} 1_{[1,+\infty]}^{(x)}$

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi que X et soient deux variables aléatoires U et V telles que $U = X_1 X_2$ et $V = X_1 / X_2$

1. Déterminer la densité du couple (U, V) et tracer son domaine de définition
2. Déterminer la densité de la variable aléatoire U et celle de la variable aléatoire V
3. Déterminer la densité conditionnelle de la variable aléatoire V sachant U=u
4. Dites si U et V sont des variables aléatoires indépendantes. Justifier.
5. On pose $Z = \sqrt{U}$ calculer la densité de la variable aléatoire Z

Exercice 3: (5pts)

Soit X une variable aléatoire de loi définie par la densité

$$f(x,\theta) = \theta\, x^{\theta-1} 1_{[0,1]}^{(x)} \quad \theta > 0$$

1. Déterminer par la méthode des moments, l'estimateur du paramètre θ, au vu de l'échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de X
2. Déterminer par la méthode du maximum de vraisemblance, l'estimateur T1/θ du paramètre 1/θ, au vu de l'échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de X.
3. L'estimateur $T_{1/\theta}$ est-il sans biais ?
4. Si oui, est-il efficace ?

Exercice 4: (5pts)

Soit la population des USA composée de 50 états. Un échantillon aléatoire de 5 états a fourni les superficies suivantes (en milliers de kilomètres (km) carrées).

147 - 84 - 24 - 85 - 159

1. Trouver un intervalle de confiance à 95% pour la superficie moyenne de la population.
2. Déterminer l'intervalle de confiance à 95% pour la superficie totale des USA.
3. En fait, la superficie totale des USA est de 3620000 km carrées. Cette aire est-elle comprise dans l'intervalle de confiance ?

Université A. MIRA de BEJAIA
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

18/11/2012

Concours d'entrée en Doctorat LMD

Option : Analyse et Probabilités

Epreuve : Analyse

Durée : 03 heures

Exercice 1. *Soit $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite de fonctions continues, uniformément convergente vers f. Qu'en est-il de $(\sin(f_n))_n$? Proposer une généralisation pour $(g \circ f_n)_n$.*

Exercice 2. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto H(x_1 - c\, x_2)$ où H désigne la fonction de Heaviside et $c > 0$. Déterminer $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$ au sens de $\mathfrak{D}'(\mathbb{R}^2)$.*

Exercice 3. *Soit $\lambda > 0$ et $u(x) = e^{-\lambda |x|^2}$, $x \in \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la transformée de Fourier de u.*

Exercice 4. *Pour $s \in \mathbb{R}$, on considère l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^N)$ dont la norme associée au produit scalaire est notée $\|.\|_s$.*

1) Montrer que $H^s(\mathbb{R}^N)$ est un espace de Hilbert et que si s_1 et $s_2 \in \mathbb{R}$ sont tels que $s_1 \geq s_2$ alors $H^{s_1}(\mathbb{R}^N) \subset H^{s_2}(\mathbb{R}^N)$.

2) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$, $0 < |\alpha| \leq m$, il existe $C > 0$ tel que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^N : \prod_{j=1}^{N} |\xi_j|^{2\alpha_j} \leq \left(1 + |\xi|^2\right)^m \leq C \left(1 + \sum_{0<|\alpha|\leq m} \prod_{j=1}^{N} |\xi_j|^{2\alpha_j}\right).$$

3) En déduire que lorsque $s = m \in \mathbb{N}$, l'espace $H^m(\mathbb{R}^N)$ coïncide avec l'espace $E = \left\{u \in L^2(\mathbb{R}^N),\ D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^N),\ |\alpha| \leq m\right\}$ et que la norme $\|u\|_m^2$ est équivalente à la norme $|u|_m^2 = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2$.

Exercice 5. *Les fonctions considérées ici sont supposées à valeurs réelles. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $p, q \in L^\infty(]a,b[)$. On suppose que $q \geq 0$ et qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $p \geq \alpha$.*

(i) Montrer que pour tout $f \in L^2(]a,b[)$, l'équation $-(pu')' + qu = f$ admet une solution unique u dans $H_0^1(]a,b[)$ et que u réalise le minimum dans $H_0^1(]a,b[)$ d'une fonctionnelle à préciser.

(ii) Montrer que l'opérateur $T : H_0^1(]a,b[) \to H_0^1(]a,b[)$, $f \mapsto u$ où u est la solution de l'équation dans (i), est auto-adjoint, positif, compact et injectif.

2. *Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est δ_0 la mesure de Dirac en 0; Montrer que $f = g.\delta_0.p.p.$ si et seulement si $f(0) = g(0)$.*

Exercise 4 (4 points) *Soient m_1, m_2 deux mesures sur l'espace mesurable (E,T).*

1. Montrer que $m = m_1 + m_2$ est une mesure.

2. Montrer qu'une application f mesurable de E dans $\mathbb{R}$ est intégrable pour la mesure m si et seulement si elle est intégrable pour les mesures m_1 et m_2. Si f est intégrable pour la mesure m, montrer que $\int f dm = \int f dm_1 + \int f dm_2$.

3. Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de mesures positives sur (E,T) et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^*$. On pose, pour $A \in T$, $m(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n m_n(A)$. Montrer que m est une mesure sur T; soit f une application mesurable de E dans $\mathbb{R}$ et intégrable pour la mesure m montrer que $\int f dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \int f dm_n$.

Exercise 5 (4 points) *Existe-t-il une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que*

$$\forall n \geq 0 \quad ne^{-n|x|} \leq f(x) \qquad p.p$$

si oui déterminer f.

Université Mohamed Khider Biskra
Faculté des sciences exactes et sciences de la nature et de la vie
Département de Mathématiques
Concours d'accès à la formation $3^{ème}$ Cycle 2012/2013: Mathématiques

Epreuve de Probabilités & Statistique (1H30)

Exercice 1 (04 points)

Sur un espace probabilisé (Ω, F, P), on considère une variable aléatoire réelle X et soit φ une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+$. Montrer que pour tout $a > 0$:

$$P(\varphi(X) \geq a) \leq \frac{1}{a} E[\varphi(X)].$$

Exercice 2 (06 points)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle symétrique de densité

$$f(x) = \frac{a}{2} \exp(-a|x|), \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}.$$

1) Calculer la fonction caractéristique de X.
2) En utilisant la formule d'inversion de Fourier :

$$\Psi_X(t) = \int e^{itx} f(x)\, dx \Longrightarrow f(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-itx} \Psi_X(t)\, dt$$

pour déduire la fonction caractéristique d'une variable aléatoire Y suivant la loi de Cauchy de densité : $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$.

3) Soient $X_1, ..., X_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Cauchy. Montrer que $Z = \frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n)$ suit une loi de Cauchy.

Exercice 3 (04 points)

Voici la série, ordonnées dans l'ordre croissant, des 15 notes obtenues en mathématiques par un élève au cours du premier semestre.

4	6	6	9	11	11	12	13	13	13	14	15	17	18	18

1. Quelle est la fréquence de la note 13 ?
2. Quelle est la note moyenne ?
3. Quelle est la note médiane ?
4. Quelle est l'étendue de cette série de notes ?

Exercice 4 (06 points)

Soit $(X_1, ..., X_n)$ un n-échantillon de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ inconnu.

1. Décrire la loi de X_1. Donner son espérance et sa variance.
2. Proposer un estimateur par la méthode des moments.
3. Proposer un estimateur par la méthode du maximum de vraisemblance.

Université Mohamed Khider - Biskra — 12/10/2013
Faculté des Sciences Exactes et SNV
Département de Mathématiques — 11h00-12h30

Concours d'accès à la formation en $3^{\text{ème}}$ Cycle LMD (2013-2014)
Option 2 : Analyse Numérique et Optimisation

EPREUVE 2 :TOPOLOGIE ET MEUSURE

Exercise 1 (4 points) *On munit $I = [-\pi, \pi]$ de la mesure de lebesgue et on considère l'espace $L^2(I)$ des fonctions réelles de carré intégrable sur I , sur lequel on définit le produit scalaire usuel $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, g(t)\, dt$. On rappelle que la famille $S = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, n > 1\right\}$ constitue une base hilbertienne de l'espace de Hilbert $L^2(I)$ et que $\|f\|_2^2 = \langle f, f\rangle$.*

1) Calculer $\left\langle x, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle, \left\langle x, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}\right\rangle, \left\langle x, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}\right\rangle$.

2) Montrer que $\left\| x + \sum_{k=1}^{n} (1-)^k \frac{\sin(kx)}{k} \right\|_2 \to 0$, lorsque $n \to \infty$.

3) Calculer $\|x\|_2^2$. et montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercise 2 (4 points) *On munit $L^2([-1,1])$ du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, dt$.*

1) Vérifier que les polynômes $X_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $X_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x$, $X_2 = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3x^2 - 1)$ sont orthogonaux deux à deux. Calculer la norme $\|X_1\|_2$ de X_1 dans $L^2([-1,1])$.

2) Soit V le sous espace vectoriel de $L^2([-1,1])$ engendré par $\{X_0, X_1, X_2\}$ et soit P la projection orthogonale de $L^2([-1,1])$ sur V. Calculer $P(x^3)$, $P(e^x)$.

3) Expliquer sans faire de calcul, pourquoi on a les égalités

$$\int_{-1}^{1} x^4 dx = \int_{-1}^{1} x P(x^3)\, dx.$$

$$\int_{-1}^{1} x^2 e^x dx = \int_{-1}^{1} x^2 P(e^x)\, dx.$$

Exercise 3 (4 points) *1. Soient f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est λ la mesure de Lebesgue; Montrer que $f = g.\lambda.p.p.$ si et seulement si $f = g$.*

Université Mohamed Khider - Biskra
Faculté des Sciences Exactes et SNV
Département des Mathématiques

21/05/2013

08h30-10h00

Concours d'accè à la formation en $3^{ème}$ Cycle LMD (2013-2014)
Option 1 : Analyse Numérique et Optimisation

ÉPREUVE 1 : ANALYSE ET MÉTHODES NUMÉRIQUES

EXERCICE 1:

$f : [0,1] \longrightarrow R$ une fonction numérique et $L_1(x)$ le polynôme d'interpolation de f aux points $x_0 = 0$, $x_1 = 1$.

1. Déterminer les polynômes $p_0(x)$, $p_1(x)$ et $L_1(x)$ associés aux points x_0, x_1
2. Calculer $\int_0^1 p_0(x)dx$ et $\int_0^1 p_1(x)dx$.
3. Prouver qu'il existe des constantes α_0 et α_1 (que l'on déterminera) tels que $\int_0^1 L_1(x)dx = \alpha_0 f(0) + \alpha_1 f(1)$.
4. Interpréter cette formule géométriquement.
5. Calculer $\int_0^1 L_1(x)dx$ pour la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

EXERCICE 2:

On utilisant la table ci-dessous calculer $\int_{1.1}^{1.5} f(x)dx$ par :

1. la méthode des trapèzes.
2. la méthode de Simpson.

$$\begin{bmatrix} x & 1.1 & 1.3 & 1.5 \\ f(x) & 3.0042 & 3.6693 & 4.4817 \end{bmatrix}$$

EXERCICE 3:

Departement de Mathematiques
Faculté des Sciences Exactes
Université Constantine1

Concours d'acces au Doctorat: Equations Differentielles, le 19/10/2013
Epreuve2

Exercice 1 *Soit l'espace,*

$$\ell^p = \left\{ \begin{array}{c} \text{espace des suites } x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \text{ de nombres réels ou complexes} \\ \text{pour lesquels } \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < +\infty \text{ , } p \geq 1 \end{array} \right\}$$

montrer que,

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

est une norme sur ℓ^p.

Exercice 2 *Soient* X *et* Y *deux espaces normés,* $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *une suite d'opérateurs linéaires bornés, définis de* X *dans* Y *(c'est à dire* $A_n \in L(X,Y)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$*) et soit* $A \in L(X,Y)$.

Montrer que si A_n *converge en norme vers* A *alors* $A_n x$ *converge vers* Ax *sur les parties bornées de* X.

Exercice 3 *Soient* E *et* F *deux espaces topologiques, avec* F *un espace séparé, soit :*

$$f : E \longrightarrow F$$

et

$$\Gamma = \{(x, f(x)) \text{ , } x \in E\} \subset E \times F$$

le graphe de f.

1. *Montrer que* f *est continue implique que* Γ *est fermé.*
2. *Montrer que l'inverse n'est pas vrai, (prendre* $E = \mathbb{R}$ *et* $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$ *).*

Exercice 4 *Soit* E *un espace de Banach et* A *un opérateur linéaire borné sur* E. *Montrer que la famille* $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ *est un semi-groupe uniformément continu sur* E.

2. la méthode de Simpson.

$$\begin{bmatrix} x & 1.1 & 1.3 & 1.5 \\ f(x) & 3.0042 & 3.6693 & 4.4817 \end{bmatrix}$$

EXERCICE 3:

$R[X]$ étant l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, on note $A = \left\{P \in R[X] / \int_0^1 P(s)\,ds = 1\right\}$. Soit $f : R[X] \to R[X]$ l'endomorphisme défini par $f(P) = P'$, P' est la dérivée de P. Soit $d = f/A$ c'est-à-dire la restriction de f à A.

1. Montrer que d est un isomorphisme de f sur $R[X]$.

2. On note $\gamma = d^{-1}$ l'isomorphisme réciproque. Vérifier que pour tout élément Q de $R[X]$, le polynôme $P = \gamma(Q)$ est défini par :

$$\forall x \in R, P(x) = \int_0^x Q(t)\,dt + \int_0^1 (t-1)\,Q(t)\,dt.$$

3. On considère la suite $(B_n)_{n\in N}$ dans $R[X]$ définie par $B_0 = 1$ et par la relation de récurrence : $\forall n \in N, B_{n+1} = \gamma(B_n)$, calculer B_1 et B_2.

4. Vérifier que pour tout entier $n \geq 2$, on a $B_n(0) = B_n(1)$.

5. On associé à tout entier n le polynôme P_n défini par :

$$\forall x \in R, P_n(x) = (-1)^n B_n(1-x).$$

pour tout entier n, exprimer P'_{n+1} en fonction de P_n.

6. Montrer que pour tout n, $P_{n+1} = \gamma(P_n)$.

7. En déduire l'expression de $B_n(1-x)$ en fonction de $B_n(x)$.

Université Constantine1

Concours d'acces au Doctorat: Equations Differentielles, le 19/10/2013
Epreuve1

Exercice 1 *Quel est le type de l'équation :*

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

Exercice 2 *Calculer les intégrales suivantes :*

$$\oint_{|z-1|=1}\frac{e^{\frac{1}{z}}\sin \pi z}{(z^2-1)^2}dz$$

$$\oint_{|z-i|=1}\frac{\cos \pi z}{(z^2+1)^2}dz$$

$$\oint_{|z|=1}\frac{e^{z}+\sqrt{z^2}}{z}dz$$

Exercice 3 *Soit* (Ω,Σ,μ) *un espace mesuré. Si* $\mu(\Omega)<\infty$ *et* $1\leq p<q<+\infty$,

1. *Montrer que :*

$$\|f\|_p\leq[\mu(\Omega)]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|f\|_q\ ,\quad (1)$$

où $\|.\|_p$ *designe la norme dans* $L^p(\Omega,\Sigma,\mu)$.

2. *Que peut-on déduire de la relation (1).*

Exercice 4 *Soit le problème à valeurs initiales suivant :*

$$(P)\ :\begin{cases} y''+4y'+3y=\delta(t) \\ y(0)=0,\ y'(0)=0\end{cases}$$

où $\delta(t)$ *est la fonction de Dirac. Résoudre le problème* (P) *en utilisant la transformation de Laplace* $\mathcal{L}$.

(La transformation de Laplace $\mathcal{L}$ *de* $f(t)$ *notée* $F(s)=[\mathcal{L}f](s)$ *est définie par :*

$$F(s)=[\mathcal{L}f](s)=\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)\,dt$$

République algérienne démocratique et populaire
Ministère de l'enseignement et de la recherche scientifique

Université Constantine 2
Faculté des Nouvelles Technologies de l'Information et de la Communication
Département d'Informatique Fondamentale et ses Applications

Samedi 26 octobre 2013

Doctorat en Systèmes Complexes
Option Systèmes Distribués

Concours d'accès au doctorat 3ème Cycle (Système LMD) 2013-2014
Epreuve : Recherche Opérationnelle Avancée et Algorithmes Parallèles
Durée : 2 heures (Sujet 2)

Important : Les réponses aux exercices doivent se faire sur des copies d'examens différents

Exercice 1 (10 points):

Soit X et Y deux tableaux à **n** éléments chacun (X[1..n] et Y[1..n]) ou $\mathbf{n = 2^k}$ pour k un entier naturel positif.

1. Ecrire une fonction ***SomProdPram(X[1..n], Y[1..n], S)*** qui calcule en parallèle la somme des produits de deux tableaux unidimensionnels A et B en utilisant un PRAM (mémoire partagée). S = X[1]*Y[1] + X[2]*Y[2] + ... + X[n]*YB[n].

2. En utilisant la fonction SomProdVectPram(...), écrire une procédure ***ProdMatricePram(A[1..n,1..p], B[1..p,1..m], C[1..n,1..m])*** qui calcule en parallèle le produit des deux matrices A et B dans la matrice C en utilisant un PRAM (mémoire partagée).

Exercice 2 (10 points) :

1. Donner deux caractéristiques des problèmes de recherche opérationnelle.
2. Dites dans quel contexte on utilise l'optimisation exacte et l'optimisation approchée et donner un exemple de méthodes appropriées dans chacun des cas.
3. Décrire le principe de base de l'optimisation par essaims de particules.
4. Dans un laboratoire de recherche, on cherche à déterminer les concentrations de trois éléments A, B et C pour la fabrication d'un produit chimique. Les concentrations maximales et minimales des éléments sont comme suit:

Elément	Concentration maximale	Concentration minimale
A	1	45
B	2	45
C	1	30

La qualité du produit chimique dépend des concentrations utilisées. Les chercheurs ont trouvé suite à plusieurs expérimentations que cette dépendance est régie par la fonction suivante: $F = 0.78\,\alpha_1^2 + 0.52\,\alpha_2^2 + \alpha_1\alpha_2 + 1.2\,\alpha_3$ où α_1, α_2 et α_3 sont les concentrations des éléments A, B et C respectivement. Des valeurs élevées de la fonction F sont une indication de la bonne qualité du produit. En utilisant un algorithme d'optimisation par essaim de particules, on se propose de déterminer les concentrations qui permettent d'obtenir un produit de la meilleure qualité possible. Formuler la tâche à résoudre comme un problème d'optimisation.

a. Proposer un codage de solution approprié.
b. Ecrire un algorithme d'optimisation par essaim de particules permettant de résoudre ce problème en prenant soin de définir toutes les fonctions nécessaires devant être utilisées.
c. Peut-on prédire à priori le résultat de l'algorithme? Pourquoi?

République algérienne démocratique et populaire
Ministère de l'enseignement et de la recherche scientifique

Université Constantine 2
Faculté des Nouvelles Technologies de l'Information et de la Communication
Département d'Informatique Fondamentale et ses Applications

Samedi 26 octobre 2013

Doctorat en Systèmes Complexes
Option Systèmes Distribués

Concours d'accès au doctorat 3ème Cycle (Système LMD) 2013-2014
Epreuve : Algorithmes Distribués et Protocoles de Communication
Durée : 2 heures (Sujet 3)

Important : Les réponses aux exercices doivent se faire sur des copies d'examens différents

Exercice 1 (5 points):

1. Dans le réseau Internet le système de gestion des noms de domaines DNS joue un rôle très important. Quel est l'objectif général du DNS ? Citez quatre services différents rendus par le DNS aux applications Internet.
2. A combien de sessions TCP correspond une seule session de contrôle FTP ?
3. Donner l'un des mécanismes de contrôle de la congestion dans un réseau.
4. Donner le résultat de l'exécution de la commande suivante : ***telnet mx8.hotmail.com 25***

Exercice 2 (15 points):

Soit l'algorithme d'élection suivant:

Hypothèses :

- Anneau bidirectionnel virtuel fiable.
- Chaque processus a un numéro et tous les numéros sont différents.
- Tous les processus lancent la procédure d'élection.
- Chaque processus peut communiquer avec ses deux voisins : gauche et droit.
- Chaque site contient un seul processus.

Les variables associées à chaque processus Pi sont :

MonNum : entier (identité du site) ;
Max : entier ;

Lancer l'élection */* phase 0 */*
Envoyer Election(MonNum, 0, 1) aux voisins gauche et droit;
Fin

Lors de la réception du message Election(Num, NumPhase, Distance) du voisin gauche (droit) Faire
Si ((Num > MonNum) et (Distance $<2^{NumPhase}$)) alors — C1 Phase 0 — L1
Envoyer Election(Num, NumPhase, Distance + 1) au voisin droit (gauche); — L2
FinSi
Si ((Num > MonNum) et (Distance == $2^{NumPhase}$)) alors — C2 phase 0 — L3
Envoyer Réponse(Num, NumPhase) au voisin gauche (droit); — L4
FinSi
Si (MonNum == Num) alors — L5
Max = MonNum ; — C3
Envoyer (Elu(Num)) au voisin gauche (droit); — L6
FinSi
Fin

Passage à la phase i

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 mai 1945 Guelma
Concours d'accès à la Formation Doctorale Mathématiques Appliquées
Année Universitaire 2012/2013
Epreuve D'analyse Fonctionnelle
Durée : 01 h 30 mn

Exercice N° 1

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n.n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

1. En posant $u_n(x) = (x^2-1)^n \equiv (x-1)^n(x+1)^n$ et en appliquant la formule de Leibniz

$$(f.g)^{(n)} = f^{(n)}.g + nf^{(n-1)}.g' + \ldots + C_n^{n-p}f^{(n-p)}.g^{(p)} + \ldots + f.g^{(n)}$$

trouver $P_n(1)$.

2. Sur l'espace des fonctions continue sur $[-1, 1]$, à valeurs réelles, on définit le produit scalaire $\langle f,g\rangle$ par

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

et $\|f\|$ par $\|f\|^2 = \langle f,f\rangle$.

a) En intégrant par parties, montrer que $\langle P_n(x), x^m\rangle = 0$ pour $m < n$.

b) En déduire que les polynômes P_n sont orthogonaux 2 à 2.

c) Calculer $\|P_n\|$.

On donne $\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n dx = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$

3. La famille (P_n), P_n de degré n, formant une base de $\mathbb{R}[x]$ on a:

$$xP_n = c_{n+1}P_{n+1} + c_nP_n + c_{n-1}P_{n-1} + \ldots + c_1P_1 + c_0P_0$$

a) Montrer que $\langle xP_n, P_{n-k}\rangle = \langle P_n, xP_{n-k}\rangle = 0$pour $k > 1$.

b) En déduire $xP_n = c_{n+1}P_{n+1} + c_nP_n + c_{n-1}P_{n-1}$.

c) Montrer $\langle xP_n, P_n\rangle = 0$ et que le coefficient de x^n dans P_n est égale à $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$.

d) De cela et de la valeur de $P_n(1)$ déduire la relation:

$$(2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x).$$

4. Si $u_n(x) = (x^2-1)^n$ alors $\frac{u_n'}{u_n} = \frac{2nx}{x^2-1}$ soit $(x^2-1)u_n'(x) - 2nxu_n(x) = 0.$

En dérivant $(n+1)$ fois cette dernière égalité par la formule de Leibniz, montrer que P_n vérifie

$$(x^2-1)P_n'' + 2xP_n' - n(n+1)P_n = 0.$$

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 mai 1945 Guelma

Concours d'accès à la Formation Doctorale Mathématiques Appliquées

Année Universitaire 2012/2013

Epreuve D'analyse Numérique et EDP

Durée : 01 h 30 mn

Exercice N° 1: Soit Ω un ouvert borné de $\Re^3$, de frontière assez régulière $\partial\Omega$, on définit les espaces de Hilbert :

$$V = \{u \in H_0^1(\Omega)^3, \quad \nabla . u = 0\}, \quad H = \overline{V}^{L^2(\Omega)^3}$$

On considère le problème de Navier Stokes :

$$(P)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \upsilon \Delta u + \nabla p = f \\ \nabla . u = 0; \quad u_{|\partial\Omega} = 0; \quad u(0) = u_0 \end{cases}$$

1- Pour $f \in L^2(0,T,H), \quad u_0 \in H$.

i) Montrer que la formulation variationnelle associé à (P) s'écrit :

Chercher $u(t) \in V$ tq :

$$\frac{d}{dt}(u(t),\phi)_H + a(u(t),\phi) = (f(t),\phi)_H, \quad \forall \phi \in V \quad \textbf{(1.1)}$$

Ou $a(.,.)$ est une forme bilinéaire symétrique à déterminer.

ii) Montrer que $a(.,.)$ est continu et coécrive sur V.

iii) Montrer que si u est solution de **(1.1)**, elle vérifie $u \in L^\infty(0,T,H) \cap L^2(0,T,V)$

2-On suppose que $f = 0$.

i) Montrer l'énergie cinétique total $\varepsilon(t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |u|^2 dx$ et la perte de l'énergie cinétique du à la viscosité $D(t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega \upsilon|\nabla u|^2 dx$ vérifié l'équation :

$$\frac{d}{dt}\varepsilon(t) + D(t) = 0 \qquad (1.2)$$

ii) En déduire que l'énergie $\varepsilon(t)$ est une fonction décroissante en t.

N.B=$\langle .,. \rangle_V$, $\|.\|_V$ et $\langle .,. \rangle_H$, $\|.\|_H$ sont les produit et les normes associées à V et H respectivement.

Exercice N° 2:

On s'intéresse à la résolution de *l'équation de la chaleur en dimension 1*:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 x \in \Re,\ t > 0 \qquad (3)$$

que l'on approche à l'aide du *schéma de Richardson*:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = 0 \qquad (4)$$

2a). *Quel est a priori l'inconvénient pratique de ce schéma ? Montrer qu'il s'agit d'un schéma* du *second ordre en espace et en temps mais inconditionnellement instable.*

2b). *Dans* (4), *on remplace* u_j^n *par* $\frac{u_j^{n+1} + u_j^{n-1}}{2}$ *. On obtient ainsi le schéma de DuFort-Frankel. Montrer que ce schéma est explicite et inconditionnellement stable.*

2c). *Analyser l'erreur de troncature* du *schéma de DuFort-Frankel et conclure* (*le schéma* n'*est consistant que si* $\frac{\Delta t}{h}$ *tend vers* 0). *Ce résultat était-il prévisible ?*

Concours de la formation doctorale 12.12.12

Epreuve d'équations différentielles ordinaires

Ex1 : Résoudre 1) $y'' - 2y' + y = e^{x}$

2) $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + x\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} = 0$

3) $\frac{dy}{dx} - \cos(x)\, y = \cos(x). y^2$

Ex2 Eliminer la première dérivée par la substitution de la variable indépendante $t = \varphi(x)$ dans l'équation

$xy'' - y' - 4x^3 y = 0$ et la résoudre.

Ex3 Soit le système $\frac{dx}{dt} = x + y + 2e^{-t}$

$\frac{dy}{dt} = 4x + y + 4e^{-t}$

Sachant que $\begin{pmatrix} 0 \\ -2e^{-t} \end{pmatrix}$ est une solution particulière de ce système

donner la solution générale de ce système.

Ex4 : Etudier l'existence et l'unicité de la solution du problème $\frac{dy}{dx} = 3x y^{\frac{1}{3}}$, $y(0) = 0$ dans le domaine

$D = \{(x,y) \mid -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, -1 \leq y \leq 1\}$.

Ex5 Résoudre et tracer les orbites du système

$\frac{dx}{dt} = 2xy, \ \frac{dy}{dt} = y^2 - x^2$.

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 mai 1945 Guelma
Concours d'accès à la Formation Doctorale Mathématiques Appliquées
Année Universitaire 2012/2013
Epreuve D'analyse Fonctionnelle
Durée : 01 h 30 mn

Exercice N° 1

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n.n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

1. En posant $u_n(x) = (x^2-1)^n \equiv (x-1)^n(x+1)^n$ et en appliquant la formule de Leibniz

$$(f.g)^{(n)} = f^{(n)}.g + nf^{(n-1)}.g' + \ldots + C_n^{n-p}f^{(n-p)}.g^{(p)} + \ldots + f.g^{(n)}$$

trouver $P_n(1)$.

2. Sur l'espace des fonctions continue sur $[-1, 1]$, à valeurs réelles, on définit le produit scalaire $\langle f,g \rangle$ par

$$\langle f,g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

et $\|f\|$ par $\|f\|^2 = \langle f,f \rangle$.

a) En intégrant par parties, montrer que $\langle P_n(x), x^m \rangle = 0$ pour $m < n$.

b) En déduire que les polynômes P_n sont orthogonaux 2 à 2.

c) Calculer $\|P_n\|$.

On donne $\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n dx = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$

3. La famille (P_n), P_n de degré n, formant une base de $\mathbb{R}[x]$ on a:

$$xP_n = c_{n+1}P_{n+1} + c_nP_n + c_{n-1}P_{n-1} + \ldots + c_1P_1 + c_0P_0$$

a) Montrer que $\langle xP_n, P_{n-k} \rangle = \langle P_n, xP_{n-k} \rangle = 0$pour $k > 1$.

b) En déduire $xP_n = c_{n+1}P_{n+1} + c_nP_n + c_{n-1}P_{n-1}$.

c) Montrer $\langle xP_n, P_n \rangle = 0$ et que le coefficient de x^n dans P_n est égale à $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$.

d) De cela et de la valeur de $P_n(1)$ déduire la relation:

$$(2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x).$$

4. Si $u_n(x) = (x^2-1)^n$ alors $\frac{u_n'}{u_n} = \frac{2nx}{x^2-1}$ soit $(x^2-1)u_n'(x) - 2nxu_n(x) = 0.$

En dérivant $(n+1)$ fois cette dernière égalité par la formule de Leibniz, montrer que P_n vérifie

$$(x^2-1)P_n'' + 2xP_n' - n(n+1)P_n = 0.$$

Exercice 2

1. La transformée de $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ par l'homothétie h_λ de rapport $\lambda \in \mathbb{R}$ est la distribution $T \circ h_\lambda$ définie par

$$< T \circ h_\lambda, \varphi > = \frac{1}{|\lambda|} < T, \varphi \circ h_{\frac{1}{\lambda}} > .$$

On dit que la distribution T est **homogène de degrè p**, p entier, si

$$T \circ h_\lambda = \lambda^p T.$$

   a) Montrer que les distributions $|x|$, $\mathrm{sgn}(x)$, sont homogènes et déterminer leurs degrés respectifs.

   b) Même question pour les distributions $vp\left(\frac{1}{x}\right)$ et $Pf\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

✓ 2. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on définit la distribution **valeur princiaple** par

$$vp\left(\frac{1}{x}\right)(\varphi) = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx.$$

   ✓**a)** Montrer que

$$x vp\left(\frac{1}{x}\right) = 1.$$

   ✓**b)** Résoudre, dans l'espace $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, l'équation :

$$xT = 0.$$

   ✓**c)** En déduire la solution, dans l'espace $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, de l'équation :

$$xT = 1.$$

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE 8 MAI 1945 - GUELMA
VICE RECTORAT DE LA FORMATION SUPERIEURE, DE LA FORMATION CONTINUE ET DES DIPLOMES

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière

Module : IA & RDF

Choisissez une des deux parties :

Partie 1

1. Citez les points essentiels qui caractérisent la théorie des probabilités, la théorie des possibilités et la théorie de l'évidence. **(6 pts)**
2. Quels sont les avantages et les inconvénients de la méthode de classification de Bayes ?(3 **pts**)
3. Expliquez le principe de la méthode de l'ACP. **(3 pts)**
4. Expliquez la différence entre un apprentissage supervisé et non supervisé. **(2 pts)**
5. Quelles sont les conséquences qu'engendrent un sous apprentissage et sur apprentissage. (2 **pts**)
6. Citez et expliquez brièvement les méthodes d'évaluation de : Resubstitution, Hold-out, Validation croisée et Bootstrap. **(4 pts)**

Partie 2

Exercice 1 :(8 pts)

Répondre aux questions suivantes :

1. La logique est depuis longtemps un outil privilégié pour modéliser l'intelligence humaine. Expliquez le rôle que la logique a joué dans l'intelligence artificielle. (2 pts)
2. Donnez la définition des réseaux sémantiques ? Donnez un exemple explicatif ? (2 pts)
3. Quels sont les intervenants humains dans la conception des systèmes experts ? Donnez en bref le rôle de chacun d'eux (deux lignes au maximum pour chaque rôle) ? (2 pts)
4. Quel est le principe général du mécanisme de chaînage mixte ? (2 pts)

Exercice 2 :(12 pts)

A) Soit la base de règles suivantes :

R1 : Si A et B et C Alors D
R2 : Si D Alors F
R3 : Si E Alors F
R4 : Si F et G et H Alors I
R5 : Si J et K Alors P
R6 : Si P Alors T
R7 : Si M Alors T
R8 : Si I et T Alors L
R9 : Si Z Alors M
R10 : Si L Alors N
R11 : Si S Alors U
R12 : Si U Alors T

Base des Faits ={ A, S, B, E, G, H, M}
But à démontrer : {N}

1) Donnez l'arbre ET/OU représentant la base de règle. (2 pts)
2) En utilisant une stratégie en chaînage avant et en largeur d'abord, donnez l'ordre dans lequel sont inférés les nouveaux faits. (2 pts)
3) Donnez les différentes étapes pour démontrer le but {N} en utilisant une stratégie en chaînage arrière et en profondeur d'abord. (2 pts)

B) La base de connaissance d'un système expert est la suivante :

i. Si x est la mère de y et y est la sœur de z alors x est la mère de z.
ii. Si x est la mère de y et x est la sœur de z alors z est la tante de y.
iii. Si x est la sœur de y et z est le frère de x alors z est le frère de y.

1) Quelle est la différence entre les systèmes experts d'ordre 0, 0+ et 1 ? Quel est l'ordre du système expert précédent ? justifiez. (4 pts)
2) Sachant que Nassima est la mère de Sara, que Sara est la sœur de Abir, et que Nassima est la sœur de Amira, qui est la tante de Abir ? Détaillez la réponse. (2 pts)

Bonne Chance

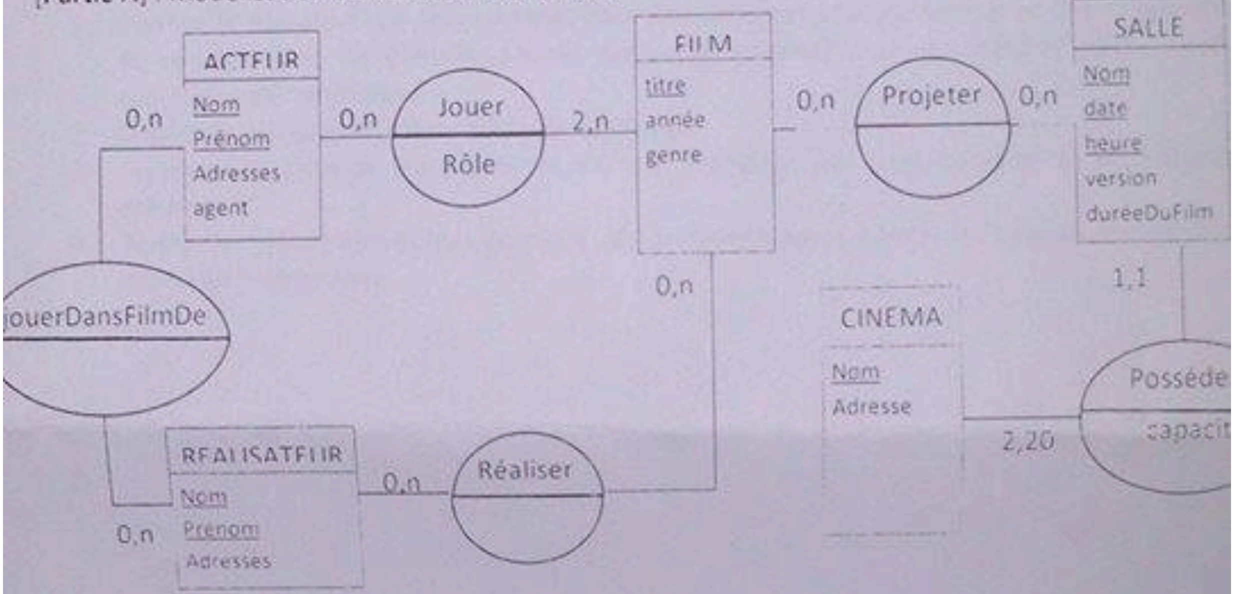
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE 8 MAI 1945 – GUELMA
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Intitulé de la formation de Doctorat : Informatique

Epreuve : Bases de données **durée : 1H30**

Exercice n °1 (12 pts)

Remarque : Les Deux (02) parties sont indépendantes.

[**Partie A**] : Modélisation et Normalisation(**6 pts**)



Le modèle entité association de la figure ci-dessus pose de nombreux problèmes.

1. Identifier les erreurs de modélisation et les incohérences dont souffre ce modèle. Préciser à chaque fois la règle ou la definition enfreinte.
2. Proposer un modèle corrigé **bien formé**

[**Partie B**] : Algèbre relationnelle et SQL(**6 pts**)

Soit le schéma relationnel suivant :

PERSONNE (<u>IdPersonne</u>, nom, prénom)
FILM(<u>**IdFilm**</u>, IdRéalisateur, titre, genre, année) où **IdRéalisateur** est une clé étrangère qui fa[it] référence au schéma de relation PERSONNE.
JOUER (<u>**IdActeur, IdFilm**</u>, rôle)où **IdActeur** et **IdFilm** sont des clés étrangères qui font respectivement référence aux schémas de relation PERSONNE et FILM.
CINEMA (<u>**IdCinéma**</u>, nom, adresse)
PROJECTION (<u>**IdCinéma, IdFilm**, jour</u>) ou **IdCinéma** et **IdFilm** sont des clés étrangères qui font respectivement référence aux schémas de relation CINEMA et FILM.

2. Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est δ_0 la mesure de Dirac en 0. Montrer que $f = g.\delta_0.p.p.$ si et seulement si $f(0) = g(0)$.

Exercise 4 (4 points) *Soient m_1, m_2 deux mesures sur l'espace mesurable (E, T).*

1. Montrer que $m = m_1 + m_2$ est une mesure.

2. Montrer qu'une application f mesurable de E dans $\mathbb{R}$ est intégrable pour la mesure m si et seulement si elle est intégrable pour les mesures m_1 et m_2. Si f est intégrable pour la mesure m, montrer que $\int f dm = \int f dm_1 + \int f dm_2$.

3. Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de mesures positives sur (E, T) et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^*$. On pose, pour $A \in T$, $m(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n m_n(A)$. Montrer que m est une mesure sur T; soit f une application mesurable de E dans $\mathbb{R}$ et intégrable pour la mesure m montrer que $\int f dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \int f dm_n$.

Exercise 5 (4 points) *Existe-t-il une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que*

$$\forall n \geq 0 \quad ne^{-n|x|} \leq f(x) \qquad p.p$$

si oui déterminer f.

Université Yahia Farès de Médéa 2012/2013
Faculté des Sciences et de la Technologie

Doctorat LMD « Analyse et Modélisation Mathématiques »
Epreuve : Analyse Fonctionnelle et Variationnelle

Sujet 1

Durée 2h

Exercice 1 *(6 points)*
Sur l'espace $\mathbb{R}^n$, on considère la norme suivante

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \quad où \quad x = (x_1, \ldots, x_n)$$

?

1. *Vérifier qu'il sagit bien d'une norme.*
2. *On considère l'application linéaire T de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ dans lui même définie par*

$$T(x,y,z) = (5x - 2y + 2z, 2x - y, x + y + z)$$

En munissant $\mathbb{R}^3$ de la norme $\|.\|_1$, quelle est alors la norme de T ?

Exercice 2 *(8 points)*
Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Rappelons que l'épigraphe de f est

$$epi(f) = \{(x,\alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq \alpha\}$$

1. *Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $epi(f)$ est convexe.*
2. *Soit φ une fonction convexe et croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En posant $\varphi(+\infty) = +\infty$, montrer que si f est convexe sur $\mathbb{R}^n$, alors $\varphi o f$ est convexe sur $\mathbb{R}^n$.*

Exercice 3 *(6 points)*
Soit Y un espace métrique et soit X une partie compacte non vide de Y. On désigne par $C_b(Y)$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues et bornées muni de la norme définie par

$$\|f\| = \sup_{y \in Y} |f(y)|.$$

On désigne aussi par $\|.\|$ la norme de la convergence uniforme sur l'espace $C(X)$ des fonctions réelles continues sur X. Les espaces $C(X)$ et $C_b(Y)$ sont des espaces de Banach.
Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\varphi(x) = \frac{x}{max(|x|, 1)}$$

et soit $f \in C_b(Y)$ tel que $f_{|X} \neq 0$.

1. *Montrer que l'application $g = \|f_{|X}\| \varphi o \frac{f}{\|f_{|X}\|} \in C_b(Y)$ et que $\|g\| \leq \|f_{|X}\|$.*
2. *Montrer que $g_{|X} = f_{|X}$.*
3. *Montrer qu'il existe $x_0 \in X$ tel que $|f(x_0)| = \|f_{|X}\|$.*
4. *En déduire que $\|g\| = \|f_{|X}\|$.*

<u>Barème :</u>
Exercice 1 : 6 points = 3 + 3
Exercice 2 : 8 points = (3+3)+2
Exercice 3 : 6 points = 2+1+1+2

a) Calculer la dérivée de la distribution v et en déduire que S est dans $L^2(]a,b[)$.

b) Montrer que si u est dans $\mathbb{V}$ alors u'' est dans $L^2(]a,b[)$.

3) Soient g donnée dans $H_0^1(]a,b[)$ et η un réel fixé. Pour v dans $\mathbb{V}$, on pose

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_a^b \left(|v'(x)|^2 + |v'''(x)|^2 \right) dx - \int_a^b g'(x)\, v'(x)\, dx - \eta v''(b).$$

a) Justifier l'existence de $v''(b)$.

b) Démontrer que la fonction J est différentiable sur $\mathbb{V}$ et calculer $dJ(u)\,v$ (la valeur en v de la différentielle de J en u).

c) Montrer que si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{D}(]a,b[)$ convergeant vers 0 alors la suite $(dJ(u)\,\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

d) Expliciter la distribution T définie par

$$\langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(]a,b[)\times\mathcal{D}(]a,b[)} = dJ(u)\,\varphi.$$

4) On pose

$$a(u,v) = \int_a^b \left(u'(x)\, v'(x) + u'''(x)\, v'''(x) \right) dx$$

$$l(v) = \int_a^b g'(x)\,.v'(x)\, dx + \eta v''(b)$$

a) Vérifier que la forme bilinéaire a est continue et coercive sur $\mathbb{V}$ et que la forme linéaire l est continue sur $\mathbb{V}$.

b) Démontrer que le problème $(\mathcal{P})$ suivant admet une solution unique :

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{l} u \in \mathbb{V}; \forall v \in \mathbb{V} \\ a(u,v) = l(v) \end{array} \right.$$

c) Montrer que si $u \in \mathbb{V}$ est solution de $(\mathcal{P})$ alors

$$J(u) \leq J(w), \forall w \in \mathbb{V}$$

5) Démontrer qu'à tout élément $\varphi \in \mathcal{D}(]a,b[)$ on peut associer un unique élément $v \in \mathbb{V}$ vérifiant l'équation :

$$-v'' = \varphi$$

3) A chaque f de H, on associe la fonction F définie par :

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt, \quad x > 0$$

Montrer que l'on définit ainsi une injection linéaire T de H dans l'espace des fonctions continûment dérivables sur $]0, +\infty[$.

4) Montrer à l'aide d'une intégration par parties et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que pour $f \in H$ et $0 < \alpha < \beta < \infty$, on a :

$$\int_\alpha^\beta (F(x))^2 dx \leq 2\left[\int_\alpha^\beta (F(x))^2 dx \cdot \int_\alpha^\beta (f(x))^2 dx\right]^{1/2} + \alpha F^2(\alpha)$$

En déduire que T opère de H dans H et qu'il est continu pour la norme définie en question 2.

Bon courage.

Université Yahia Farès de Médéa 2012/2013
Faculté des Sciences et de la Technologie
Doctorat LMD "Analyse et Modélisation Mathématiques"
Epreuve : Analyse Numérique
Sujet 1, Durée 2h

<u>*Exercice 1*</u>[8pts]: *On considère le système*

$$Ax = b \quad (1)$$

1 - Soit

$$J : IR^m \to IR$$

définie par

$$J(x) = (Ax, x) - 2(b, x)$$

avec la matrice $A \in M_m(IR)$ dans le système (1) est symétrique, montrer que

$$J'(x) = \text{grad}\, J(x) = 2(Ax - b)$$

2- Si de plus A dans(1) est symétrique définie positive, montrer que la solution du système (1) est celle qui minimise

$$J(y) = (Ay, y) - 2(b, y)$$

(c'est-à-dire toute solution de (1) est solution de $J(x) \leq J(y)$, $\forall y \in IR^m$)

3- Soit la matrice A dans (1) une matrice telle que

$$(Ax, x) \geq \alpha \|x\|^2,\ \alpha > 0\ ,\ \forall x \in \mathbb{C}^m$$

Montrer que le système (1) admet une solution unique et la suite définie par

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \theta(Ax^{(k)} - b) \text{ pour } x^{(0)} \in \mathbb{C}^m$$

converge vers la solution x pour $0 < \theta < \frac{2\alpha}{\|A\|^2}$.

<u>*Exercice 2*</u>[12pts] : *On considére le problème parabolique :*

$$\begin{cases} u_t + u_x - \alpha u_{xx} = 0, & (x,t) \in]0,1[\times]0,T[\\ u(1,t) = u(0,t) = 0, & t \in]0,T[\\ u(x,0) = u_0(x), & x \in]0,1[\end{cases} \qquad (1)$$

où $u_0 \in C([0,1])$ et $\alpha > 0$ sont donnés. On admettra que la solution de (1) existe est qu'elle est suffisamment régulière pour tous les développements de Taylor qu'on voudra effectuer.

1- Ecrire le schéma d'approximation de (1) par différences finies à pas constant (noté h, et tel que $h = \frac{1}{N}$), centré en espace (c.à.d. en approchant $u'(jh)$) par

$$\frac{1}{2h}(u((j+1)h) - u((j-1)h))$$

et $u''(jh)$ par

$$\frac{1}{h^2}(u((j+1)h) - 2u(jh) + u((j-1)h))$$

et avec le schéma d'Euler explicite à pas constant (noté k, avec $k = \frac{T}{M}$) en temps.

2- Montrer que l'erreur de consistance $T_{j,n}$ est majorée par

$$C(k+h^2)$$

où C ne dépend que de la solution exacte de (1).

3- Sous quelle(s) condition(s) sur k et *h a-t'on le résultat de stabilité :*

$$\| u^n \|_\infty \leq \| u^0 \|_\infty, \ \forall n \leq M$$

où u^n désigne la solution approchée au temps $t_n = nk$?(par définition $\| u^n \|_\infty = \max\limits_{j=1,2,\dots N} |u_{j,n}|$)

4- Donner un résultat de convergence pour ce schéma.

Université Yahia Farès de Médéa 2012/2013
Faculté des Sciences et de la Technologie
Doctorat LMD "Analyse et Modélisation Mathématiques"
Epreuve : Analyse Numérique

Sujet 1, Durée 2h

Exercice 1[8pts]: *On considère le système*

$$Ax = b \quad (1)$$

1 - Soit

$$J : IR^m \to IR$$

définie par

$$J(x) = (Ax, x) - 2(b, x)$$

avec la matrice $A \in M_m(IR)$ dans le système (1) est symétrique, montrer que

$$J'(x) = \text{grad}\, J(x) = 2(Ax - b)$$

2- Si de plus A dans(1) est symétrique définie positive, montrer que la solution du système (1) est celle qui minimise

$$J(y) = (Ay, y) - 2(b, y)$$

montée

(c'est-à-dire toute solution de (1) est solution de $J(x) \leq J(y)$, $\forall y \in IR^m$)

3- Soit la matrice A dans (1) une matrice telle que

$$(Ax, x) \geq \alpha \|x\|^2,\ \alpha > 0,\ \forall x \in \mathbb{C}^m$$

Montrer que le système (1) admet une solution unique et la suite définie par

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \theta(Ax^{(k)} - b) \text{ pour } x^{(0)} \in \mathbb{C}^m$$

converge vers la solution x pour $0 < \theta < \frac{2\alpha}{\|A\|^2}$.

Exercice 2[12pts] : *On considère le problème parabolique :*

$$\begin{cases} u_t + u_x - \alpha u_{xx} = 0, & (x,t) \in]0,1[\times]0,T[\\ u(1,t) = u(0,t) = 0, & t \in]0,T[\\ u(x,0) = u_0(x), & x \in]0,1[\end{cases} \quad (1)$$

où $u_0 \in C([0,1])$ et $\alpha > 0$ sont donnés. On admettra que la solution de (1) existe est qu'elle est suffisamment régulière pour tous les développements de Taylor qu'on voudra effectuer.

1- Ecrire le schéma d'approximation de (1) par différences finies à pas constant (noté h, et tel que $h = \frac{1}{N}$), centré en espace (c.à.d. en approchant $u'(jh)$) par

$$\frac{1}{2h}(u((j+1)h) - u((j-1)h))$$

et $u''(jh)$ par

$$\frac{1}{h^2}(u((j+1)h) - 2u(jh) + u((j-1)h))$$

et avec le schéma d'Euler explicite à pas constant (noté k, avec $k = \frac{T}{M}$) en temps.

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de M'sila **M'sila le 08 décembre 2012**
Faculté de Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques

Concours pour le Doctorat LMD
Examen d'analyse numérique

Exercice 01(12pts)

On appelle méthode itérative de résolution d'un système linéaire $Ax = b$, une méthode qui consiste à construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir d'une solution donnée x_0 quelconque, censsée converger vers x solution exacte du système $Ax = b$, quand n tend vers ∞. Parmis les méthodes itératives les plus importantes c'est la méthode du *Gradient Conjugué*, où la matrice A doit être *Symètrique Définie Positive.*C'est donc une amélioration des méthodes itératives précédentes dans laquelle on cherche un nouveau itéré le long des nouvelles directions $\{p_0, p_1, p_2\}$. L'algorithme de cette méthode se compose en deux étapes. La première étape consiste à minimiser la fonctionnelle quadratique correspondante $J(x)$ au système linéaire $Ax = b$ où $x \in \mathbb{R}^n$. Dans la deuxième étape on cherche la nouvelle direction p_{k+1}, le nombre β_k est calculé afin que la quantité $\|x - x_k\|_A$ [1], soit la plus petite possible. Etant donné une matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. La matrice A est-elle *Symètrique Définie Positive (SDP)*?
2. Trouver deux vecteurs p_1, p_2 qui sont, deux à deux, $A-$*conjugués* avec le vecteur $p_0 = (1,0,0)^t$. Que peut-on dire sur l'ensemble $\{p_0, p_1, p_2\}$ dans l'space $\mathbb{R}^3$?
3. Appliquer la méthode du *Gradient Conjugué* au système $Ax = b$, avec second membre $b = (1,0,1)^t$.
4. Citer deux raisons principales pour lesquelles on doit utiliser les conditionneurs.

n

[1] $\|\cdot\|_A$ désigne la norme d'énergie du système $Ax = b$.

Université de M'sila
Faculté de Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques

Concours pour le Doctorat LMD
Examen d'analyse numérique

Exercice 01(12pts)

On appelle méthode itérative de résolution d'un système linéaire $Ax = b$, une méthode qui consiste à construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir d'une solution donnée x_0 quelconque, censsée converger vers x solution exacte du système $Ax = b$, quand n tend vers ∞. Parmis les méthodes itératives les plus importantes c'est la méthode du *Gradient Conjugué*, où la matrice A doit être *Symétrique Définie Positive*.C'est donc une amélioration des méthodes itératives précédentes dans laquelle on cherche un nouveau itéré le long des nouvelles directions $\{p_0, p_1, p_2\}$. L'algorithme de cette méthode se compose en deux étapes. La première étape consiste à minimiser la fonctionnelle quadratique correspondante $J(x)$ au système linéaire $Ax = b$ où $x \in \mathbb{R}^n$. Dans la deuxième étape on cherche la nouvelle direction p_{k+1}, le nombre β_k est calculé afin que la quantité $\|x - x_k\|_A$ [1], soit la plus petite possible. Etant donné une matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. La matrice A est-elle *Symètrique Définie Positive (SDP)*?
2. Trouver deux vecteurs p_1, p_2 qui sont, deux à deux, A – *conjugués* avec le vecteur $p_0 = (1,0,0)^t$. Que peut-on dire sur l'ensemble $\{p_0, p_1, p_2\}$ dans l'space $\mathbb{R}^3$?

Appliquer la méthode du *Gradient Conjugué* au système $Ax = b$, avec second membre $b = (1,0,1)^t$.

Citer deux raisons principales pour lesquelles on doit utiliser les conditionneurs.

$_A$ désigne la norme d'énergie du système $Ax = b$.

5. La méthode du *Gradient Conjugué* est une méthode itérative, mais elle converge vers la solution exacte en un nombre fini d'itérations. Expliquer pourquoi ?
6. Il nous paraît paradoxal d'étudier la vitesse de convergence d'une méthode qui se termine en un nombre fini ditérations. Calculer donc le rapport : $\frac{\|x - x_k\|_A}{\|x - x_0\|_A}$. Que peut-on déduire ?

<u>Exercice 02</u>(08pts) :

Soit le problème suivant

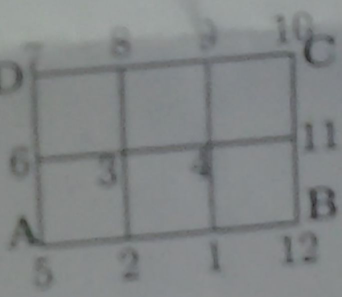
$$\begin{cases} -\Delta u = & 2 \text{ , } \Omega = ABCD \\ u = & 1 \text{ , sur } \Sigma_1 = ADCB \\ \frac{\partial u}{\partial x} = & 1 \text{ , sur } \Sigma_2 = AB \end{cases}$$

1-Ecrire la formule de Green.

2-Ecrire le problème variationnel (faible).

3- Déterminer les fonctions de bases :$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ et leurs gradients.

4-Ecrire le système discrét.



Bonne chance

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Mila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques

Mila le 08 décembre 2012

Concours pour le Doctorat LMD
Examen d'analyse fonctionnelle

<u>**Exercice 1**</u> (06pts)
Soit E un espace de Banach et I l'opérateur identité défini de E dans E
Etudier les cas suivants

La compacité de l'opérateur identique I dans le cas où E est de dimension finie

La compacité de l'opérateur identique I dans le cas où E est de dimension infinie

<u>**Exercice 2**</u> (04pts)
Former l'équation intégrale correspondant à l'équation différentielle

$$y'' + xy' + x^2 y = 0,$$

aux conditions initiales

$$y(0) = 1; \quad y'(0) = 1.$$

Exercice 3 (10pts)

Quelques notations:

- $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est la classe des fonctions C^∞ à décroissance rapide sur $\mathbb{R}$.
- $\widehat{\psi}$ est la transformée de Fourier de ψ, supp= support.
- $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est l'espace des distributions sur $\mathbb{R}$.

Soit $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que supp $\widehat{\psi} \subset [\frac{1}{4}, 3]$. On pose $\psi_j(x) = 2^j \psi(2^j x)$, $j \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$.

Soit f une fonction donnée. On pose $T_f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi_j * f$.

(1) On suppose que $\left(\int_{\mathbb{R}} |T_f(x)|^2 \, dx\right)^{1/2} < +\infty$. Démontrer que $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(2) Démontrer que la somme $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}_j(\xi)$ est formée d'un nombre fini de termes

non nuls, à trouver ce nombre.

(3) Calculer $\widehat{T}_f$.

(4) Déduire: $\exists c > 0$ telle que $\|T_f\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq c\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$.

(5) Déduire que

$$\left|\frac{d^m}{d\xi^m}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}_j(\xi)\right)\right| \leq c|\xi|^{-m}.$$

Faculté de Mathématiques.
USTHB.
Laboratoire AMNEDP.

Spécialité EDP.
Concours d'accès au Doctorat LMD.
Epreuve 1 (durée 2 h).

02 Décembre 2012.

Exercice 1 (8 points)

Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles.
Pour $f \in E$, on pose :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$$

1) Montrer que l'on définit ainsi une norme sur E. On munit E de cette norme.
On considère l'application Φ définie sur E par :

$$\Phi(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$$

2) Montrer que $\Phi(f)$ est dans E.
3) Montrer que Φ est linéaire continue et $\|\Phi\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1$, où

$$\|\Phi\|_{\mathcal{L}(E)} = \sup_{f \in E,\, f \neq 0} \frac{\|\Phi(f)\|_1}{\|f\|_1} = \sup_{f \in E,\, \|f\|_1 \leq 1} \|\Phi(f)\|_1 = \sup_{f \in E,\, \|f\|_1 = 1} \|\Phi(f)\|_1 .$$

4) Pour $n \geq 0$, on considère f_n, l'élément de E défini par :

$$f_n(x) = ne^{-nx}, \; x \in [0,1].$$

Calculer $\|f_n\|_1$ et $\|\Phi(f_n)\|_1$. En déduire $\|\Phi\|_{\mathcal{L}(E)}$.

Exercice 2 (12 points)

Soit H, l'espace des fonctions numériques continues sur $[0,+\infty[$, telles que $\int_0^\infty |f(t)|^2\,dt < +\infty$.

1) Montrer que l'application définie de $H \times H$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$$(f,g) \mapsto (f,g) = \int_0^\infty f(t)g(t)dt,$$

est un produit scalaire.

2) En utilisant la suite de fonctions

$$f_n(t) = \begin{cases} 1, & si \quad 0 < t < 1 - \frac{1}{n} \\ -nt + n, & si \quad 1 - \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \\ 0, & si \quad t \geq 1. \end{cases}$$

montrer que H muni de la norme $\|f\| = (\int_0^\infty |f(t)|^2\,dt)^{1/2}$

n'est pas complet (on dit dans ce cas que H est un espace préhilbertien !)

3) A chaque f de H, on associe la fonction F définie par :

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt, \quad x > 0$$

Montrer que l'on définit ainsi une injection linéaire T de H dans l'espace des fonctions continûment dérivables sur $]0, +\infty[$.

4) Montrer à l'aide d'une intégration par parties et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que pour $f \in H$ et $0 < \alpha < \beta < \infty$, on a :

$$\int_\alpha^\beta (F(x))^2 dx \leq 2\left[\int_\alpha^\beta (F(x))^2 dx \cdot \int_\alpha^\beta (f(x))^2 dx\right]^{1/2} + \alpha F^2(\alpha)$$

En déduire que T opère de H dans H et qu'il est continu pour la norme définie en question 2.

Bon courage.

U.S.T.H.B

Faculté des Mathématiques

Département d'analyse, Laboratoire AMNEDP.

Concours d'entrée en doctorat : Analyse E.D.P. (02 décembre 2012)

Deuxième épreuve. Durée : deux heures

Soient a et b $(a < b)$ deux réels fixés. On rappelle que l'espace $L^2(]a,b[)$ des (classes) de fonctions réelles définies sur $]a,b[$ et de carré sommable pour la mesure de Lebesgue est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(f,g) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx.$$

L'espace de Sobolev $H^1(]a,b[)$ est défini par

$$H^1(]a,b[) = \left\{ u \in L^2(]a,b[) \,;\, u' \in L^2(]a,b[) \right\}$$

et est muni de la norme définie par

$$\|u\|^2_{H^1(]a,b[)} = \|u\|^2_{L^2(]a,b[)} + \|u'\|^2_{L^2(]a,b[)}$$

(où u' désigne la dérivée distribution de u).

On note $H_0^1(]a,b[)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(]a,b[)$ (l'ensemble des fonctions réelles sur $]a,b[$, indéfiniment dérivables et à support compact) dans $H^1(]a,b[)$.

1) On considère l'espace vectoriel

$$\mathrm{V} = \left\{ v \in H_0^1(]a,b[) ; v''' \in L^2(]a,b[) \right\}$$

et on le munit de la norme canonique définie par

$$\|v\|^2_{\mathrm{V}} = \|v\|^2_{H_0^1(]a,b[)} + \|v'''\|^2_{L^2(]a,b[)}$$

Démontrer que V est un espace de Hilbert (montrer juste la complétude).

2) Soit S une distribution sur $]a,b[$ à dérivée S' appartenant à $L^2(]a,b[)$. Pour tout x dans $]a,b[$ on pose

$$v(x) = \int_a^x S'(t)\, dt.$$

a) Calculer la dérivée de la distribution v et en déduire que S est dans $L^2(]a,b[)$.
b) Montrer que si u est dans V alors u'' est dans $L^2(]a,b[)$.
3) Soient g donnée dans $H_0^1(]a,b[)$ et η un réel fixé. Pour v dans V, on pose

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_a^b \left(|v'(x)|^2 + |v'''(x)|^2\right) dx - \int_a^b g'(x)\, v'(x)\, dx - \eta v''(b).$$

a) Justifier l'existence de $v''(b)$.

b) Démontrer que la fonction J est différentiable sur V et calculer $dJ(u)\,v$ (la valeur en v de la différentielle de J en u).

c) Montrer que si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{D}(]a,b[)$ convergeant vers 0 alors la suite $(dJ(u)\,\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

d) Expliciter la distribution T définie par

$$\langle T, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(]a,b[)\times\mathcal{D}(]a,b[)} = dJ(u)\,\varphi.$$

4) On pose

$$a(u,v) = \int_a^b \left(u'(x)\,v'(x) + u'''(x)\,v'''(x)\right) dx$$

$$l(v) = \int_a^b g'(x)\, v'(x)\, dx + \eta v''(b)$$

a) Vérifier que la forme bilinéaire a est continue et coercive sur V et que la forme linéaire l est continue sur V.

b) Démontrer que le problème (P) suivant admet une solution unique :

$$(P)\begin{cases} u \in V, \forall v \in V \\ a(u,v) = l(v) \end{cases}$$

c) Montrer que si $u \in V$ est solution de (P) alors

$$J(u) \leq J(v), \forall v \in V$$

5) Démontrer qu'à tout élément $\varphi \in \mathcal{D}(]a,b[)$ on peut associer un unique élément $v \in V$ vérifiant l'équation :

$$-v'' = \varphi$$

et en déduire que la solution u du problème $(\mathcal{P})$ vérifie:

$$u^{(4)} + u = g \text{ dans } \mathcal{D}'(]a,b[)$$

6) **Justifier l'existence de** $u^{(3)}(a)$ et $u^{(3)}(b)$.

7) Démontrer que la solution u du problème $(\mathcal{P})$ vérifie les conditions aux limites:

$$\begin{cases} u^{(3)}(a) = 0, \\ u^{(2)}(b) = \eta. \end{cases}$$

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Msila **Msila le 08 décembre 2012**
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques

Concours pour le Doctorat LMD
Examen d'analyse fonctionnelle

Exercice 1 (06pts)
Soit E un espace de Banach et I l'opérateur identité défini de E dans E
Etudier les cas suivants
La compacité de l'opérateur identique I dans le cas où E est de dimension finie
La compacité de l'opérateur identique I dans le cas où E est de dimension infinie

Exercice 2 (04pts)
Former l'équation intégrale correspondant à l'équation différentielle

$$y'' + xy' + x^2y = 0,$$

aux conditions initiales

$$y(0) = 1; \quad y'(0) = 1.$$

a) Calculer la dérivée de la distribution v et en déduire que S est dans $L^2(]a,b[)$.

b) Montrer que si u est dans $\mathbb{V}$ alors u'' est dans $L^2(]a,b[)$.

3) Soient g donnée dans $H_0^1(]a,b[)$ et η un réel fixé. Pour v dans $\mathbb{V}$, on pose

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_a^b \left(|v'(x)|^2 + |v'''(x)|^2\right) dx - \int_a^b g'(x)\, v'(x)\, dx - \eta v''(b).$$

a) Justifier l'existence de $v''(b)$.

b) Démontrer que la fonction J est différentiable sur $\mathbb{V}$ et calculer $dJ(u)\,v$ (la valeur en v de la différentielle de J en u).

c) Montrer que si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{D}(]a,b[)$ convergeant vers 0 alors la suite $(dJ(u)\,\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

d) Expliciter la distribution T définie par

$$\langle T, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(]a,b[)\times\mathcal{D}(]a,b[)} = dJ(u)\,\varphi.$$

4) On pose

$$a(u,v) = \int_a^b \left(u'(x)\, v'(x) + u'''(x)\, v'''(x)\right) dx$$

$$l(v) = \int_a^b g'(x) \,.v'(x)\, dx + \eta v''(b)$$

a) Vérifier que la forme bilinéaire a est continue et coercive sur $\mathbb{V}$ et que la forme linéaire l est continue sur $\mathbb{V}$.

b) Démontrer que le problème $(\mathcal{P})$ suivant admet une solution unique :

$$(\mathcal{P})\begin{cases} u \in \mathbb{V}; \forall v \in \mathbb{V} \\ a(u,v) = l(v) \end{cases}$$

c) Montrer que si $u \in \mathbb{V}$ est solution de $(\mathcal{P})$ alors

$$J(u) \le J(w),\, \forall w \in \mathbb{V}$$

5) Démontrer qu'à tout élément $\varphi \in \mathcal{D}(]a,b[)$ on peut associer un unique élément $v \in \mathbb{V}$ vérifiant l'équation :

$$-v'' = \varphi$$

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de M'sila
Faculté de Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques

M'sila le 08 décembre 2012

Concours pour le Doctorat LMD
Examen d'analyse numérique

Exercice 01(12pts)

On appelle méthode itérative de résolution d'un système linéaire $Ax = b$, une méthode qui consiste à construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir d'une solution donnée x_0 quelconque, censsée converger vers x solution exacte du système $Ax = b$, quand n tend vers ∞. Parmis les méthodes itératives les plus importantes c'est la méthode du *Gradient Conjugué*, où la matrice A doit être *Symètrique Définie Positive.*C'est donc une amélioration des méthodes itératives précédentes dans laquelle on cherche un nouveau itéré le long des nouvelles directions $\{p_0, p_1, p_2\}$. L'algorithme de cette méthode se compose en deux étapes. La première étape consiste à minimiser la fonctionnelle quadratique correspondante $J(x)$ au système linéaire $Ax = b$ où $x \in \mathbb{R}^n$. Dans la deuxième étape on cherche la nouvelle direction p_{k+1}, le nombre β_k est calculé afin que la quantité $\|x - x_k\|_A$ [1], soit la plus petite possible. Etant donné une matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. La matrice A est-elle *Symètrique Définie Positive (SDP)*?
2. Trouver deux vecteurs p_1, p_2 qui sont, deux à deux, $A-conjugués$ avec le vecteur $p_0 = (1,0,0)^t$. Que peut-on dire sur l'ensemble $\{p_0, p_1, p_2\}$ dans l'space $\mathbb{R}^3$?
3. Appliquer la méthode du *Gradient Conjugué* au système $Ax = b$, avec second membre $b = (1,0,1)^t$.
4. Citer deux raisons principales pour lesquelles on doit utiliser les conditionneurs.

$\overset{n}{\longmapsto}$

[1] $\|.\|_A$ désigne la norme d'énergie du système $Ax = b$.

5. La méthode du *Gradient Conjugué* est une méthode itérative, mais elle converge vers la solution exacte en un nombre fini d'itérations. Expliquer pourquoi ?

6. Il nous paraît paradoxal d'étudier la vitesse de convergence d'une méthode qui se termine en un nombre fini ditérations. Calculer donc le rapport : $\frac{\|x-x_k\|_A}{\|x-x_0\|_A}$. Que peut-on déduire ?

<u>Exercice</u> <u>02</u>(08pts) :

Soit le problème suivant

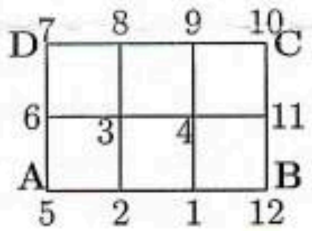
$$\begin{cases} -\Delta u = & 2\ , \Omega = ABCD \\ u = & 1\ ,\ \text{sur}\ \Sigma_1 = ADCB \\ \frac{\partial u}{\partial x} = & 1\ ,\ \text{sur}\ \Sigma_2 = AB \end{cases}$$

1-Ecrire la formule de Green.

2-Ecrire le problème variationnel (faible).

3- Déterminer les fonctions de bases :$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ et leurs gradients.

4-Ecrire le système discrét.



Bonne chance

Exercice 3 (10pts)

Quelques notations:

- $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est la classe des fonctions C^∞ à décroissance rapide sur $\mathbb{R}$.
- $\widehat{\psi}$ est la transformée de Fourier de ψ, supp= support.
- $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est l'espace des distributions sur $\mathbb{R}$.

Soit $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que supp $\widehat{\psi} \subset [\frac{1}{4}\,,\, 3]$. On pose $\psi_j(x) = 2^j\,\psi(2^j x)$, $j \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$.

Soit f une fonction donnée. On pose $T_f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi_j * f$.

(1) On suppose que $\left(\int_{\mathbb{R}} |T_f(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} < +\infty$. Démontrer que $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(2) Démontrer que la somme $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}_j(\xi)$ est formée d'un nombre fini de termes non nuls, à trouver ce nombre.

(3) Calculer $\widehat{T_f}$.

(4) Déduire: $\exists c > 0$ telle que $\|T_f\|_{L^2(\mathbb{R})} \le c\,\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$.

(5) Déduire que

$$\left|\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\xi^m}\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}_j(\xi)\Big)\right| \le c\,|\xi|^{-m}.$$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Ferhat Abbas -Sétif
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

جامعة فرحات عباس-سطيف
كلية العلوم
قسم الرياضيات

EXAMEN D'ANALYSE FONCTIONNELLE CONCOURS D'ACCÈS À LA FORMATION DOCTORALE LMD

Exercice 1.
Soit K une partie de $\mathbb{R}^n$, compacte, convexe, symétrique par rapport à 0 et telle que 0 est un point intérieur. Soit $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$p(x) = \inf\{t > 0 \,/ \frac{x}{t} \in K\}.$$

1) Montrer que $p(x) = 0$ ssi $x = 0$.
2) Pour x non nul montrer que $\frac{x}{p(x)} \in K$.
3) Pour x non nul et $t > 0$ montrer que $p(t.x) = tp(x)$. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $p(tx) = |t|p(x)$.
4) Montrer que si x et y sont non nuls $\frac{x+y}{p(x)+p(y)} \in K$.
5) Conclure.
6) Montrer que K est la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ pour la norme p.

Exercice 2.
Soit $K \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2)$. Montrer que l'opérateur $T_K : \mathbf{L}^2(\mathbb{R}) \to \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ défini par

$$T_K(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x,y)f(y)dy$$

est bien défini et borné.
Déterminer T_K^* l'adjoint de T_K.

Exercice 3.
Soit E une partie compacte d'un espace vectoriel normé, et $f : E \to E$ une fonction vérifiant

$$\forall\, x, y \in E,\ (x \neq y) \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

Montrer que f admet un unique point fixe.

Date: 05/10/2013.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Ferhat Abbas -Sétif
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

جامعة فرحات عباس-سطيف
كلية العلوم
قسم الرياضيات

Université de Sétif 1
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année scolaire 2013-2014

Octobre 2013 - Durée 1h30mn

Concours d'Accès en Doctorat LMD 2013-2014

Épreuve EDP

Exerxixe 1:(2pts)

Trouver la solution $u(x,y)$ de l'équation aux dérivées partielles.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Exerxixe 2:(6pts)

Déterminer la solution générale de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = 4$$

et la surface intégrale qui contient la courbe (C) d'équations

$$(C) : \begin{cases} y^2 = z \\ x = 0 \end{cases}$$

Problème:(12pts)

D'après la méthode de séparation des variables combinée avec les séries de Fourier. Trouver la solution $u(x,t)$ de l'équation

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \qquad \forall t > 0 \qquad (1)$$

avec les conditions aux limites

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t), \qquad \forall t > 0 \qquad (2)$$

et avec la condition initiale

$$u(x,0) = f(x) \qquad 0 \le x \le \pi \qquad (3)$$

$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & si \quad \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$$