

Module: Codage et représentation de
l'information

1^{ère} MI S1

Algèbre de Boole

Taha Zerrouki

Taha.zerrouki@gmail.com

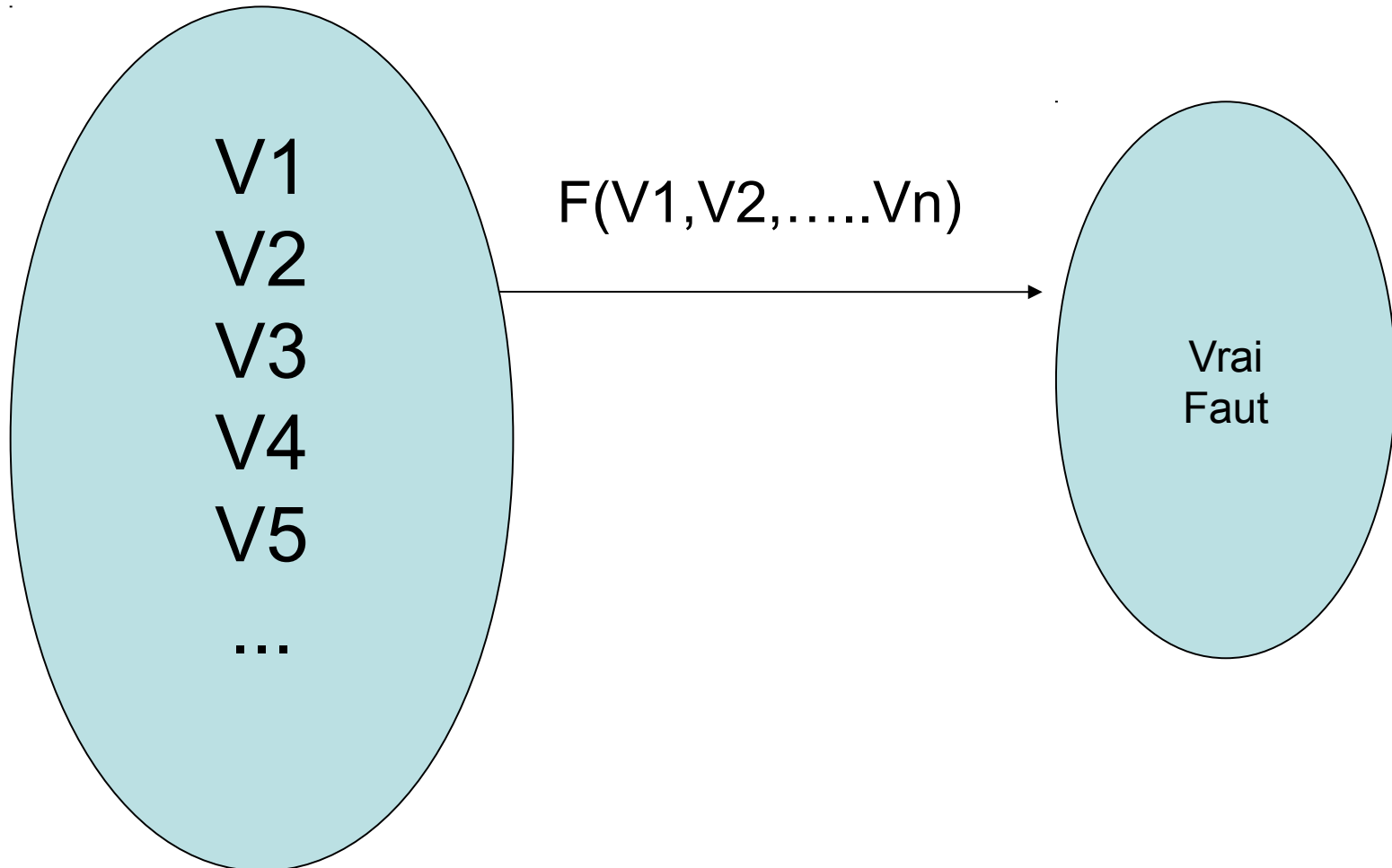
Plan

- Fonctions logiques

Fonctions logiques

الدوال المنطقية

Fonction logique



Fonction logique

$$F(A, B) = \bar{A}B + A\bar{B}$$

$$F(A, B) = 0 \text{ ou } 1$$

Fonction logique

$$F(A, B) = \bar{A}B + (A+\bar{B})$$

Table de vérité

$$F(0,0) = \bar{0}.0 + 0.\bar{0} =$$

$$1.0 + 0.1 = 0+0=0$$

$$F(0,1) = \bar{0}.1 + 0.\bar{1} =$$

$$1.1 + 0.0 = 1+0=1$$

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Exercise

$$F(A,B,C) = (\overline{A.B}).(C+B) + A.\overline{B}.C$$

Calculer $F(0, 1, 1)$

Exercise

$$F(A,B,C) = (\overline{A.B}).(C+B) + A.\overline{B}.C$$

$$\text{Calculer } F(0, 1, 1) = (\overline{0.1}).(1+1) + 0.\overline{1}.1$$

$$= (\overline{0}).(1) + 0.\overline{0}.1$$

$$= 1.1 + 0.1.1$$

$$= 1 + 0$$

$$= 1$$

Table de vérité

- Tracer la table de vérité de $F(A,B,C)$

$$F(A,B,C) = (\overline{A \cdot B}) \cdot (C + B) + A \cdot \overline{B} \cdot C$$

Solution

$$F(A,B,C) = (\overline{A \cdot B}) \cdot (C+B) + A \cdot \overline{B} \cdot C$$

$$F(0,0,0) = (\overline{0 \cdot 0}) \cdot (0+0) + 0 \cdot \overline{0} \cdot 0 = 0$$

$$F(0,0,1) = (\overline{0 \cdot 0}) \cdot (1+0) + 0 \cdot \overline{0} \cdot 1 = 1$$

$$F(0,1,0) = (\overline{0 \cdot 1}) \cdot (0+1) + 0 \cdot \overline{1} \cdot 0 = 1$$

$$F(0,1,1) = (\overline{0 \cdot 1}) \cdot (1+1) + 0 \cdot \overline{1} \cdot 1 = 1$$

$$F(1,0,0) = (\overline{1 \cdot 0}) \cdot (0+0) + 1 \cdot \overline{0} \cdot 0 = 0$$

$$F(1,0,1) = (\overline{1 \cdot 0}) \cdot (1+0) + 1 \cdot \overline{0} \cdot 1 = 1$$

$$F(1,1,0) = (\overline{1 \cdot 1}) \cdot (0+1) + 1 \cdot \overline{1} \cdot 0 = 0$$

$$F(1,1,1) = (\overline{1 \cdot 1}) \cdot (1+1) + 1 \cdot \overline{1} \cdot 1 = 0$$

A	B	C		F
0	0	0		0
0	0	1		1
0	1	0		1
0	1	1		1
1	0	0		0
1	0	1		1
1	1	0		0
1	1	1		0

2ème forme canonique

Le produit des sommes

$$F(a,b,c) = (a+b+c)(a'+b+c)(a'+b'+c)(a'+b'+c')$$

A	B	C		F
0	0	0		0
0	0	1		1
0	1	0		1
0	1	1		1
1	0	0		0
1	0	1		1
1	1	0		0
1	1	1		0

Question ?

Comment on peut écrire la fonction d'une manière plus pratique

$$F(a,b,c) = (\overline{a.b})(c+b) + a\overline{b}c$$

A	B	C		F
0	0	0		0
0	0	1		1
0	1	0		1
0	1	1		1
1	0	0		0
1	0	1		1
1	1	0		0
1	1	1		0

Forme canonique

On utilisant la table de vérité on peut écrire

$$F(a,b,c) = a'b'c + a'bc' + a'bc + ab'c$$

A	B	C		F
0	0	0		0
0	0	1		1
0	1	0		1
0	1	1		1
1	0	0		0
1	0	1		1
1	1	0		0
1	1	1		0

2ème forme canonique

Le produit des sommes

$$F(a,b,c) = (a+b+c)(a'+b+c)(a'+b'+c)(a'+b'+c')$$

A	B	C		F
0	0	0		0
0	0	1		1
0	1	0		1
0	1	1		1
1	0	0		0
1	0	1		1
1	1	0		0
1	1	1		0

الشكل القانوني Forme canonique

- On appelle **forme canonique** d'une fonction la forme où chaque **terme** de la fonction comporte **toutes les variables**.

نسمي الشكل القانوني لدالة منطقية الشكل الذي كل حد فيه كل المتغيرات

- Exemple :

$$F(A, B, C) = AB\bar{C} + A\bar{C}B + \bar{A}BC$$

Première forme canonique

الشكل القانوني الأول

- **Première forme canonique** (forme disjonctive) :
somme de produits
- C'est la somme des min termes.

الشكل القانوني الأول (الشكل المفصول) مجموع
الجداءات : مجموع الحدود الدنيا

$$F(A, B, C) = \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot B \cdot C$$

- Cette forme est la forme **la plus utilisée**
هذه الشكل أكثر استعمالاً.

Deuxième forme canonique

الشكل القانوني الثاني

- **Deuxième forme canonique** (conjonctive): produit de sommes
- Le produit des max termes

الشكل القانوني الثاني (الموصول) جداء المجاميع
جداء الحدود القصوى

$$F(A,B,C) = (A + B + C) (A + B + \bar{C})(A + \bar{B} + C) (\bar{A} + B + C)$$

1ère forme canonique

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0



$\bar{A} \bar{B} C$ minterm

$\bar{A} B \bar{C}$ minterm

$\bar{A} B C$ minterm

$A \bar{B} C$ minterm

2ème forme canonique

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0



$A+B+C$ maxterm



$\bar{A} + B + C$ maxterm



$\bar{A} + \bar{B} + C$ maxterm



$\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$ maxterm

2ème forme canonique

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0



$A+B+C$ maxterm

$\bar{A} \bar{B} C$ minterm

$\bar{A} B \bar{C}$ minterm

$\bar{A} B C$ minterm

$\bar{A} + B + C$ maxterm

$A \bar{B} C$ minterm

$\bar{A} + \bar{B} + C$ maxterm

$\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$ maxterm

Exercice :

A	B	C		F
0	0	0		0
0	0	1		0
0	1	0		0
0	1	1		1
1	0	0		0
1	0	1		1
1	1	0		1
1	1	1		1

Donner les formes canoniques de F

Solution

A	B	C		S	
0	0	0		0	→ $A + B + C$: max terme
0	0	1		0	→ $A + B + \bar{C}$: max terme
0	1	0		0	→ $A + \bar{B} + C$: max terme
0	1	1		1	→ $\bar{A} . B . C$: min terme
1	0	0		0	→ $\bar{A} + B + C$: max terme
1	0	1		1	→ $A . \bar{B} . C$: min terme
1	1	0		1	→ $A . B . \bar{C}$: min terme
1	1	1		1	→ $A . B . C$: min terme

Solution

1ère forme canonique

$$F(A,B,C) = \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC$$

2ème forme canonique

$$F(A,B,C) = (A+B+C)(A+B+\bar{C})(A+\bar{B}+C)(\bar{A}+B+C)$$

Simplification

تبسيط



Question?

Est ce qu'on peut donner une forme plus simple pour une fonction logique?

هل يمكن كتابة الدالة المنطقية بشكل أبسط؟

$$F(A,B,C) = \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC$$

Simplification?
تبسيط جبري Algébrique



$$F(A,B,C) = \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC$$
$$= ?$$

Simplification Algébrique



تبسيط جبري

$$\begin{aligned} F(A,B,C) &= \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC \\ &= (\bar{A}BC + ABC) + (A\bar{B}C + ABC) + (AB\bar{C} + ABC) \\ &= (\bar{A}BC + ABC) + (A\bar{B}C + ABC) + (AB\bar{C} + ABC) \\ &= BC(\bar{A} + A) + AC(B + B) + AB(\bar{C} + C) \\ &= BC + AC + AB \end{aligned}$$

Simplification?
graphique



Tableau de Karnaugh

Simplification par la table de Karnaugh

Les termes adjacents

- Examinons l'expression suivante :

$$A \cdot B + A \cdot \bar{B}$$

$$AB + A\bar{B} = A(B + \bar{B}) = A$$

- Ces termes sont **dites adjacents**. حدود متجاورة

Exemple de termes adjacents

Ces termes sont adjacents

$$A.B + \overline{A}.B = B$$

$$A.B.C + A.\overline{B}.C = A.C$$

$$A.B.C.D + A.B.\overline{C}.D = A.B.D$$

Ces termes ne sont pas adjacents

$$A.B + \overline{A}.\overline{B}$$

$$A.B.C + A.\overline{B}.\overline{C}$$

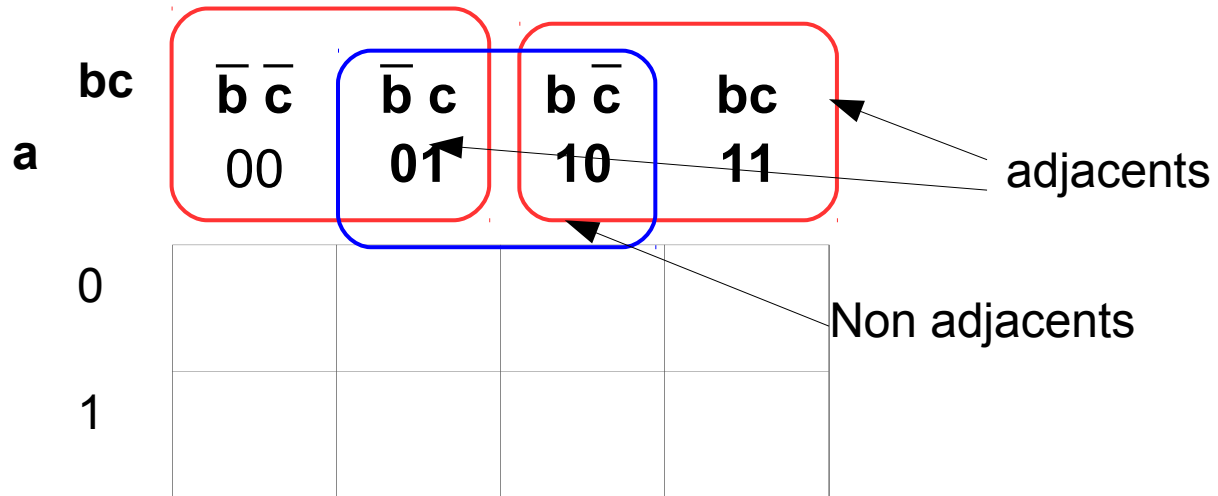
$$A.B.C.D + \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.D$$

Table de karnaugh

- La méthode de Karnaugh se base sur la **règle précédente**.
- Méthode **graphique** pour detecter tous les termes **adjacents**

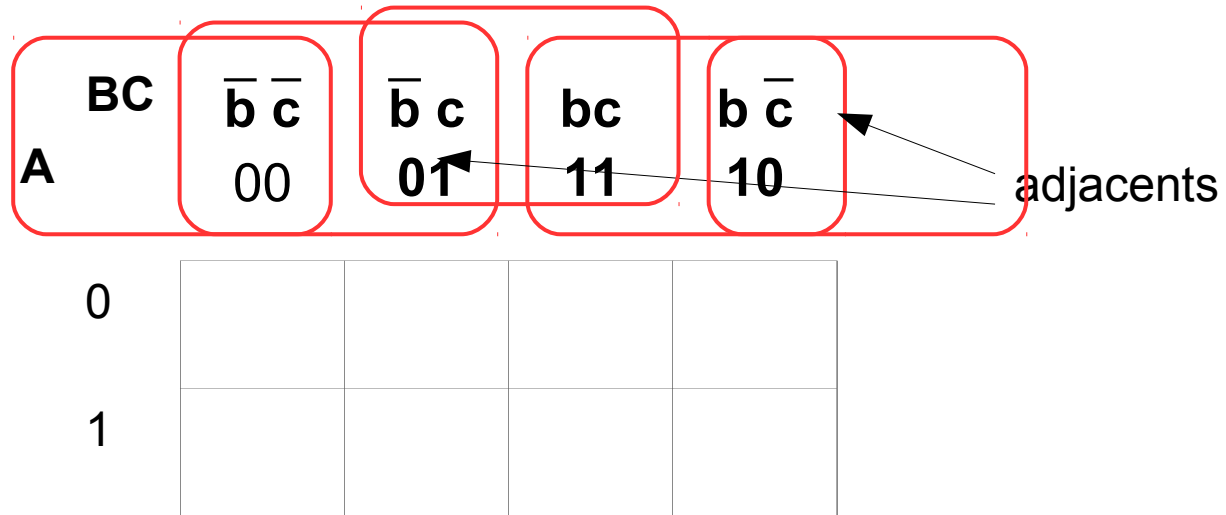
جدول كارنو يعتمد على قاعدة التجاور، وهو طريقة رسومية لاكتشاف الحدود المتجاورة

Tableau de Karnaugh



Tableaux à 3 variables

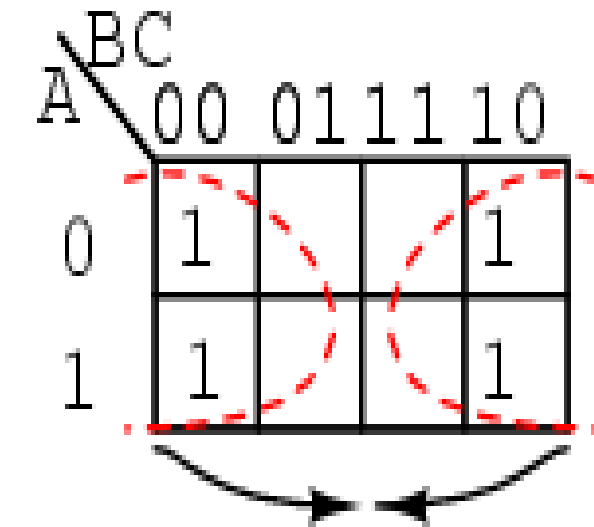
Tableau de Karnaugh



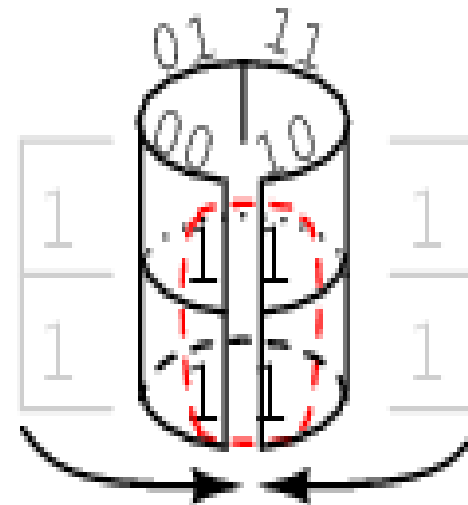
Tableaux à 3 variables

Tableau de Karnaugh

$$\text{Out} = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C}$$

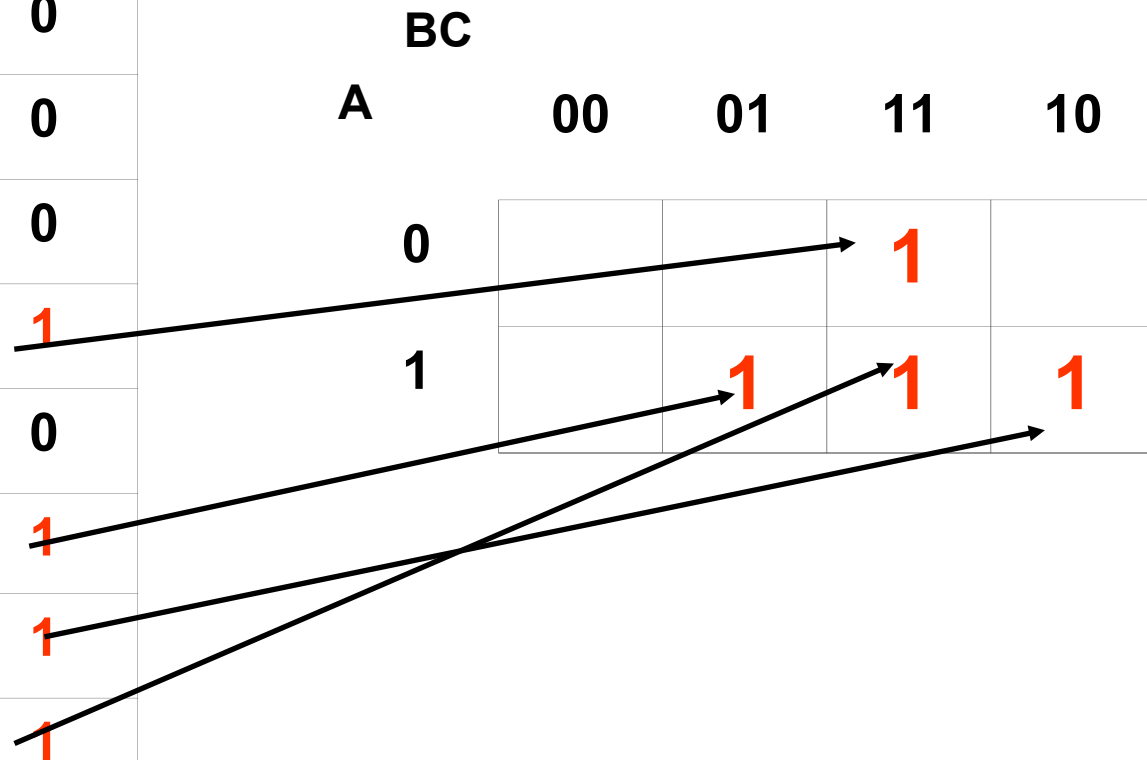


$$\text{Out} = \overline{C}$$

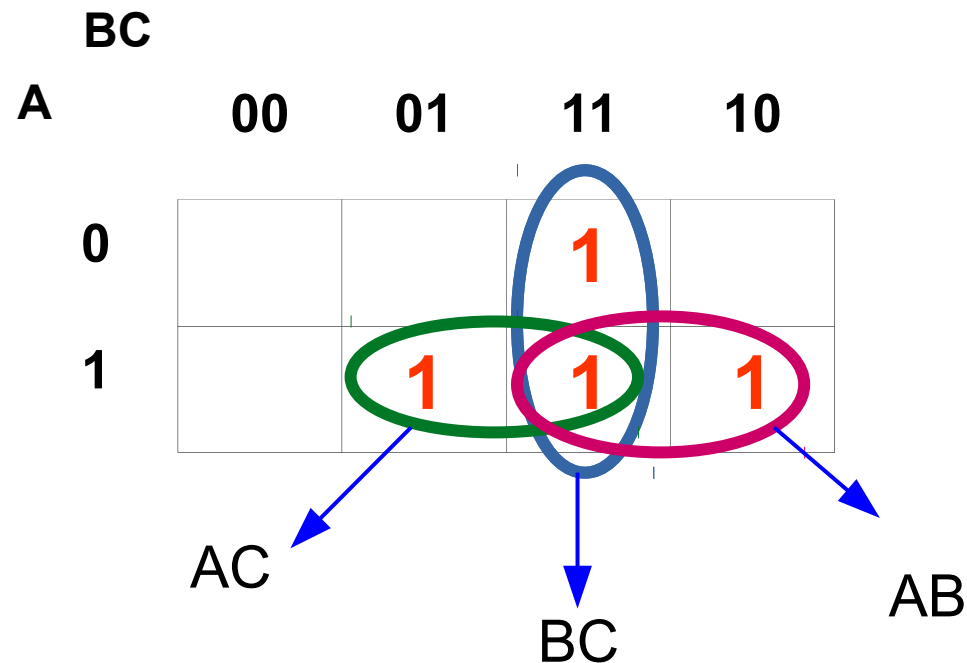


TV => Karnaugh

A	B	C		S
0	0	0		0
0	0	1		0
0	1	0		0
0	1	1		1
1	0	0		0
1	0	1		1
1	1	0		1
1	1	1		1



Simplification de Karnaugh

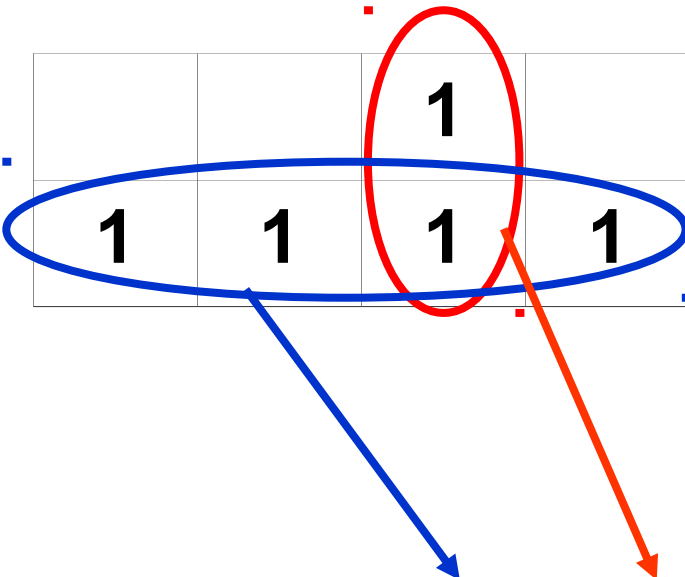


Example : 3 variables

AB					
C		00	01	11	10
0				1	
1	1	1	1	1	1

Example 1 : 3 variables

AB		00	01	11	10
C	0			1	
	1	1	1	1	1



$$F(A, B, C) = C + AB$$

Exercice : simplifier

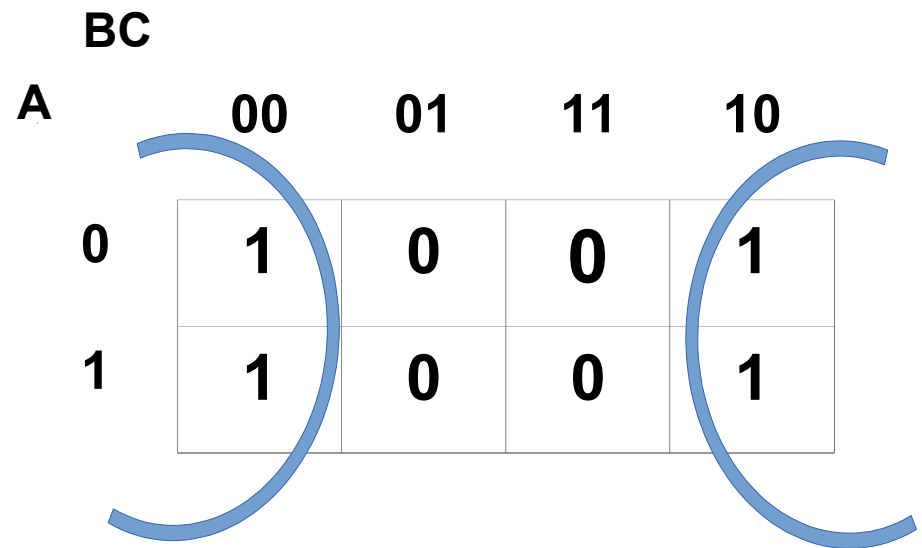
A	B	C		S
0	0	0		1
0	0	1		1
0	1	0		0
0	1	1		0
1	0	0		1
1	0	1		1
1	1	0		0
1	1	1		0

		BC			
A		00	01	11	10
0					
1					

Solution

A	B	C		S
0	0	0		1
0	0	1		1
0	1	0		0
0	1	1		0
1	0	0		1
1	0	1		1
1	1	0		0
1	1	1		0

	BC			
A	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	1	0	0	1



$$F(a,b,c) = \overline{C}$$

		A	
B		0	1
	0		
	1		

Tableau à 2 variables

		AB			
C		00	01	11	10
	0				
	1				

Tableaux à 3 variables

Tableau à 4 variables

		AB			
CD		00	01	11	10
	00				
	01				
	11				
	10				

Exemple 2 : 4 variables

AB					
CD		00	01	11	10
00					1
01	1	1	1	1	1
11					
10		1			

Exemple 2 : 4 variables

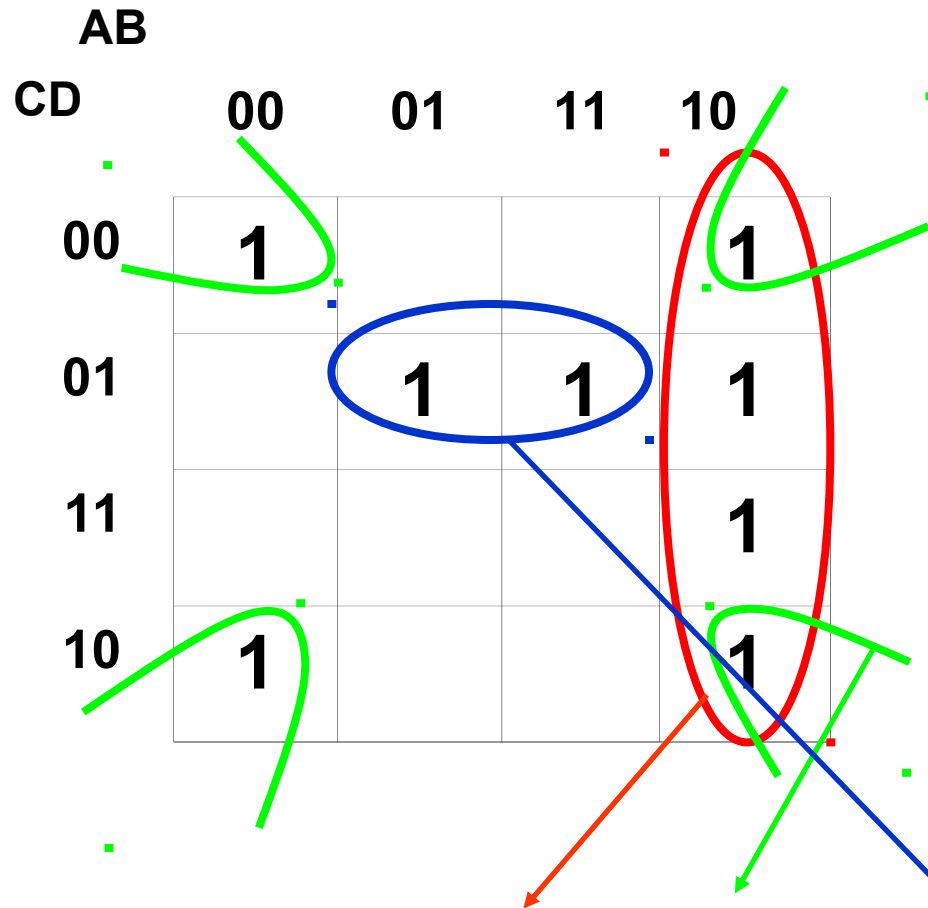
AB					
CD	00	01	11	10	
00				1	
01	1	1	1	1	
11					
10		1			

$$F(A, B, C, D) = \overline{C}.D + A.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.B.C.\overline{D}$$

Exercise : 4 variables

		AB			
CD		00	01	11	10
	00	1			1
01			1	1	1
11					1
10	1				1

Solution : 4 variables



$$F(A, B, C, D) = \overline{A}\overline{B} + \overline{B}\overline{D} + \overline{B}CD$$

Tableau à 5 variables

AB					
CD		00	01	11	10
00					
01					
11					
10					

U = 0

AB					
CD		00	01	11	10
00					
01					
11					
10					

U = 1

Example : 5 variables

AB					
CD		00	01	11	10
00	1				
01	1			1	
11	1			1	
10	1				

U = 0

AB					
CD		00	01	11	10
00	1				
01	1				1
11	1				1
10	1	1			

U = 1

Exemple 4 : 5 variables

AB					
CD		00	01	11	10
00	1				
01	1			1	
11	1			1	
10	1				

U = 0

AB					
CD		00	01	11	10
00	1				
01	1				1
11	1				1
10	1	1			

U = 1

$$F(A,B,C,D,U) = \bar{A}\bar{B} + A.B.D.\bar{U} + \bar{A}.C.\bar{D}.U + A.\bar{B}.D.U$$