USTHB Département Informatique 25/05/2014
1ère MI – Sections 1,2,3,4,5,6,7 8,9, 10 Examen de Programmation Fonctionnelle

Exercice 1 : (2+1,5+2,5 pts)

A/ Montrer que l'ensemble des entiers naturels multiples de 3 est primitif récursif en supposant que la fonction reste de la division de x par y, noté (restDiv (x,y)), est primitive récursive.

B/ Montrer que les fonctions suivantes sont primitives récursives :

a) $f(n) = n!$ 1,5

b) $g(n) = \sum_{k=0}^{n} k!$ 2,5

NB. Toutes les fonctions démontrées primitives récursives en cours peuvent être utilisée

Exercice 2 : (3+3 pts)

A/ Soit M1<S,E,I>, la machine de Turing où $S = \{1, 0, *\}$ et $E = \{ q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10}, q_f\}$ avec comme ensemble d'instructions :

I= { 1 : q_0 1 0 q_1,	5 : q_3 1 D q_3,	9 : q_6 1 G q_6	13 : q_4 * 1 q_8	17 : q_9 1 0 q_{10}
2 : q_1 0 D q_2	6 : q_3 0 G q_4	10 : q_6 * G q_7	14 : q_8 1 G q_8	18 : q_{10} 0 D q_9
3 : q_2 1 D q_2	7 : q_4 1 0 q_5	11: q_7 1 G q_7	15 : q_8 0 1 q_f	19 : q_9 0 G q_9
4 : q_2 * D q_3	8 : q_5 0 G q_6	12 : q_7 0 D q_0	16 : q_0 * D q_9	20 : q_9 * 1 q_f }

a) Dérouler cette machine pour les configurations initiales suivantes : $q_0\underline{1}*\underline{5}$ et $q_0\underline{3*5}$. 5 * 3 1,5

b) Quelle fonction réalise la machine M1? (justifiez votre réponse). 1 0,5

B/ On veut écrire la machine de Turing (MT) de la fonction f(x, y, z)=(x, y+1) définie de NxNxN dans NxN.

a) Donner le pseudo-algorithme (la démarche suivie) pour réaliser cette fonction. 1

b) Donner les instructions associées à cette machine. 2

Exercice 3 : (4+4 pts)

A/ Soient les fonctions suivantes écrites en Caml:

```
let rec f1 (x,y) = if x= 0 then [] else y::(f1 (x-1 , y));;

let rec f2 x= if x= [] then [] else f1 (fst (hd x), snd (hd x)) @ f2 (tl x) ;;
```

a) Donner le type inféré par chacune des fonctions ci-dessus. 0,5 + 0,5

b) Donner le résultat pour f1(2, 3), f1(3,'a') et f2[(1,"module"); (2,"PRF")]. 0,5 + 0,5 + 1

c) Que fait f1 et f2 ? 0,5 + 0,5

B/ Soit une liste contenant les synonymes d'un mot. Cette liste est triée. Elle peut contenir par exemple les synonymes du mot programme comme suit: ["annonce" ; "calendrier" ; "emploi" "objectif" ; "planification" ; "planning" ; "projet"].

a) Écrire une fonction nbsyn qui compte le nombre de synonymes d'un mot dans une liste. 1

b) Écrire une fonction ajoutmot qui ajoute un mot dans la liste de telle sorte que la liste reste triée. 1,5

c) Écrire une fonction estdansliste qui vérifie si un mot est présent dans la liste. 1,5

Corrigé Exam RRT 2015/2016
Belhadi / Isli

Exo 1

1/ $mult3 = \{x \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} \text{ tq } x = 3k\}$
$= \{0, 3, 6, \dots, 3k, \dots\}$

$Car_{mult3} : \begin{cases} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ x \longmapsto Car_{mult3}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in mult3 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{cases}$ 0,5

Montrer que mult3 est PR revient à montrer que Car_{mult3} est PR.

$Car_{mult3}(x) = \overline{sg}(restDiv(x,3))$ 1

$= \left[\overline{sg} \circ restDiv \circ (P^1_1, S\circ S\circ S\circ Z)\right](x)$ 0,5

Dérivation PR:

$f_1 = Z$
$f_2 = S$
$f_3 = f_2 \circ f_1$
$f_4 = f_2 \circ f_3$
$f_5 = f_2 \circ f_4$
$f_6 = P^1_1$
$f_7 = Div$
$f_8 = f_7 \circ (f_6, f_5)$
$f_9 = \overline{sg}$

$f_{10} = f_9 \circ f_8 = Car_{mult3}$

1/a/ $f(n) = n!$

$f(0) = 0! = 1 = cste$ $\underline{0,5}$

$f(y+1) = \circledast\big(f(y), y+1\big) = \underbrace{\left[\circledast^\circ\left(P^2_1, S^\circ P^2_2\right)\right]}_{h}\big(f(y), y\big)$

$\underline{1}$

Définition PR:

$f_1 = 1 = cste$ (arité 0)

$f_2 = P^2_2$

$f_3 = P^2_1$

$f_4 = \circledast$ $\quad f_5 = S$ $\quad f_6 = f_5^\circ f_2$

$f_7 = f_4^\circ(f_3, f_6)$

$f_8 = f$ (schéma de récurrence avec $g = f_1$ et $h = f_7$)

b/ $g(n) = \sum_{k=0}^{n} k!$

~~Démarche par récurrence~~

$\cancel{f(0) =}$

$g(0) = 0! = 1 = cste$ $\underline{0,5}$

$g(y+1) = g(y) + (y+1)!$

$= \oplus\big(g(y), (f^\circ S)(y)\big)$

$\underline{2}$ $= \left[\oplus^\circ\left(P^2_1, f^\circ S^\circ P^2_2\right)\right](\ldots$

Dérivation PR:

$f_1 = 1 = $ ste (writé 0)

$f_2 = P^2_2$

$f_3 = S$

$f_4 = f_3 \circ f_2$

$f_5 = f$

$f_6 = f_5 \circ f_4$

$f_7 = P^2_1$

$f_8 = \oplus$

$f_9 = f_8 \circ (f_7, f_6)$

$f_{10} = g$ (r. de réc avec $g = f_1$ et $h = f_9$)

Exo 2:

1/ $q_0\, \underline{1} * \underline{5} \equiv q_0\, 11 * 111111$

a/ $q_0\, 11 * 111111 \xrightarrow{I} q_f 1$ (1)

$q_0\, \underline{3} * \underline{5} \xrightarrow{I} q_f 1$ (1,5)

b/ $f = \lambda x y . \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq y, \\ x - y & \text{sinon} \end{cases}$ (0,5)

2/ a/ • On vérifie que la bande contient bien un triplet d'entiers, (x, y, z)

• On remplace toutes les barres après la dernière * par des 0

• ... ... la dernière * par 1 (1)

• on retourne vers la barre la plus à gauche
et on passe dans l'état interne final

b/ $I = \{(1)\, q_0 1 D q_0,\ (2)\, q_0 * D q_1,\ (3)\, q_1 1 D q_1,$
$(4)\, q_1 * D q_2,\ (5)\, q_2 1 D q_2,\ (6)\, q_2 0 G q_3,$
2 $(7)\, q_3 1 0 q_4,\ (8)\, q_4 0 G q_3,\ (9)\, q_3 * 1 q_5,$
$(10)\, q_5 1 G q_5,\ (11)\, q_5 * G q_5,\ (12)\, q_5 0 D q_f \}$

Exo 3 :

A/ a/ let rec f1(x,y) = if x=0 then [] else y::(f1 (x-1, y));;

0,5 f1 : int * 'a ⟶ 'a list = <fun>

let rec f2 x = if x = [] then []
else f1 (fst (hd x), snd (hd x))
@ f2 (tl x);;

0,5 f2 : (int * 'a) list ⟶ 'a list = <fun>

b/ 0,5 + 0,5 + 1

c/ 0,5 + 0,5

B/ a/ 1

b/ 1,5

c/ 1,5