Chapitre 2 : Les systèmes de numération

1. Introduction

Nous avons pris l'habitude de représenter les nombres en utilisant dix symboles différents: 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9. Ce système est appelé le système décimal (déci signifie dix).

Il existe cependant d'autres formes de numération qui fonctionnent en utilisant un nombre de symboles distincts.

Exemple :

- Le système binaire (bi: deux),
- Le système octal (oct: huit),
- Le système hexadécimal (hexa: seize).

En fait, on peut utiliser n'importe quel nombre de symboles différents (pas nécessairement des chiffres). Dans un système de numération : le nombre de symboles distincts est appelé **la base** du système de numération.

2. Le système décimal

On utilise dix symboles différents: { 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 }

N'importe quelle combinaison des symboles { 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 } nous donne un nombre. Le chiffre qui se trouve le plus à gauche est appelé le chiffre du poids fort et le chiffre qui se trouve le plus à droite est appelé le chiffre du poids faible.

2 3 3 4 5 6 7

Poids fort Poids faible

2 3 3 , 5 6 7

Partie entière Partie fractionnelle

2.1. Développement en polynôme d'un nombre dans le système décimal

Soit le nombre 1978, ce nombre peut être écrit sous la forme suivante :

1978 =1000 +900+ 70 +8

1978= 1*1000+ 9 *100 +7 *10 +8 *1

$1978 = 1*10^3 + 9*10^2 + 7*10^1 + 8*10^0$. Ce format s'appelle la forme polynomiale.

Le chiffre 1 est associé la puissance la plus élevée (10^3), donc c'est le chiffre du poids fort. De même, le chiffre 8 est associé à la puissance la plus faible (10^0), donc c'est le chiffre du poids faible.

Un nombre réel peut être écrit aussi sous la forme polynomiale

$1978,265 = 1*10^3 + 9*10^2 + 7*10^1 + 8*10^0 + 2*10^{-1} + 6*10^{-2} + 5*10^{-3}$

3. Le Système binaire (système à base 2):

Dans le système binaire, pour exprimer n'importe quelle valeur on utilise uniquement 2 symboles : {0, 1}.

$(1101)_2$

Un bit La base

Dans un nombre binaire, chaque chiffre est appelé « Bit » (BInary Digit).

$(1\ 1\ 0\ 1)_2$

Le bit du poids fort Le bit du poids faible

Un nombre dans la base 2 peut être écrit aussi sous la forme polynomiale.

$(1110)_2=1*2^3+1*2^2+1*2^1+0*2^0$

$=8+4+2+0$

$=(14)_{10}$

Le résultat du développement polynomial représente l'équivalent du nombre en décimale. C'est dire l'équivalent du nombre binaire (1110) en base 10 est le nombre (14).

Le même principe s'applique sur les nombres réels :

$(1110,101)_2 = 1*2^3+1*2^2+1*2^1+1*2^0+1*2^{-1}+0*2^{-2}+1*2^{-3}$

$=(14,625)_{10}$

Remarque

Pour convertir un nombre du système binaire au système décimal, il suffit d'utiliser son développement polynomial.

3.1. Comptage en binaire

- ✓ Sur un seul bit on peut représenter deux informations possibles : 0 ou 1
- ✓ Sur deux bits, nous avons 4 combinaisons possibles (2^2).

Binaire		Décimal
0	0	0
0	1	1
1	0	2
1	1	3

4. Le système octal (base 8)

8 symboles sont utilisés dans ce système: { 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 }

<u>Exemple 1 :</u>

$(127)_8=1*8^2+2*8^1+7*8^0$

$=64+16+7$

$=(87)_{10}$

$(127,65)_8=1*8^2+2*8^1+7*8^0+6*8^{-1}+5*8^{-2}$

$= 64+16+7+0,75+0,078125$

$=(87,828125)_{10}$

Remarque

Pour convertir un nombre du système octal au système décimal, il suffit d'utiliser son développement polynomial.

<u>Exemple 2 :</u>

Le nombre (1289) n'existe pas dans la base 8 puisque les symboles 8 et 9 n'appartiennent pas à la base.

5. Le système hexadécimal (base 16)

On utilise seize (16) symboles différents: les 10 symboles du système décimal plus les lettres A, B, C, D, E et F.

Décimal	Hexadécimal
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10	A
11	B
12	C
13	D
14	E
15	F

<u>Exemple :</u>

$(17)_{16}=1*16^1+7*16^0$

$=16+7=(23)_{10}$

$(ABE,2)_{16}=A*16^2+B*16^1+E*16^0+2*16^{-1}$

$= 10*16^2+11*16^1+14*16^0+2*16^{-1}$

$=2560+176+14+0,125$

$=(2750,125)_{10}$

Remarque

Pour convertir un nombre du système octal au système décimal, il suffit d'utiliser son développement polynomial.

<u>Résumé</u>

- ✓ Dans une base B, on utilise B symboles distincts pour représenter les nombres.
- ✓ La valeur de chaque symbole doit être strictement inférieure à la base B.
- ✓ Chaque nombre dans une base B peut être écrit sous sa forme polynomiale.
- ✓ Pour convertir un nombre de la base B à la base 10, il suffit d'utiliser son développement polynomial.

Exercice

• Effectuer les transformations suivantes à la base 10 ?

– $(123)_6=(?)_{10}$

– $(45,76)_8 =(?)_{10}$

– $(1100,11)_2 =(?)_{10}$

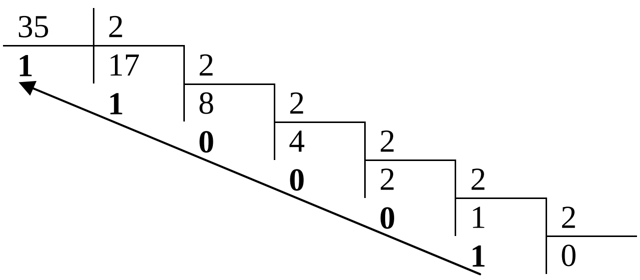
– $(1ABC)_{16} =(?)_{10}$

6. Conversion de la base 10 à la base 2

Le principe consiste à faire des divisions successives du nombre sur 2, et prendre le reste des divisions dans l'ordre inverse.

<u>Exemple 1 :</u>

$(35)_{10}=(100011)_2$



6.1. Conversion de la base 10 à la base 2 : cas d'un nombre réel

- ✓ Un nombre réel est constitué de deux parties : la partie entière et la partie fractionnelle.
- ✓ La partie entière est transformée en effectuant des divisions successives.
- ✓ La partie fractionnelle est transformée en effectuant des multiplications successives par 2.

Exemple :

$(35,625)_{10}=(100011,101)_2$

P.E : $(35)_{10}=(100011)_2$

P.F : $(0.625)_{10}$

0,625*2=**1**,25

0,25*2=**0**,5

0,5*2=**1**,0

Donc $(0.625)_{10}=(101)_2$

Remarque :

Le nombre de bits après la virgule va déterminer la précision.

Exercice :

Effectuer les transformations suivantes :

(23,65)=(?)2

(18,190)=(?)2

7. Conversion du décimal à une base B

La conversion se fait en prenant les restes des divisions successives sur la base B dans le sens inverse.

Exemple :

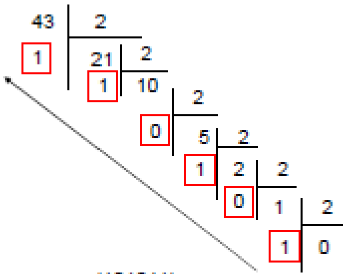
$(35)_{10}=(1022)_3$

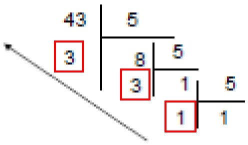
35	3			
2	11	3		
	2	3	3	
		0	1	3
			1	0

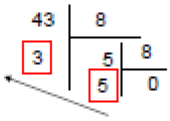
Exercice :

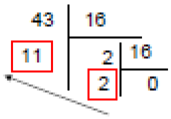
Effectuer les transformations suivantes :

$(43)_{10}=()_2=()_5=()_8=()_{16}$



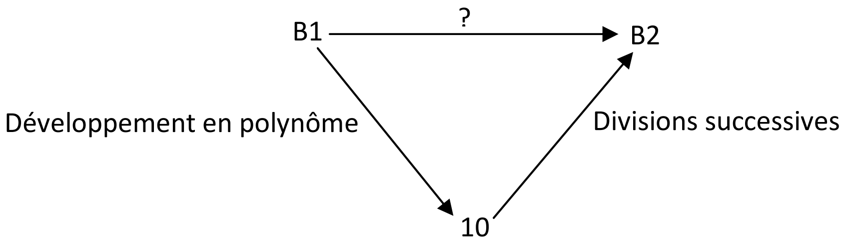






8. Conversion d'une base b1 à une base b2

- ✓ Il n'existe pas de méthode pour passer d'une base b1 à une autre base b2 directement.
- ✓ L'idée est de convertir le nombre de la base b1 à la base 10, en suit convertir le résultat de la base 10 à la base b2 .



Exemple :

$(34)_5=()_7$

$(34)_5=3*5^1+4*5^0=15+4=(19)_{10}$

19	7	
5	2	7
	2	0

$(19)_{10}=(25)_7$

Donc $(34)_5=(25)_7$

Exercice :

Effectuer les transformations suivantes :

$(43)_6=(\ ?)_5=(\ ?)_8$

$(2A)_{16}=(\ ?)_9$

9. Conversion : octal ➔ binaire

- ✓ En octal chaque, symbole de la base s'écrit sur 3 bits en binaire ($8=2^3$).
- ✓ L'idée de base est de replacer chaque symbole dans la base octal par sa valeur en binaire sur 3 bits (faire des éclatements sur 3 bits).

Octal	**Binaire**		
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1

Exemples :

$(345)_8=(011\ 100\ 101)_2$

$(65{,}76)_8=(110\ 101,\ 111\ 110)_2$

$(35{,}34)_8=(011\ 101,\ 011\ 100)_2$

Remarque :

Le remplacement se fait de droit à gauche pour la partie entière et de gauche à droite pour la partie fractionnelle.

10. Conversion : binaire ➔ Octal

- ✓ L'idée de base est de faire des regroupements de 3 bits à partir du poids faible. Par la suite remplacer chaque regroupement par la valeur octal correspondante.

Exemple :

$(11001010010110)_2=(\mathbf{0}11\ 001\ 010\ 010\ 110)_2=(31226)_8$

$(110010100{,}10101)_2=(110\ 010\ 100{,}101\ 01\mathbf{0})_2=(624{,}52)_8$

Remarque :

Le regroupement se fait de droit à gauche pour la partie entière et de gauche à droite pour la partie fractionnelle.

11. Conversion : hexadécimal ➔binaire

- ✓ En Hexa chaque symbole de la base s'écrit sur 4 bits ($16=2^4$).

- ✓ L'idée de base est de replacer chaque symbole par sa valeur en binaire sur 4 bits faire des éclatements sur 4 bits).

Hexadécimal	**Binaire**			
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
A	1	0	1	0
B	1	0	1	1
C	1	1	0	0
D	1	1	0	1
E	1	1	1	0
F	1	1	1	1

Exemples :

$(345B)_{16}=(\underline{0011}\ \underline{0100}\ \underline{0101}\ \underline{1011})_2$

$(AB3,4F6)_{16}=(\underline{1010}\ \underline{1011}\ \underline{0011},\ \underline{0100}\ \underline{1111}\ \underline{0110})_2$

12. Conversion : binaire -- hexadécimal

- ✓ L'idée de base est de faire des regroupements de 4 bits à partir du poids faible. Par la suite remplacer chaque regroupement par la valeur Héxa correspondante.

Exemple :

$(11001010100110)_2=(\underline{\mathbf{00}11}\ \underline{0010}\ \underline{1010}\ \underline{0110})_2=(32A6)_{16}$

$(110010100,10101)_2=(\underline{\mathbf{000}1}\ \underline{1001}\ \underline{0100},\underline{1010}\ \underline{1\mathbf{000}})_2=(194,A8)_{16}$