Chapitre I

Equations de MaxWell dans le vide

champs electromagnétique:

Force de Lorenz: $F = q(E + v \wedge B)$

Equations de Maxwell:

on $\nabla(\nabla \wedge B) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\nabla J = -\frac{\partial \rho}{\partial t}}$

1er Equation (Equation de flux):

$\nabla . B = 0$

ortogradthi

$\oiint B.dS = 0 = \iiint_V \nabla . B\, dV = 0 \Rightarrow \nabla . B = 0$

Le champ B est à flux conservatif.

2eme Equation (Maxwell - Faraday):

$\nabla \wedge E = \frac{-\partial B}{\partial t}$

En electrostatiq $E(r)$ derive d'un potentiel $V(r)$, $E = -\nabla V$.

+En regime permanent $\nabla \wedge E = 0$

stokes

$\oint_C E.dl = \iint_S (\nabla \wedge E) dS = \iint_S \left(\frac{-\partial B}{\partial t} . dS\right)$

$= \frac{-\partial}{\partial t} \iint_S B.dS = \frac{-\partial \phi}{\partial t}$

$$\boxed{\nabla \wedge E = -\frac{\partial B}{\partial t} \Leftrightarrow \oint E\, dl = -\frac{\partial \phi}{\partial t}}$$

$B(t)$ donne la naissance d'un $E(t)$ à circulation non conservatif.

3eme Equation (Maxwell - Gauss)

$+ \boxed{\phi = \underbrace{\oiint_S E.dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}}_{Gauss}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho\, dV$

$\oiint_S E.dS = \iiint_V (\nabla . E) dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho\, dV$

$$\boxed{\nabla . E = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \oiint_{(\Sigma)} E.dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}}$$

Relaxation de charges dans un conducteur :

$\nabla . J = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ et la loi d'ohms locale

$J = \sigma E$

$\nabla(\sigma . E) = \sigma(\nabla . E) + E(\nabla \sigma) = \sigma(\frac{\rho}{\varepsilon_0}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

$-\frac{\partial \rho}{\rho} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} . dt \Rightarrow \rho(t) = \rho_0 e^{-t/\tau}$ tq $\boxed{\tau = \frac{\varepsilon_0}{\sigma}}$

4ème Equation (Maxwell-Ampère)

$$\boxed{\nabla \wedge B = \mu_0 (J + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t})}$$

le théorème d'Ampère d'électrostatique

$\oint_{(C)} B dl = \iint_S (\nabla \wedge B) dS = \mu_0 \iint_S J . dS$

$$\boxed{\nabla \wedge B = \mu_0 J \Leftrightarrow \oint_{(C)} B dl = \mu_0 I}$$ en régime permanent

ampère

* régime non permanent :

$\oint_{(C)} B dl = \iint_S (\nabla \wedge B) dS = \mu_0 \left[\iint J dS + \iint_S \underbrace{\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}}_{J_D} dS \right]$

$\nabla \wedge B = \mu_0 (J + J_D)$

$$\boxed{\nabla \wedge B = \mu_0 \left[J + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right] \Leftrightarrow \oint_{(C)} B dl = \mu_0 (I + \iint_S J_D dS)}$$

J_D : densité du courant de déplacement

Conclusion :

* En statique si $B = 0$. E peut $\neq 0$ (condensateur)
* En magnétostatique si $E = 0$, B peut $\neq 0$ (ex $\uparrow I$)
* Quand les champs varie avec le temps : $\boxed{B \neq 0 \Longleftrightarrow E \neq 0}$

Chapitre II

propagation du champs électromagnétique dans le vide

Equation de propagation du champs

$$\boxed{\nabla^2 r_m = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 r_m}{\partial t^2}}$$

tq $\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

l'équation précédente représente l'expression mathématique de l'équation de propagation de la grandeur r_m suivant une direction quelconque

* $H = \varepsilon_0 E$

le vecteur Poynting :

$P = E \wedge H$

Démonstration pour l'équation de propagation d'un champs Electrique :

$\nabla \wedge (\nabla \wedge E) = \nabla \wedge (-\frac{\partial B}{\partial t}) = \nabla \wedge (-\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t})$

$= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\frac{\partial H}{\partial t}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t})$

$= -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t}$

$\nabla \wedge (\nabla \wedge E) = \nabla . (\nabla . E) - \nabla^2 E$

on $\nabla . E = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$ (Car dans le vide $J = 0 \Rightarrow \rho = 0$ (milieu neutre))

$\nabla \wedge (\nabla \wedge E) = -\nabla^2 E$

$$\boxed{\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \nabla^2 E = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t}}$$

Ondes planes électromagnétiques dans le vide :

Propagation unidimensionnelle :

$$\nabla = -\frac{1}{c}\,u\,\frac{\partial}{\partial t}$$ tq u : est le vecteur unitaire d'un axe quelconque.

cette équa valable uniquement pour une onde plane progressive.

Structure de l'onde plane progressive :

au dehors de la source : $\rho = 0$ et $j = 0$

donc

$\nabla \cdot B = 0 \Rightarrow -\frac{1}{c}u\frac{\partial B}{\partial t} = 0$

$\nabla \wedge E = -\frac{\partial B}{\partial t} \Rightarrow -\frac{1}{c}u \wedge \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{\partial B}{\partial t}$

$\nabla \cdot E = 0 \Rightarrow -\frac{1}{c}u \cdot \frac{\partial E}{\partial t} = 0$

$\nabla \wedge B = \frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t} \Rightarrow -\frac{1}{c}u \wedge \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t}$

$\int (2)\,dr \Rightarrow B = \int +\frac{1}{c}u \wedge \frac{\partial E}{\partial t} = +\frac{1}{c}u \wedge \int \partial E$

$$\boxed{B = \frac{1}{c}u \wedge E} \quad (1)$$

$\int (4)\,dr \Rightarrow \int \frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial r} = \int -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial r}$ donc

$$\boxed{E = -c\,u \wedge B} \quad (2)$$

de (1) et (2) on a $\boxed{|E| = c|B|}$

Ondes planes progressives sinusoïdales :

si ox est l'axe de propagation de l'onde donc :

$$E = \begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = E_{0y}\cos[\omega(t - \frac{x}{c}) + \varphi_2] \\ E_z = E_{0z}\cos[\omega(t - \frac{x}{c}) + \varphi_3] \end{pmatrix}$$

$$B = \frac{1}{c}u \wedge E = \frac{1}{c}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\E_y\\E_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_x = 0 \\ B_y = -\frac{1}{c}E_z \\ B_z = \frac{1}{c}E_y \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\varphi(x,t) = \omega(t - \frac{x}{c}) + \varphi_i}$$
$= (\omega t - kx) + \varphi_i$

entre "t" et "dt" : $\varphi(x,t) = \varphi(x+dx, t+dt)$

$\omega t - kx + \varphi_i = \omega t + \omega dt - kx - k dx + \varphi_i$

$\omega dt = k dx \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega c}{\omega} = c$

$$\boxed{v_\varphi = c}$$

Longueur d'onde λ :

- $\lambda = v_\varphi T = cT = 2\pi\frac{c}{\omega} = \frac{2\pi}{k}$
- $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $\nu = \frac{1}{T}$ (fréquence)

$\sigma = 1/\lambda$: nombre d'onde

Chapitre III
Résolution des équations de Maxwell dans le vide

Introduction des potentiels :

$\nabla \cdot B = 0$ i.e : B est à flux conservatif donc $B = \nabla \wedge A$ on dit que B dérive d'un potentiel vecteur A

- $\nabla \wedge E = -\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \wedge A) = -\nabla \wedge \frac{\partial A}{\partial t}$

$$\boxed{\nabla \wedge E = \nabla \wedge \left(E + \frac{\partial A}{\partial t}\right)}$$

NB : un vecteur dérive d'un potentiel scalaire ssi son rotationnel est nulle

$\nabla \wedge \left(E + \frac{\partial A}{\partial t}\right) = 0 \Rightarrow E + \frac{\partial A}{\partial t} = \nabla\phi$

on pose $\boxed{\phi = -V}$

Le champ scalaire $V(r,t)$ est appelé dans le cas générale non permanents **potentiel scalaire**

- Le champ électromagnétique (E,B) dérive des potentiels (V,A) par les relations :

$$\boxed{B = \nabla \wedge A} \; ; \; \boxed{E = -\nabla V - \frac{\partial A}{\partial t}}$$

Indétermination des potentiels :

soit : $\phi(r,t)$: un champ scalaire quelconque

(V_0, A_0) : un couple de potentiel du champ (E,B)

On peut obtenir d'autres couples (V,A) de potentiels de ce champ par la **transformation de jauge** :

$$\boxed{A = A_0 + \nabla\phi} \; ; \; \boxed{V = V_0 - \frac{\partial \phi}{\partial t}}$$

condition de Jauge de Lorentz

$$\boxed{\nabla \cdot A + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0}$$

Equation de poisson:

Pour V:

$$\nabla.E=\nabla\left(-\nabla V-\frac{\partial A}{\partial t}\right)=-\Delta V-\frac{\partial(\overbrace{\nabla.A}^{\text{Jauge de Lorenz}})}{\partial t}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$=-\Delta V-\frac{\partial\left(\frac{-1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right)}{\partial t}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\Rightarrow -\Delta V+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\Delta V-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}+\frac{\rho}{\varepsilon_0}=0}\ \text{ou}\ \boxed{\square V+\frac{\rho}{\varepsilon_0}=0}$$

pour le potentiel vecteur A:

$$\nabla\wedge(\nabla\wedge A)=\nabla(\nabla.A)-\Delta A=\mu_0 J-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial(\nabla V)}{\partial t}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial A}{\partial t}$$

$$\nabla\left(\underbrace{\nabla.A+\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}}_{\text{condition de Jauge de Lorenz}=0}\right)=\Delta A+\mu_0 J-\frac{1}{c^2}\frac{\partial A}{\partial t}$$

$$\boxed{\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial A}{\partial t}+\mu_0 J=0}\ \text{ou}\ \boxed{\square A+\mu_0 J=0}$$

Ces deux équations sont une conséquence des équations de Maxwell et de la Jauge de Lorenz

NB:

* En electrostatique ρ est fixe (indépendent de temps) $\square=\Delta$

$$\boxed{\Delta V+\frac{\rho}{\varepsilon_0}=0}$$

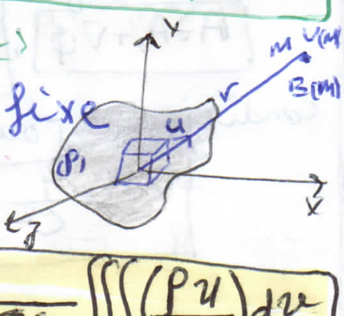
* En manétostatique (champ magnétique crée par des courant continus)

$$\square=\Delta\Rightarrow\boxed{\Delta A+\mu_0 J=0}$$

Resolution des équation de poisson

en électrostatique:

Soit ρ continue et fixe



$$\boxed{V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho}{r}dV}$$

$$\cdot E(M)=-\nabla_M V\Rightarrow\boxed{E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\left(\frac{\rho u}{r^2}\right)dv}$$

En magnétostatiques:

$$\boxed{A=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{J}{r}dv}$$

$$B(M)=\nabla_M\wedge A\Rightarrow\boxed{B=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\left(J\wedge\frac{u}{r^2}\right)dv}$$

En régime générale (regime non permanent)

$$\boxed{V(M,t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}dv}$$

$$\boxed{A(M,t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{J\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}dv}$$

Devellopement de Calculs

En électrostatique: $\left(\Delta V+\frac{\rho}{\varepsilon_0}=0\right)$

supposons $V(\infty)=0$

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\left(\frac{\rho}{r}\right)dV$$ accepter directement sans démonstration

$$E=-\nabla_M V=\frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\nabla\left(\frac{\rho}{r}\right)dV=\frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\rho\nabla_M\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\left(\frac{\rho}{r^2}u\right)dV$$

la loi de Coulomb pour un charge ponctuel $\iiint\rho\, dV=q\Rightarrow\boxed{E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}u}$

En magnétostatique: $\Delta A+\mu_0 J=0$

Supposons que $A(\infty)=0$

$$A=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{J}{r}dV$$ la solution est acceptable directement sans démonstration

$$B(M)=(\nabla_M\wedge A)=\nabla_M\wedge\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{J}{r}dV\right)$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\left(\nabla_M\wedge\frac{J}{r}\right)dV$$

voir les relations pour les rot et div.

$$\nabla\wedge(f A)=(\nabla f\wedge A)+f(\nabla\wedge A)$$

$$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\left[\nabla_M\left(\frac{1}{r}\right)\wedge J+\frac{1}{r}\underbrace{(\nabla_M\wedge J)}_{0}\right]dV$$

on derive par rapport aux coordonnes de M

$$\nabla_M\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^2}u\Rightarrow\boxed{B=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\left(J\wedge\frac{u}{r^2}\right)dV}$$

La loi de Biot savart

Chapitre IV

Energie électromagnétique dans le vide

Rappel,

$$W = \iiint_\tau \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} d\tau = \iiint \frac{1}{2} \rho V \, d\tau$$ (energie electrostatique)

$$\boxed{\omega = \frac{dW}{d\tau} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$$ la densité volumique de l'energie électrostatique

puissance et vecteur de Poynting :

$4^{ème}$ équation de Maxwell :

$$\nabla \wedge B = \mu_0 \left(J + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}\right) \Longleftrightarrow \nabla \wedge \frac{B}{\mu_0} = \left(J + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}\right)$$

* On effectuons le produit scalaire suivant :

$$E\left(\nabla \wedge \frac{B}{\mu_0}\right) = JE + E\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \Longleftrightarrow \frac{B}{\mu_0}(\nabla \wedge E) - \nabla \cdot \left(E \wedge \frac{B}{\mu_0}\right)$$

$$= JE + \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{\partial E^2}{\partial t}$$

d'après la 2ème équations de Maxwell :

$$\nabla \wedge E = -\frac{\partial B}{\partial t} \Rightarrow \frac{B}{\mu_0}(\nabla \wedge E) = \frac{B}{\mu_0}\left(-\frac{\partial B}{\partial t}\right) = -\frac{1}{2\mu_0}\frac{\partial B^2}{\partial t}$$

donc

$$-\frac{1}{2\mu_0}\frac{\partial B^2}{\partial t} - \nabla\left(E \wedge \frac{B}{\mu_0}\right) = JE + \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{\partial E^2}{\partial t} \quad (2)$$

on intégrant sur tout le volume τ, et on applique le théorème d'ostogradski à (2)

$$\boxed{\iiint_\tau (J \cdot E) d\tau = \frac{-\partial}{\partial t}\iiint_\tau \underbrace{\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2\right)}_{\omega} d\tau - \underbrace{\oiint_S \left(E \wedge \frac{B}{\mu_0}\right)}_{\Pi} dS} \quad (I)$$

tq :

$\boxed{\iiint_\tau (J \cdot E) d\tau}$: est la puissance dissipée dans le volume τ sous forme de chaleur par unité de temp

* $\boxed{\iiint_\tau \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2\right) d\tau}$: est l'énergie stockée dans le champ electrique E et magnétique B

* $\boxed{\frac{-\partial}{\partial t}\iiint \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2\right) d\tau}$: peut être interprétée comme une diminution de l'energie emmagasinées

$\boxed{\oiint_S \left(E \wedge \frac{B}{\mu_0}\right) dS = \iint \Pi \cdot dS}$: Doit représenté la puissance évacuée vers l'extérieur à travers la surface S. C'est une puissance rayonnée

$$\boxed{\Pi = \left(E \wedge \frac{B}{\mu_0}\right)}$$ est le vecteur poynting

d'après (I) on a :

$$\iiint_\tau (J \cdot E) d\tau = -\frac{\partial}{\partial t}\iiint_\tau \omega \, d\tau - \iiint_\tau \nabla \Pi \, d\tau$$

$$\boxed{\frac{-\partial \omega}{\partial t} = JE + \nabla \Pi}$$

C'est l'équation de conservation de l'energie

والسلام عليكم ورحمة الله تعالى وبركاته