	James Clerk Maxwell
Naissance	13 juin 1831 Édimbourg, Écosse (Royaume-Uni)
Décès	5 novembre 1879 Cambridge, Angleterre (Royaume-Uni)
Nationalité	écossaise
Champs	Mathématiques, Physique
Diplômé	Université d'Édimbourg, Université de Cambridge
Célèbre pour	Équations de Maxwell Distribution de Maxwell Démon de Maxwell
Distinctions	Médaille Rumford Prix Adams
a eu pour directeur de thèse William Hopkins	

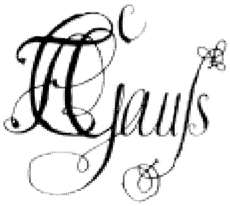
	Portrait par Thomas Phillips
Naissance	22 septembre 1791 Newington (Royaume-Uni)
Décès	25 août 1867 Hampton Court (Royaume-Uni)
Nationalité	Royaume-Uni
Champs	Électrochimie, Électromagnétisme
Institution	Royal Society
Célèbre pour	Farad, Cage de Faraday
Distinctions	médaille Copley, Médaille Rumford, Royal Medal

Carl Friedrich Gauss

Portrait de Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), réalisé par Christian Albrecht Jensen

Naissance	30 avril 1777 Brunswick (Saint-Empire romain germanique)
Décès	23 février 1855 (à 77 ans) Göttingen (Royaume de Hanovre)
Nationalité	Allemand
Champs	Astronomie, mathématiques, physique
Institution	Université de Göttingen
Célèbre pour	Travaux en mathématiques et en physique
Distinctions	Médaille Copley Prix Lalande

Signature



André-Marie Ampère, né à Lyon le 20 janvier 1775 et mort à Marseille le 10 juin 1836, est un mathématicien et physicien français. Il inventa le premier télégraphe électrique et, avec François Arago, l'électroaimant, et il énonça en 1827 la théorie de l'électromagnétisme. Son nom a été donné à l'unité internationale de courant électrique : l'ampère.

CHAPITRE I

EQUATIONS DE MAXWELL DANS LE VIDE

1 Le champ électromagnétique

Soit dans un repère galiléen une densité de charge ***ρ(r,t)*** en mouvement qui lui est associée une densité de courant ***J(r,t)***. L'électromagnétisme se propose d'étudier les interactions des particules chargées. Il faut admettre que l'action de la distribution des charges en un point de position r et à une date t peut toujours être caractérisé par un champ ***C(r,t) = (E,B)*** appelé champ électromagnétique : c'est un ensemble de deux champs vectoriels ***E(r,t)*** et ***B(r,t)***

Historiquement les champs électrique ***E(r,t)*** et magnétique ***B(r,t)*** ont évolué séparément. En réalité ils forment un être mathématique ; ***(E,B)*** forme un tout indissociable.

Le champ électromagnétique est accessible par ces effets : Une charge électrique ***q*** animée d'une vitesse ***v*** placée dans un champ électromagnétique ***(E,B)*** est soumise à une force ***F*** dite force de Lorentz :

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{q}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B})$$

La théorie de l'électromagnétisme sera complète si l'on sait calculer le champ ***(E,B)*** à partir de sa source ***(ρ,J)***, ainsi nous proposons ***04*** relations locales appelées équations de Maxwell qui vont nous permettre de calculer le champ électromagnétique ***(E,B).***

2 Les équations de Maxwell

Première équation de Maxwell (équation du flux magnétique) :

$$\boldsymbol{\nabla} . \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$$

Deuxième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Faraday) :

$$\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial \boldsymbol{t}}$$

Troisième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Gauss) :

$$\boldsymbol{\nabla} . \boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}$$

Quatrième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Ampère) :

$$\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\mu_0} \left(\boldsymbol{J} + \boldsymbol{\varepsilon_0} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{t}} \right)$$

On peut distinguer deux couples d'équations :

- La 1^{ere} et la 2eme équations expriment les propriétés intrinsèques du champ électromagnétique (pas de terme source)

- La 3^eme^ et la 4^eme^ équations expriment le lien entre le champ électromagnétique ***(E,B)*** et sa source ***(ρ,J).***

N.B.

$$\nabla.(\nabla\wedge B) = \mu_0\left(\nabla.J + \varepsilon_0\nabla.\frac{\partial E}{\partial t}\right) = \mu_0\left(\nabla.J + \varepsilon_0\frac{\partial(\nabla.E)}{\partial t}\right) = 0$$

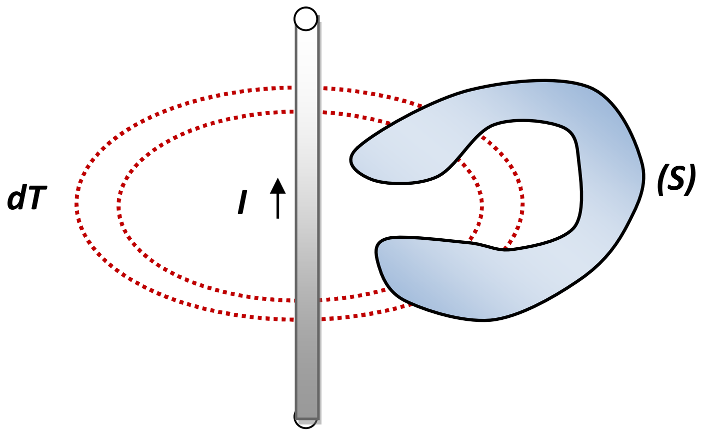
$$\Rightarrow \nabla.J + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0}\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

D'où l'équation de la conservation de la charge électrique :

$$\boldsymbol{\nabla.J = -\frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

2.1 Contenu physique de l'équation du flux magnétique

Soit un fil conducteur rectiligne de longueur infini et parcouru par un courant continu ***I***. Il crée un champ magnétique ***B*** dans tout l'espace. Soient ***dT*** un tube de flux et ***S*** une surface fermée quelconque.



B est constant le long du tube. ***dT*** transporte un flux constant et découpe la surface S en un nombre paire d'éléments de surface identiques ***dS_1, dS_2, dS_3, dS_4***, …etc. le flux qui sort de ces éléments est donc nul, il y'a alternance de signes **+** et **–**

$$\oiint B.dS = 0$$

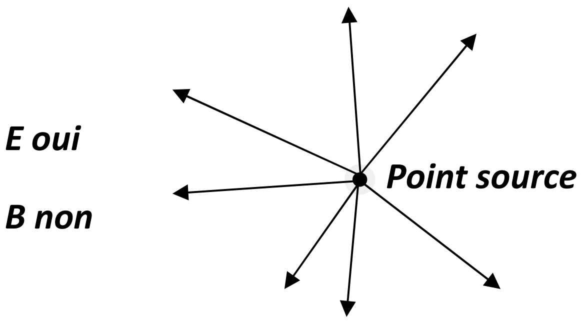
Appliquons le théorème d'Ostrogradski :

$$\phi = \oiint_S B.dS = \iiint_V \nabla.B\, dV = 0 \Rightarrow \nabla.B = 0$$

Où ***V*** et le volume fini délimitée par la surface ***S*** fermée.

$$\boldsymbol{\nabla.B = 0 \Leftrightarrow \oiint_S B.dS = 0}$$

Cette équation exprime que le champ magnétique B est à flux conservatif. Les lignes de B ne peuvent pas diverger comme le font les lignes du champ électrique E à partir d'un point source.



La 1^{ere} et la 3^{eme} équations de Maxwell ont des structures mathématiques identiques mais la 1^{ere} ne contient pas de terme source.

2.2 Contenu physique de l'équation de Maxwell – Faraday

En électrostatique le champ électrique ***E(r)*** dérive d'un potentiel scalaire ***V(r)*** :

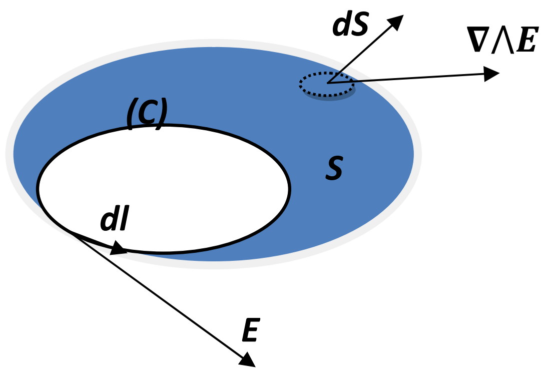
$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla V}$$

D'où en régime permanent :

$$\boldsymbol{\nabla \wedge E} = \mathbf{0}$$

Ce qui exprime que la circulation de ***E*** est conservative en régime permanent (régime indépendant du temps).

Dans le cas général, examinons la circulation de ***E*** à la date ***t*** le long d'un contour ***(C)*** fixe. Soit ***S*** une surface quelconque s'appuyant sur le contour ***(C)*** et appliquons le théorème de Stokes.



$$\oint_C E.dl = \iint_S (\nabla\wedge E).dS = \iint_S \left(-\frac{\partial B}{\partial t}.dS\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\iint_S B.dS\right) = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Avec : $\phi = \iint_S B.dS$ le flux de ***B*** à travers la surface ***S***.

$$\boldsymbol{\nabla \wedge E = -\frac{\partial B}{\partial t} \Leftrightarrow \oint E.dl = -\frac{\partial \phi}{\partial t}}$$

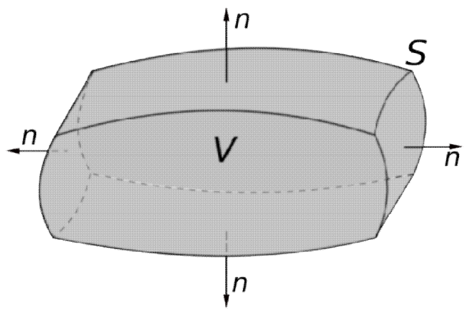
Cette relation exprime que tout champ magnétique dépendant du temps donne naissance à un champ électrique à circulation non conservatif. L'équation de Maxwell – Faraday rend compte du phénomène d'induction électromagnétique.

En régime permanent : $\partial \mathrm{B}/\partial \mathrm{t} = 0 \Leftrightarrow \nabla \wedge \mathrm{E} = 0$

2.3 Contenu physique de l'équation de Maxwell – Gauss

Rappel du théorème de Gauss

Soit une surface fermée ***(S)*** délimitant un volume ***V*** contenant une charge ***Q*** :



$$Q = \iiint_V \rho dV$$

Le flux électrostatique ***Φ*** sortant de ***S*** s'exprime :

$$\phi = \oiint_S E.dS = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho dV$$

En appliquant le théorème d'Ostrogradski on obtient :

$$\oiint_S E.dS = \iiint_V (\nabla.E) dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho dV$$

D'où : $\nabla.E = \rho/\varepsilon_0$

$$\boldsymbol{\nabla.E = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \oiint_S E.dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}}$$

Cette équation est plus générale que le théorème de Gauss, car elle prend en compte toutes les charges (charge libres et charges liées) contenues le volume V délimité par la surface fermée (S).

2.4 Relaxation de charges dans un conducteur

Pour examiner l'évolution de charges ***ρ*** à l'intérieur d'un conducteur parcouru par des courants on partira de l'équation de la conservation de la charge

$$\nabla.J = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

et de la loi d'Ohm locale

$$J = \sigma E$$

$$\nabla.J = \nabla.(\sigma E) = \sigma(\nabla.E) + E(\nabla.\sigma) = \sigma(\nabla.E) = \sigma\frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

D'où :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\rho = 0$$

$$\boldsymbol{\rho = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

Avec :

$$\tau = \frac{\varepsilon_0}{\sigma}$$

L'expression de $\boldsymbol{\rho}$ exprime qu'un éventuel excédent de charge dans un conducteur disparait au bout d'un temps égal à quelques $\boldsymbol{\tau}$.

Ex : pour le cuivre $\sigma = 6.10^{7}$ S.m et $\varepsilon_0 = 8,85.10^{-12}$ F/m on obtient $\tau = 10^{-19}$ S.

$$\boldsymbol{\rho = \rho_0 e^{-\frac{t}{10^{-19}}} = \rho_0 e^{-t.10^{19}} = \frac{\rho_0}{e^{+t.10^{19}}} \simeq 0}$$

Physiquement si des charges positives s'accumulent en certains points et des charges négatives s'accumulent en d'autres points, des forces électriques de rappel s'exercent entre les régions de charges opposées. Si le milieu est suffisamment conducteur tels que les métaux le déséquilibre tend rapidement à disparaitre. A l'intérieur d'un conducteur métallique la densité de charge peut être considérée comme nulle dans tout le domaine des fréquences hertziennes (domaine allant du régime permanent f = 0 Hz jusqu'à l'infrarouge).

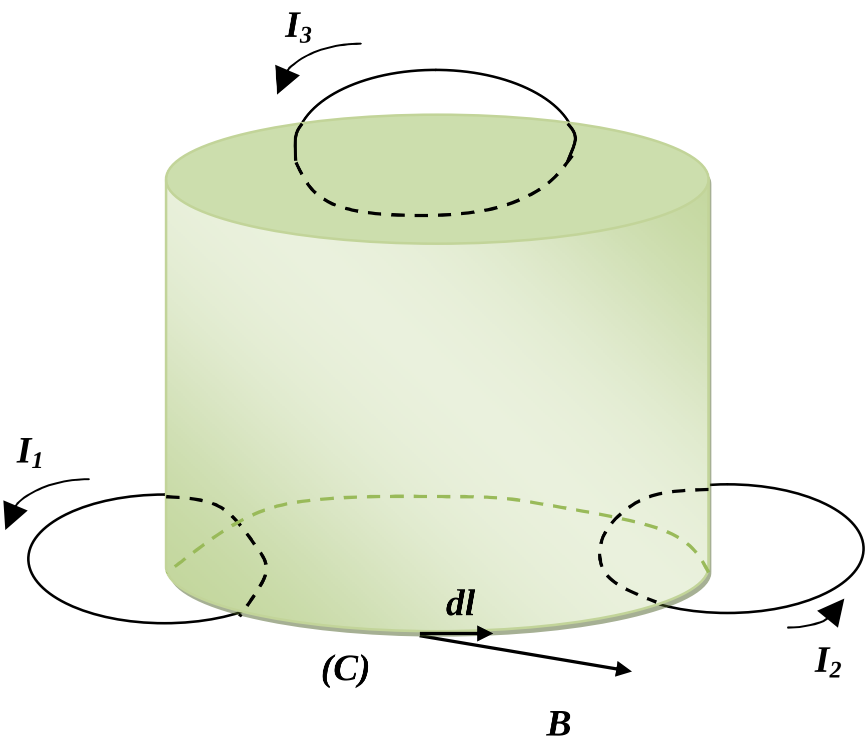
2.5 Contenu physique de l'équation de Maxwell – Ampère

Rappel :

Soit un contour ***(C)*** sur lequel s'appuie une surface ***S***. le théorème d'Ampère de la magnétostatique exprime que :

$$\boldsymbol{\oint_C B.dl = \mu_0 I}$$

Où ***I*** est le courant enlacé par le contour ***(C)***. ***I*** est le flux de la densité de courant ***J*** qui traverse la surface ***S***.



$$\oint_C B.dl = \mu_0 \iint_S J.dS = \mu_0(I_1 - I_2 + I_3 - I_3) = \mu_0(I_1 - I_2)$$

On constate qu'il n'y a que les courants $\boldsymbol{I_1}$ et $\boldsymbol{I_2}$ qui contribuent à la circulation. Ce sont les courants enlacés par le contour ***(C)***.

Utilisons la formule de Stokes :

$$\oint_C B.dl = \iint_S (\nabla \wedge B).dS = \mu_0 \iint_S J.dS$$

D'où :

$$\boldsymbol{\nabla \wedge B = \mu_0 J \Leftrightarrow \oint_C B.dl = \mu_0 I}$$

Cette formule est valable uniquement en régime permanent (magnétostatique) c'est le théorème d'Ampère de la magnétostatique. Le champ magnétique tourbillonne autour des courants qui l'engendrent.

En régime non permanent, calculons la circulation de ***B*** à la date ***t*** le long du contour ***(C)***.

$$\oint_C B.dl = \iint_S (\nabla \wedge B).dS = \mu_0 \left[\iint_S J.dS + \iint_S \left(\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right).dS \right]$$

I étant l'intensité du courant qui traverse ***S*** à l'instant ***t*** :

$$I = \iint_S J.dS$$

On pose :

$$\boldsymbol{J_D} = \boldsymbol{\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{\partial E}}{\boldsymbol{\partial t}}$$

D'où la formule générale du théorème d'Ampère :

$$\boldsymbol{\nabla \wedge B} = \boldsymbol{\mu_0}(\boldsymbol{J} + \boldsymbol{J_D})$$

$$\boldsymbol{\nabla \wedge B} = \boldsymbol{\mu_0}\left(\boldsymbol{J} + \boldsymbol{\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{\partial E}}{\boldsymbol{\partial t}}\right) \Leftrightarrow \oint_C \boldsymbol{B.dl} = \boldsymbol{\mu_0}\left(\boldsymbol{I} + \iint_S \boldsymbol{J_D.dS}\right)$$

Le flux du terme $\boldsymbol{J_D}$ intervient de la même manière que le flux de $\boldsymbol{J}$ d'où l'usage est de conserver à $\boldsymbol{J_D}$ le nom que lui a donné Maxwell : densité du courant de déplacement.

Un champ électrique dépendant du temps est, au même titre qu'un courant, une source de champ magnétique.

$\frac{\boldsymbol{\partial B}}{\boldsymbol{\partial t}}$ ***donne naissance à un champ électrique E rotationnel***

$\boldsymbol{\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{\partial E}}{\boldsymbol{\partial t}}$ ***donne naissance à un champ magnétique B rotationnel***.

Conclusion :

- En statique le champ électrique ***E*** peut exister en absence du champ magnétique ***B***. Exemple : un condensateur portant une charge ***Q***.
- En magnétostatique le champ magnétique ***B*** peut exister en absence de champ électrique ***E***. Exemple : un conducteur parcouru par un courant continu ***I***.
- Quand les champs varient avec le temps, le champ magnétique ***B*** ne peut pas existe sans un champ électrique ***E***, de même que ***E*** ne peut pas exister sans un champ ***B*** correspondant. Les termes $\frac{\boldsymbol{\partial B}}{\boldsymbol{\partial t}}$ **et** $\boldsymbol{\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{\partial E}}{\boldsymbol{\partial t}}$ réalisent le couplage entre les deux champs. Ce couplage est à l'origine de la possibilité d'une propagation du champ électromagnétique ***(E,B)*** (ondes électromagnétiques).

CHAPITRE II
PROPAGATION DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE DANS LE VIDE

1 Equations de propagation du champ électromagnétique

A partir des équations de Maxwell on cherche deux équations découplées ne contenant respectivement que le champ électrique ***E*** et que le champ magnétique ***B***. De la 2eme et de la 4eme nous obtenons :

$$\boldsymbol{\nabla}\wedge(\boldsymbol{\nabla}\wedge\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{E}) - \Delta\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\nabla}\wedge\left(-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\wedge\boldsymbol{B})$$

$$\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right) - \Delta\boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\boldsymbol{J} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)$$

D'où :

$$\Delta\boldsymbol{E} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{\nabla}\rho + \mu_0\frac{\partial\boldsymbol{J}}{\partial t} \qquad (1)$$

Si l'on prend le $\nabla\wedge(\nabla\wedge B)$ on obtiendra :

$$\Delta\boldsymbol{B} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2} = \mu_0(\nabla\wedge\boldsymbol{J}) \qquad (2)$$

En dehors de la source où ***ρ = 0*** et ***J = 0*** on aura :

$$\Delta\boldsymbol{E} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad (3)$$

$$\Delta\boldsymbol{B} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2} = 0 \qquad (4)$$

1.2 Rappel : Equation de d'Alembert

Soit ***S(x,t)*** une grandeur fonction de l'abscisse ***x*** et de la date ***t***. L'équation de D'Alembert s'écrit :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0$$

Où ***v*** est une constante.

C'est une équation différentielle qui admet comme solution générale :

$$S(x,t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right) + g\left(t + \frac{x}{v}\right)$$

Les solutions particulières sont :

$$S_1(x,t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

$$S_2(x,t) = g\left(t + \frac{x}{v}\right)$$

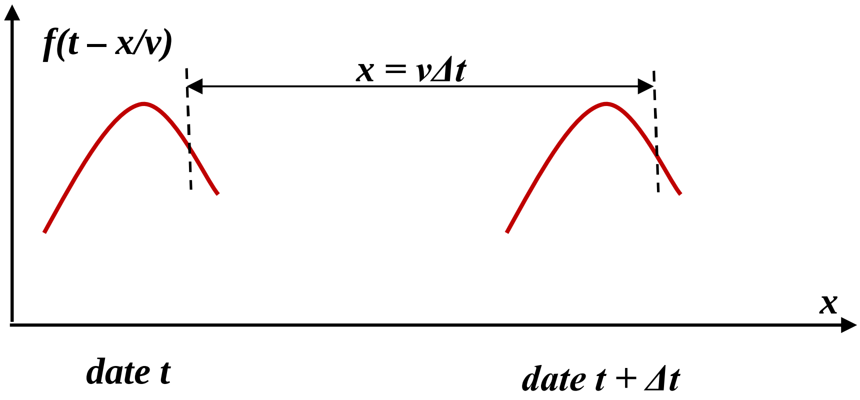
Si :

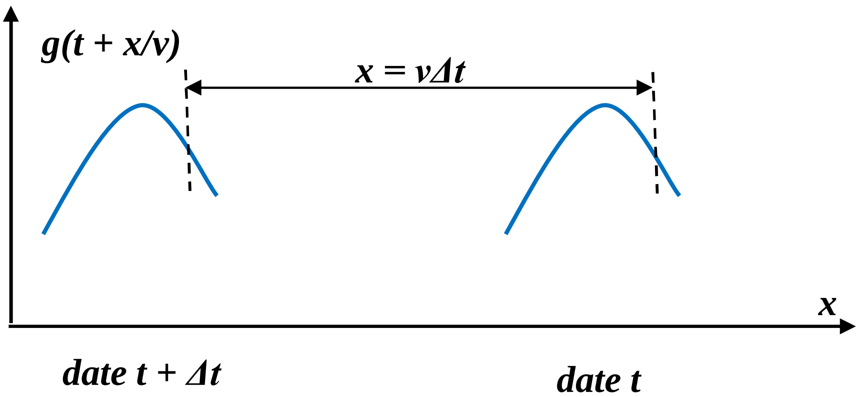
$$\Delta x = v\Delta t$$

$$\Rightarrow f\left(t - \frac{x}{v}\right) = f\left(t + \Delta t - \frac{x}{v} - \Delta t\right) = f\left(t + \Delta t - \frac{x + v\Delta t}{v}\right)$$

$$f\left(t - \frac{x}{v}\right) = f\left(t + \Delta t - \frac{x + \Delta x}{v}\right)$$

$$g\left(t+\frac{x}{v}\right)=g\left(t+\Delta t+\frac{x}{v}-\Delta t\right)=g\left(t+\Delta t+\frac{x-v\Delta t}{v}\right)$$
$$g\left(t+\frac{x}{v}\right)=g\left(t+\Delta t+\frac{x-\Delta x}{v}\right)$$





On constate que les grandeurs f et g se propagent sans déformation. $f\left(t-\frac{x}{v}\right)$ et $g\left(t+\frac{x}{v}\right)$ représentent ce qu'on appelle des ondes progressives. $f\left(t-\frac{x}{v}\right)$se déplace dans le sens positif de l'axe ***ox*** à la vitesse v et $g\left(t+\frac{x}{v}\right)$ se déplace dans le sens opposé à la vitesse **-** v.
La solution générale de l'équation de D'Alembert à une dimension peut s'interpréter comme la superposition de deux ondes progressives de vitesses opposées.

1. 3 Equation de d'Alembert à 3 dimensions

S(x,y,z,t)

$$\Delta S-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}=0 \qquad (5)$$

Les solutions particulières sont :

$$S_1(x,t)=f\left(t-\frac{x}{v}\right)\ ;\ S_1(y,t)=f\left(t-\frac{y}{v}\right)\ ;\ S_1(z,t)=f\left(t-\frac{z}{v}\right)$$

$$S_2(x,t) = g\left(t + \frac{x}{v}\right) \quad ; \quad S_2(y,t) = g\left(t + \frac{y}{v}\right) \quad ; \quad S_2(z,t) = g\left(t + \frac{z}{v}\right)$$

A une date ***t*** donnée ces six fonctions ont même valeur en tout point d'un plan ***x = constante***, ***y = constante*** et ***z = constante***. Elles représentent des ondes planes progressives se propageant avec la célérité ***v*** respectivement le long des axes ***ox***, ***oy*** et ***oz***.

1. 4 Conclusion

Maxwell remarqua que, compte tenue des équations (3) et (4), les six composantes du champs électromagnétique ***(E,B)*** vérifient, dans la région de l'espace située en dehors de la source (***ρ = 0 et J = 0***), des équations qui s'identifient à l'équation (5) en posant $v^2 = 1/\varepsilon_0\mu_0$. Ceci implique que le champ électromagnétique est susceptible de se propager avec une célérité dont la valeur numérique est $v = \sqrt{1/\varepsilon_0\mu_0} = 3.10^8\ m/s$.

Par ailleurs, l'analyse des phénomènes lumineux et les mesures donnaient pour la lumière un caractère ondulatoire et une célérité dans le vide une valeur ***c*** très proche de ***v***. Maxwell tira les conclusions de cet ensemble en affirmant la nature électromagnétique de la lumière, ce qui revient à identifier ***v*** à ***c*** d'où la célèbre relation :

$$\varepsilon_0\mu_0 c^2 = 1$$

En introduisant l'opérateur d'alembertien :

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Les équations du champ électromagnétiques (3) et (4) dans l'espace vide de charges électrique et de courants peuvent s'écrire sous la forme :

$$\square E = 0 \quad ; \quad \square B = 0$$

2 Ondes planes électromagnétiques dans le vide

2. 1 propagation unidimensionnelle

Dans le cas d'une propagation unidimensionnelle dans le vide (de permittivité ε_0, et de perméabilité μ_0) les champs ***E*** et ***B*** ne dépendent que de la date ***t*** et par exemple de la coordonnée ***x*** :

$$E(x,t) = E_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + E_2\left(t + \frac{x}{c}\right)$$
$$B(x,t) = B_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + B_2\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

E et ***B*** sont représentés par la superposition de deux ondes progressive de vitesse opposées. E_1 et B_1 se propagent dans le sens positif de l'axe ***ox*** et E_2 et B_2 se propagent dans le sens négatif.

(E_1,B_1) et (E_2,B_2) caractérisent une onde électromagnétique plane progressive se propageant parallèlement à l'axe ***ox***.

$$\frac{\partial E_1}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial E_1}{\partial t} \quad ; \quad \frac{\partial E_1}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial E_1}{\partial z} = 0$$

Sous la forme opérationnelle :

$$\nabla \begin{pmatrix} -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \nabla = -\frac{1}{c} a_x \frac{\partial}{\partial t} \qquad (1)$$

Où $\boldsymbol{a_x}$ est le vecteur unitaire de l'axe ***ox***.

Pour le champ $\boldsymbol{E_2}$ on obtiendra :

$$\nabla = \frac{1}{c} a_x \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{1}{c} a_{x'} \frac{\partial}{\partial t} \qquad (2)$$

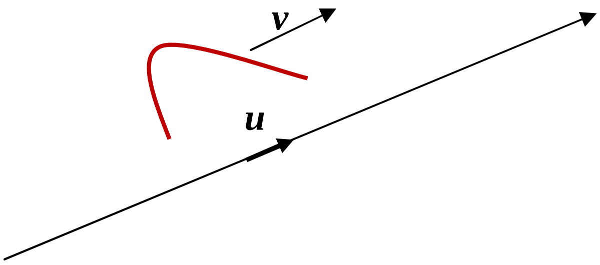
Où $\boldsymbol{a_{x'}}$ et le vecteur unitaire de l'axe ***ox'*** orienté en sens contraire de ***ox***. On peut donc généraliser les équations (1) et (2) pour un axe quelconque :

$$\nabla = -\frac{1}{c} u \frac{\partial}{\partial t}$$

Où ***u*** est le vecteur unitaire de l'axe, valable uniquement pour une onde plane progressive.

3 Structure de l'onde plane progressive

Soit un axe défini par le vecteur unitaire ***u*** et une onde électromagnétique (***E,B***) se propageant dans la direction positive :



En dehors de la source ***ρ = 0*** et ***J = 0***. Les équations de Maxwell peuvent s'écrire de la façon suivante :

$$\nabla . B = 0 \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{c} u \frac{\partial B}{\partial t} = 0 \qquad (1^{ere})$$

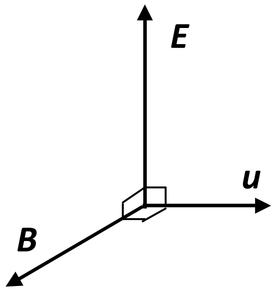
$$\nabla \wedge E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{c} u \wedge \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{\partial B}{\partial t} \qquad (2^{eme})$$

$$\nabla . E = 0 \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{c} u . \frac{\partial E}{\partial t} = 0 \qquad (3^{eme})$$

$$\nabla \wedge B = \frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t} \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{c} u \wedge \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t} \qquad (4^{eme})$$

Les champs indépendants du temps ne sont pas pris en compte. En intégrant les équations (2) et (4) où les constantes d'intégration sont nécessairement nulles on obtient :

$$\boldsymbol{B = \frac{1}{c}\, u \wedge E}$$
$$\boldsymbol{E = -c\, u \wedge B}$$



B et ***E*** sont perpendiculaires à la direction ***u*** de propagation. ***B*** et ***E*** sont perpendiculaires entre eux. Le trièdre ***u, E, B*** est directe.

$$\boldsymbol{|E| = c|B|}$$

Remarque

- Une particule de charge ***q*** placée dans un champ électromagnétique, est soumise à une force ***F*** dont le rapport des composantes $\boldsymbol{F_E}$ et $\boldsymbol{F_B}$ de la force de Lorentz est :

$$\boldsymbol{\frac{F_E}{F_B} = \frac{qE}{qv\wedge B} = \frac{cB}{vB} = \frac{c}{v}}$$

v << c d'où :

$$\boldsymbol{\frac{F_E}{F_B} = \frac{c}{v} \;\Rightarrow\; F_E \gg F_B}$$

4 Ondes planes progressives sinusoïdales

Si ***ox*** est l'axe de propagation de l'onde, celle-ci est définie par :

$$\boldsymbol{E = \begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = E_{oy}\, cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi_2\right] \\ E_z = E_{oz}\, cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi_3\right] \end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{B = \frac{1}{c} u\wedge E = \frac{1}{c}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\E_y\\E_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_x = 0 \\ B_y = -\frac{1}{c}E_z \\ B_z = -\frac{1}{c}E_y \end{pmatrix}}$$

Où $\boldsymbol{\omega}$ est la pulsation de l'onde, liée à la période ***T*** par :

$$\boldsymbol{\omega T = 2\pi}$$

$\boldsymbol{\varphi(x,t) = \omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi_i}$ défini la phase de l'onde plane progressive de pulsation $\boldsymbol{\omega}$.
On pose $\boldsymbol{k = \omega / c}$:

$$\boldsymbol{\varphi(x,t) = \omega t - kx + \varphi_i}$$

k est le vecteur d'onde.
Les points tels que ***φ(x,t)*** = constante définissent à chaque instant un plan perpendiculaire à ***ox***. En tous les points d'un plan d'onde ***E*** (ou ***B***) a même phase au même instant ***t***. les différents plans d'onde sont parallèles entre eux et se distinguent par la valeur de ***φ(x,t)***.
Soit ***M*** de cordonnées ***x, y, z*** un point du plan d'onde posons : $\boldsymbol{k = k\, u_x}$ et ***r = OM***
La phase ***φ*** s'écrit :

$$\boldsymbol{\varphi = \omega t - kr + \varphi_i}$$

Le vecteur d'onde ***k*** indique le sens de propagation et les plans d'onde sont perpendiculaires à ***k*** et définis par :

$$\boldsymbol{\varphi = \omega t - kr + \varphi_i = constante}$$

La vitesse de phase (ou vitesse de propagation de la phase) est la vitesse de déplacement d'un plan d'onde dans la direction de propagation. Entre les instants ***t*** et ***t + dt*** pour un même plan d'onde, on a :

$$\boldsymbol{\varphi(x,t) = \varphi(x+dx, t+dt) \Longrightarrow \omega t - kx + \varphi_i = \omega t + \omega dt - kx - kdx + \varphi_i}$$

$$\boldsymbol{\Longrightarrow\ \omega dt - kdx = 0}$$

D'où :

$$\boldsymbol{v_\varphi = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}}$$

Dans le vide $\boldsymbol{k = \omega / c}$ d'où :

$$\boldsymbol{v_\varphi = c}$$

Longueur d'onde λ

Pendant une période ***T***, un plan d'onde se déplace dans la direction de propagation dans le vide de :

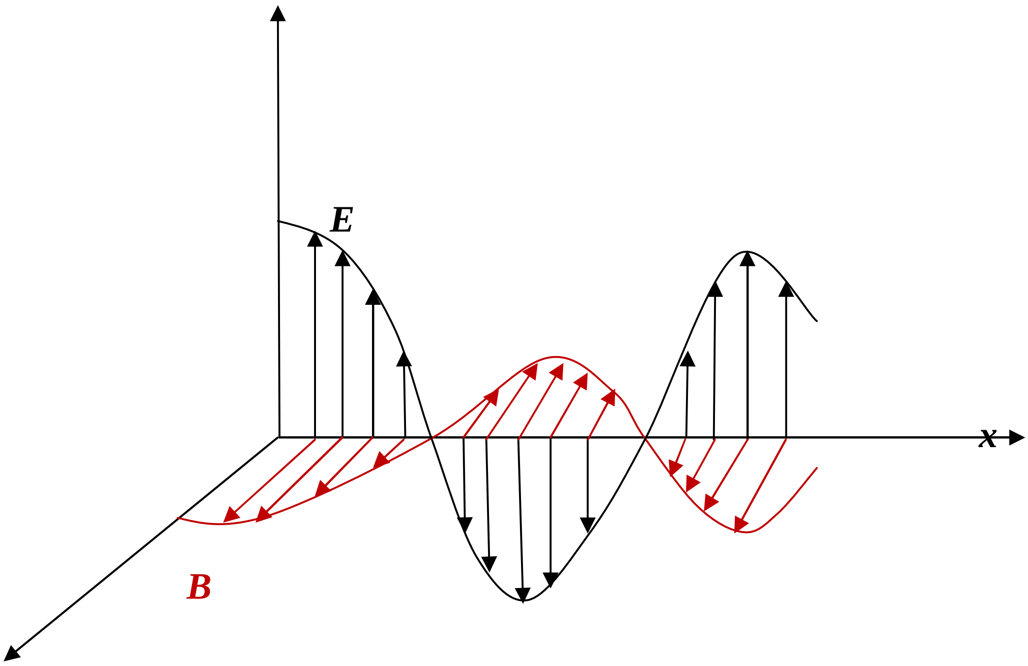
$$\boldsymbol{\lambda = v_\varphi T = cT}$$

$$\boldsymbol{\lambda = 2\pi \frac{c}{\omega} = \frac{2\pi}{k}}$$

A un même instant ***t*** les plans d'onde distants de ***λ*** correspondent à une même valeur de la phase (à 2π près). Il y'a donc une périodicité spatiale de période ***λ*** pour les phases à chaque instant.
Une onde plane progressive sinusoïdale possède donc une double périodicité : périodicité temporelle de période ***T*** et une périodicité spatiale de période ***λ***.

$$\boldsymbol{\omega = \frac{2\pi}{T} \quad ; \quad \upsilon = \frac{1}{T} \quad fréquence}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad ; \quad \sigma = \frac{1}{\lambda} \ \ nombre\ d\ onde$$



CHAPITRE III
RESOLUTION DES EQUATIONS DE MAXWELL DANS LE VIDE

1 Introduction des potentiels

L'introduction des potentiels ***V*** et ***A*** en fonction desquels les champs électrique ***E*** et magnétique ***B*** s'expriment sous forme de dérivées premières permet d'aboutir à des équations différentielles du second ordre (équations de Poisson) dans lesquelles les sources ***ρ*** et ***J*** sont découplées.

La 1ère équation de Maxwell $\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{B} = \mathbf{0}$ exprime que le champ magnétique ***B*** est à flux conservatif, donc on peut lui associer (voir le TD N° 1) un champ de vecteur ***A*** tel que :

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\wedge\boldsymbol{A}$$

On dit que ***B*** dérive d'un potentiel vecteur ***A***.

Remplaçons l'expression de ***B*** dans la 2eme équation de Maxwell :

$$\boldsymbol{\nabla}\wedge\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \Rightarrow \boldsymbol{\nabla}\wedge\boldsymbol{E} = -\frac{\partial(\boldsymbol{\nabla}\wedge\boldsymbol{A})}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}\wedge\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \Longrightarrow \boldsymbol{\nabla}\wedge\left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) = \mathbf{0}$$

Un vecteur dérive d'un potentiel scalaire si et seulement si son rotationnel est nul (voir TD N° 1).

$$\boldsymbol{\nabla}\wedge\left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\phi}$$

On pose $\boldsymbol{\phi} = -\boldsymbol{V}$

Le champ scalaire ***V(r,t)*** est appelé dans le cas général des régimes non permanents potentiel scalaire.

Le champ électromagnétique ***(E,B)*** dérive des potentiels ***(V,A)*** par les relations :

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\wedge\boldsymbol{A}\ ;\ \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{V} - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

2 Indétermination des potentiels

Soit un champ électromagnétique ***(E,B)*** dont on connait un couple ***(V₀,A₀)*** de potentiels. Existe-il d'autres couples de potentiel autre que ***(V₀,A₀)*** qui vérifie :

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\wedge\boldsymbol{A}\ ;\ \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{V} - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

$\boldsymbol{A_0}$ vérifie l'équation précédente et tout champ $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\phi}$ vérifie aussi cette équation car :

$$\boldsymbol{\nabla}\wedge\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla}\wedge(\boldsymbol{A}_0 + \nabla\phi) = \boldsymbol{\nabla}\wedge\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{\nabla}\wedge(\nabla\phi) = \boldsymbol{\nabla}\wedge\boldsymbol{A}_0$$

$$\Rightarrow\ \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{V} - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{V}_0 - \frac{\partial \boldsymbol{A}_0}{\partial t}$$

$$\Longrightarrow\ \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{V}_0 - \boldsymbol{V}) = \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \frac{\partial \boldsymbol{A}_0}{\partial t} = \frac{\partial(\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\phi})}{\partial t} - \frac{\partial \boldsymbol{A}_0}{\partial t} = \frac{\partial(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\phi})}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{V}_0 - \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial t} - \boldsymbol{V}\right) = \mathbf{0}$$

La solution possible est

$$V = V_0 - \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Φ(r,t) étant un champ scalaire quelconque. Si ***(V_0,A_0)*** est un couple de potentiel du champ ***(E,B)***, on peut obtenir d'autres couples ***(V,A)*** de potentiels de ce champ par la transformation de jauge :

$$A = A_0 + \nabla\phi \ ; \ V = V_0 - \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Condition de jauge de Lorentz :

$$\nabla . A + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

3 Equation de Poisson

Introduisons les expressions de ***E*** et ***B*** en fonction de ***V*** et ***A*** dans les équations de Maxwell – Ampère et Maxwell – Gauss :

$$\nabla . E = \nabla . \left(-\nabla V - \frac{\partial A}{\partial t}\right) = -\nabla^2 V - \frac{\partial(\nabla . A)}{\partial t} = -\Delta V - \frac{\partial(\nabla . A)}{\partial t} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Longrightarrow \ \Delta V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

Equation de Poisson

$$\Box V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

$$\nabla \wedge B = \mu_0 \left(J + \varepsilon_0 \frac{\partial\left(-\nabla V - \frac{\partial A}{\partial t}\right)}{\partial t} \right) = \mu_0 J - \mu_0\varepsilon_0 \nabla\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$$

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge A) = \nabla(\nabla . A) - \nabla^2 A = \mu_0 J - \mu_0\varepsilon_0 \nabla\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$$

$$\nabla\left(\nabla . A + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right) = \nabla^2 A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \mu_0 J$$

$$\Delta A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \mu_0 J = 0$$

Equation de Poisson

$$\Box A + \mu_0 J = 0$$

Ces deux équations sont une conséquence des équations de Maxwell et de la jauge de Lorentz.

Remarque

En électrostatique ***ρ*** est fixe (indépendant du temps) $\Box = \Delta$

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

Equation de Poisson

Dans la région de l'espace où ***ρ = 0*** on obtient :

$$\Delta V = 0$$

Equation de Laplace

En magnétostatique (champ magnétique crée par des courants continus) $\square = \Delta$

$$\Delta A + \mu_0 J = 0$$

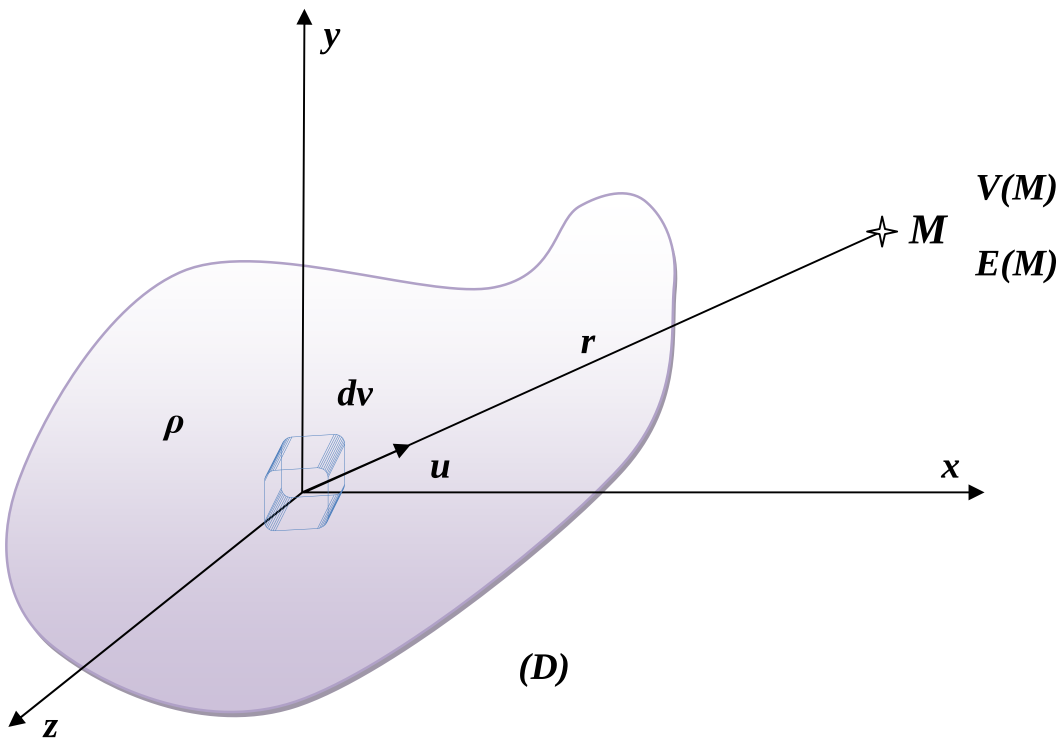
En régime permanent (les charges sont mobiles mais pas d'accumulation de charges $\partial\rho/\partial t = 0$) on obtient les mêmes équations :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \quad ; \quad \Delta A + \mu_0 J = 0$$

4 Résolution des équations de Poisson

4.1 En électrostatique

Soit ***(D)*** une distribution de charge caractérisée par une densité volumique de charges ***ρ*** continue et fixe.



On se propose de calculer le potentiel électrique ***V(M)*** et le champ électrique ***E(M)*** correspondant crées par la source ***ρ*** au point ***M*** de coordonnées ***r = SM***. En résolvant l'équation de Poisson. On suppose que ***V(∞) = 0*** qui est une solution physiquement acceptable. Si la distribution ***(D)*** est d'extension finie la solution est :

$$\boldsymbol{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho}{r}dv}$$

L'intégrale est étendue à ***(D)*** où à tout l'espace.

En prenant les coordonnées de ***M*** on obtient :

$$\boldsymbol{E(M) = -\nabla_M V = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \nabla_M\left(\frac{\rho}{r}\right)dv = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \rho\nabla_M\left(\frac{1}{r}\right)dv}$$

$$\boldsymbol{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \left(\frac{\rho u}{r^2}\right)dv}$$

Remarque

L'expression ainsi déduite de l'équation de Poisson est bien en accord avec la loi de coulomb pour une charge ponctuelle ***q***. En effet, si distribution ***(D)*** ne contient qu'une seule charge ponctuelle : $\boldsymbol{\iiint \rho dv = q}$ on obtient dans ce cas :

$$\boldsymbol{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}u}$$

En régime permanent les charges peuvent être mobiles mais la densité de charge ***ρ(r)*** est indépendante du temps autrement dit il n'a pas de cumule de charge : $\boldsymbol{\partial\rho/\partial t = 0}$ et $\boldsymbol{\partial J/\partial t = 0}$. Toutes les lois d'électrostatique restent valables sauf la loi de Coulomb.

Dans n'importe quel domaine de la physique, si on rencontre une équation de structure mathématique identique à l'équation de Poisson alors on peut utiliser directement la solution précédente pourvu que les conditions aux limites soient identiques.

4.2 En magnétostatique

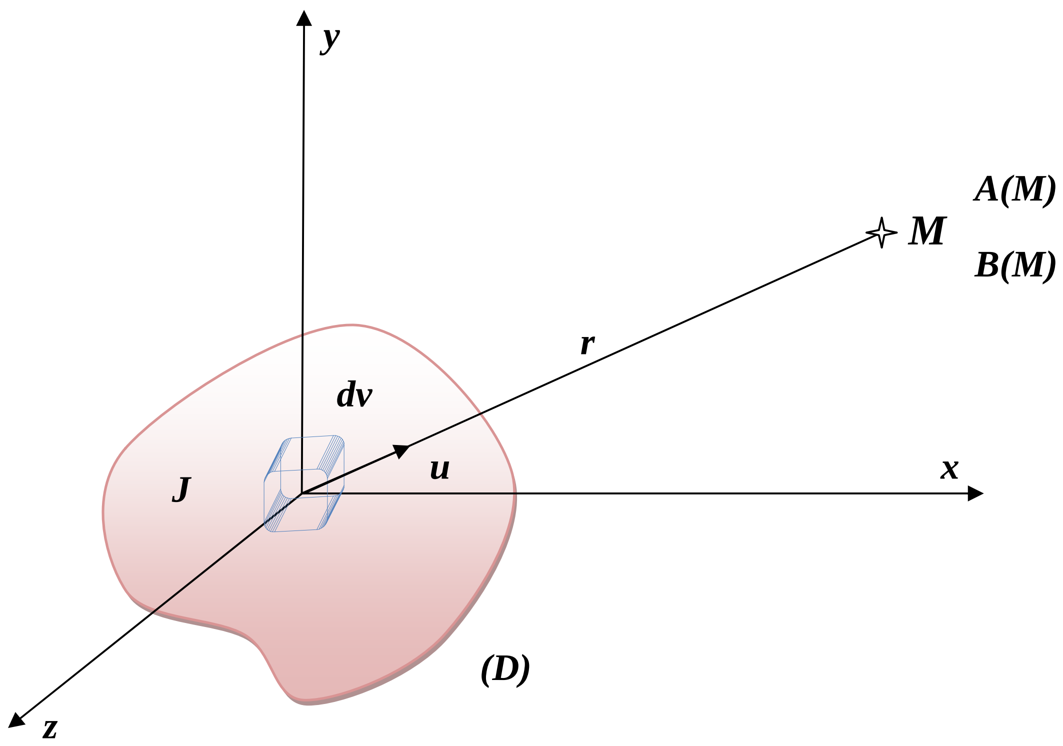
C'est le domaine des champs magnétiques crées par des courants continus

$$\boldsymbol{\Delta A + \mu_0 J = 0}$$

Cette équation est identique à celle de l'électrostatique et les conditions aux limites sont identiques car ***A(∞) = 0***, donc par simple substitution on obtient :

$$\boldsymbol{A = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{J}{r}dv}$$

L'intégrale est étendue à ***(D)*** où à tout l'espace.



Pour calculer le champ ***B(M)*** on calculera le rotationnel de ***A(M)*** :

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{M}} \wedge \boldsymbol{A} = \Delta_{\boldsymbol{M}} \wedge \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\boldsymbol{J}}{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{dv}\right] = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{M}} \wedge \left(\frac{\boldsymbol{J}}{\boldsymbol{r}}\right) \boldsymbol{dv}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{M}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \left[\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r}} (\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{M}} \wedge \boldsymbol{J}) + \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{M}} \left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r}}\right) \wedge \boldsymbol{J}\right] \boldsymbol{dv}$$

Puisque on dérive par rapport aux coordonnées de ***M*** donc : $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{M}} \wedge \boldsymbol{J} = \boldsymbol{0}$. D'autre part on a : $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{M}} \left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r}}\right) = -\frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{r}^2}$ d'où :

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \left(\boldsymbol{J} \wedge \frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{r}^2}\right) \boldsymbol{dv}$$

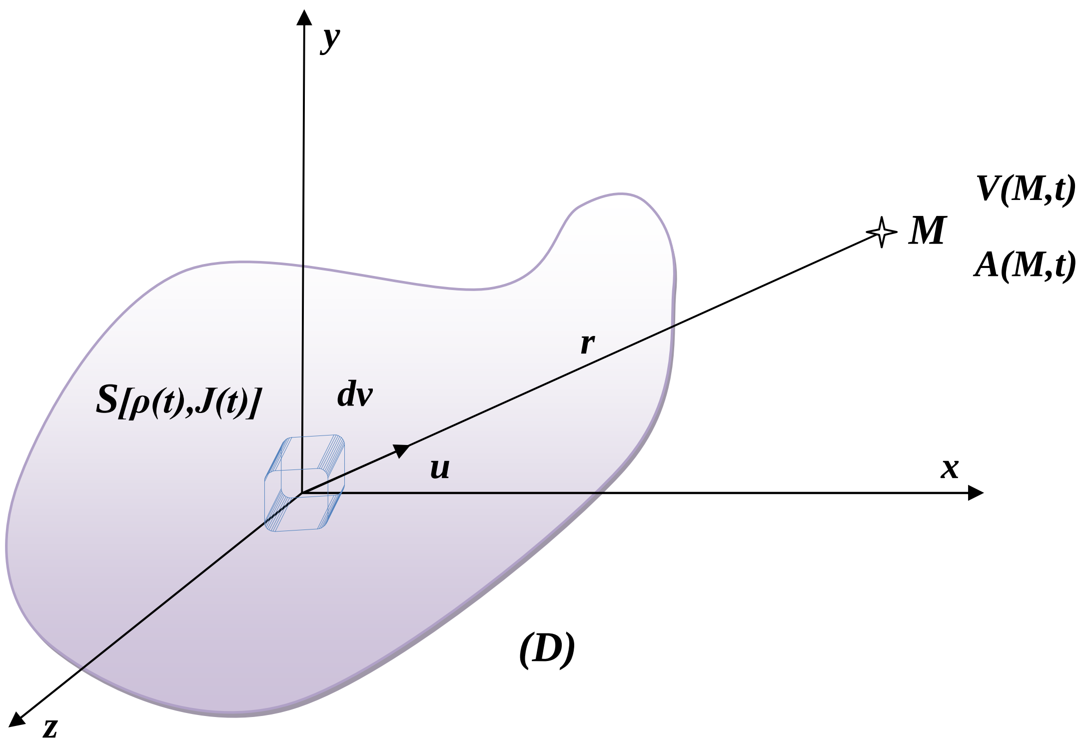
Cette expression de ***B*** est générale, elle est connue sous le nom de loi de Biot et Savart.

4.3 En régime général (régime non permanent)

On se propose de calculer le potentiel électrique ***V(M,t)*** et le potentiel vecteur ***A(M,t)*** crées par la source ***[ρ(t),J(t)]*** au point ***M*** de coordonnées ***r = SM***. En résolvant les deux équations de Poisson. On suppose que ***V(∞,t) = 0*** qui est une solution physiquement acceptable. Si la distribution ***(D)*** est d'extension finie la solution est :

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{t}) = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4\pi\varepsilon_0}} \iiint \frac{\boldsymbol{\rho}\left(\boldsymbol{t} - \frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{c}}\right)}{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{dv}$$

$$A(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{J\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}dv$$



Ce sont les solutions des potentiels retardés, elles sont physiquement acceptables. Ce sont les valeurs de $\boldsymbol{\rho}$ et de $\boldsymbol{J}$ à la date antérieure $t - r/c$ qui interviennent c'est-à-dire un observateur placé en ***M*** est informé des modifications survenues à la source ***S*** avec le retard $\Delta t = r/c$.

5 Approximation des régimes quasi – permanents(ARQP)

Ce régime est défini comme étant un régime ayant des structures lentement variables dans le temps. Les phénomènes électromagnétiques connus avant Maxwell étaient décrits par des équations qui ne différent que par le terme :

$$J_D = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

$\nabla . B = 0$

$\nabla \wedge E = -\frac{\partial B}{\partial t}$

$\nabla . E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$\nabla \wedge B = \mu_0 J$

Ce nouveau système constitue une approximation des lois générales de l'électromagnétisme valable pour le régime lentement variable. Les champs sont liés aux potentiels par :

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{A} \;\; ; \;\; \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{V} - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial \boldsymbol{t}}$$

Conséquences du régime ARQP

a) Le couplage entre ***E*** et ***B*** introduit par $\boldsymbol{J_D}$ est à l'origine du phénomène de propagation. Si l'on supprime $\boldsymbol{J_D}$ on néglige la propagation.

b) $\boldsymbol{\nabla}.(\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{\mu_0 \nabla . J} = \boldsymbol{0} \Longrightarrow \boldsymbol{\nabla . J} = \boldsymbol{0}$

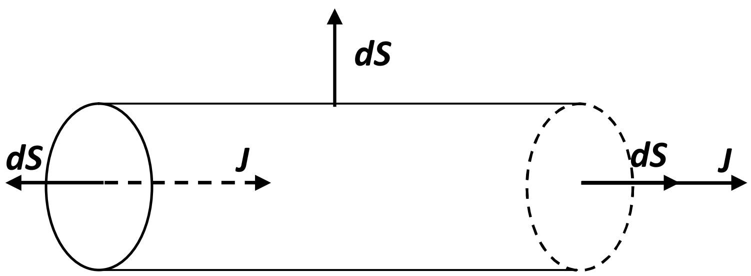
$$\boldsymbol{I} = \oiint_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{J.dS} = \iiint_{\boldsymbol{V}} \boldsymbol{\nabla . J \, dv} = \boldsymbol{0}$$

Où ***V*** et le volume fini délimitée par la surface ***S*** fermée.

$$\boldsymbol{\nabla . J} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{I} = \oiint_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{J.dS} = \boldsymbol{0}$$

Ceci exprime que l'intensité du courant est conservative. Cette propriété est à la base de toute l'électrocinétique (loi des nœuds), c'est-à-dire on peut définir un même courant ***i(t)*** à chaque instant en n'importe quel point d'un même circuit non bifurqué.

Exemple d'un conducteur de section circulaire :



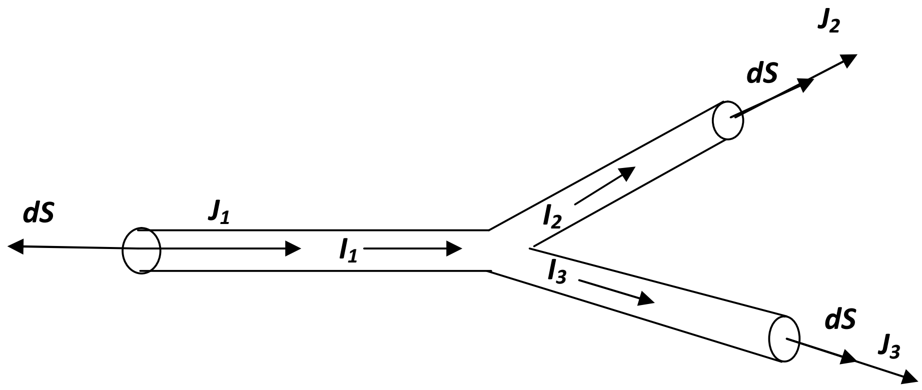
$$\boldsymbol{I} = \oiint_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{J.dS} = \boldsymbol{J.dS \cos \pi} + \boldsymbol{J.dS \cos 0} = \boldsymbol{0}$$

$$I = -\, I_{entrant} + I_{sortant} = 0$$

Le courant entrant dans le conducteur par l'une de ses extrémité est égal au courant sortant par l'autre, autrement dit il n'y a pas d'accumulation de charges.

Pour un circuit bifurqué, o montre facilement que le courant obéit à la loi des nœuds suivante :

$$\boldsymbol{I_1} = \boldsymbol{I_2} + \boldsymbol{I_3}$$



c) La première équation et la quatrième équation de Maxwell sont identiques à celle de la magnétostatique on retrouvera la même équation de Poisson et la condition de jauge :

$$\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{A} = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \wedge (\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{A} = -\Delta \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\mu_0 J}$$

$$\Delta \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\mu_0 J} = \mathbf{0}$$

D'où :

$$\boldsymbol{A(t)} = \frac{\boldsymbol{\mu_0}}{\boldsymbol{4\pi}} \iiint \frac{\boldsymbol{J(t)}}{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{dv}$$

$$\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\nabla}.\left(-\boldsymbol{\nabla V} - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial \boldsymbol{t}}\right) = \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{V} - \frac{\partial(\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{A})}{\partial \boldsymbol{t}} = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}$$

Avec $\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{A} = \mathbf{0}$ on obtient :

$$\Delta \boldsymbol{V} + \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}} = \mathbf{0}$$

D'où :

$$\boldsymbol{V(t)} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{4\pi\varepsilon_0}} \iiint \frac{\boldsymbol{\rho(t)}}{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{dv}$$

Si l'on compare les expressions de ***A(t)*** et ***V(t)*** avec celle de ***A(M,t)*** et ***V(M,t)*** on remarque que l'ARQP revient notamment à négliger le retard ***Δt = r/c***. la condition ***Δt = r/c*** permet de définir le domaine de validité de ce nouveau régime (ARQP) dans le cas d'une distribution dont les densité ***ρ(t)*** et ***J(t)*** varient dans le temps de façon périodique.

Au point M il faut avoir :

$$\Delta \boldsymbol{t} = \frac{\boldsymbol{SM}}{\boldsymbol{c}} \ll \boldsymbol{T}$$

T est la période de l'onde électromagnétique. Elle est reliée à la longueur d'onde $\boldsymbol{\lambda}$ par la relation :

$$\boldsymbol{\lambda = cT}$$

$$\Longrightarrow \Delta t = \frac{SM}{c} \ll \frac{\lambda}{c} \Longrightarrow SM \ll \lambda$$

Exemple :

Le signal à fréquence industrielle : ***f = 50 Hz***, d'où ***T = 1/f = 2.10⁻² s***

$$\boldsymbol{\lambda = cT = 3.10^{8} \times 2.10^{-2} = 6.10^{6}\, m}$$

La dimension ***SM*** de n'importe quel système électrique est négligeable devant $\boldsymbol{\lambda}$.

Le signal de fréquence radio ***f = 1 MHz, T = 10^{-6} s***

$$\boldsymbol{\lambda = cT = 3.10^{8} \times 10^{-6} = 300\, m}$$

1) **Pour les circuits de dimension usuelles (transformateur, moteur ….etc.) l'ARQP est justifiée.**
2) **Dans l'ARQP *B* se calcule de la même façon qu'en magnétostatique, par contre *E* diffère de celui des régimes permanents par la présence du champ électromoteur de Neuman : - ∂A/∂t.**
3) **L'ARQP néglige le phénomène de propagation mais pas les phénomènes d'induction électromagnétique.**

RECAPITULATION

A) Cas général : lorsque les phénomènes dépendent du temps

Première équation de Maxwell (équation du flux magnétique) :

$$\boldsymbol{\nabla . B = 0}$$

Deuxième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Faraday) :

$$\boldsymbol{\nabla \wedge E = -\frac{\partial B}{\partial t}}$$

Troisième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Gauss) :

$$\boldsymbol{\nabla . E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Quatrième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Ampère) :

$$\boldsymbol{\nabla \wedge B = \mu_0 \left(J + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}\right)}$$

Loi de force de Lorentz

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{q}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{B})$$

$$\boldsymbol{f} = \frac{\boldsymbol{dF}}{\boldsymbol{d\tau}} = \boldsymbol{\rho E} + \boldsymbol{J}\wedge\boldsymbol{B}$$

Conservation de la charge :

$$\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{J} = -\frac{\partial\boldsymbol{\rho}}{\partial\boldsymbol{t}}$$

Potentiels :

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\wedge\boldsymbol{A} \qquad ; \qquad \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla V} - \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial\boldsymbol{t}}$$

Jauge de Lorentz :

$$\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{A} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{c}^2}\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial\boldsymbol{t}} = \mathbf{0}$$

Equations de Poisson :

$$\Box\boldsymbol{V} + \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\varepsilon}_0} = \mathbf{0} \qquad ; \qquad \Box\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\mu}_0\boldsymbol{J} = \mathbf{0}$$

Solution des potentiels :

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{t}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\varepsilon}_0}\iiint\frac{\boldsymbol{\rho}\left(\boldsymbol{t}-\frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{c}}\right)}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{dv} \quad ; \quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{t}) = \frac{\boldsymbol{\mu}_0}{\mathbf{4}\boldsymbol{\pi}}\iiint\frac{\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{t}-\frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{c}}\right)}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{dv}$$

B) En régime quasi-permanent : lorsque les grandeurs dépendent du temps mais le phénomène de propagation est négligeable.

Première équation de Maxwell (équation du flux magnétique) :

$$\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{B} = \mathbf{0}$$

Deuxième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Faraday) :

$$\boldsymbol{\nabla}\wedge\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial\boldsymbol{t}}$$

Troisième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Gauss) :

$$\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\varepsilon}_0}$$

Quatrième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Ampère) :

$$\nabla \wedge B = \mu_0 J$$

Loi de force de Lorentz

$$F = q(E + v \wedge B)$$

$$f = \frac{dF}{d\tau} = \rho E + J \wedge B$$

Conservation de la charge :

$$\nabla . J = 0$$

Potentiels :

$$B = \nabla \wedge A \qquad ; \qquad E = -\nabla V - \frac{\partial A}{\partial t}$$

Jauge de Coulomb :

$$\nabla . A = 0$$

Equations de Poisson :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \qquad ; \qquad \Delta A + \mu_0 J = 0$$

Solution des potentiels :

$$V(t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\rho(t)}{r} dv \quad ; \quad A(t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{J(t)}{r} dv$$

<u>C) En régime permanent : lorsque les charges électriques sont mobiles mais les grandeurs sont indépendantes du temps</u> $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

Première équation de Maxwell (équation du flux magnétique) :

$$\nabla . B = 0$$

Deuxième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Faraday) :

$$\nabla \wedge E = 0$$

Troisième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Gauss) :

$$\nabla . E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Quatrième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Ampère) :

$$\nabla \wedge B = \mu_0 J$$

Loi de force de Lorentz

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{q}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B})$$

$$\boldsymbol{f} = \frac{\boldsymbol{dF}}{\boldsymbol{d\tau}} = \boldsymbol{\rho E} + \boldsymbol{J} \wedge \boldsymbol{B}$$

Conservation de la charge :

$$\boldsymbol{\nabla} . \boldsymbol{J} = \boldsymbol{0}$$

Potentiels :

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{A} \qquad ; \qquad \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla V}$$

Jauge de Coulomb :

$$\boldsymbol{\nabla} . \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$$

Equations de Poisson :

$$\Delta \boldsymbol{V} + \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}} = \boldsymbol{0} \qquad ; \qquad \Delta \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\mu_0 J} = \boldsymbol{0}$$

Solution des potentiels :

$$\boldsymbol{V} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4\pi\varepsilon_0}} \iiint \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{dv} \quad ; \quad \boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{\mu_0}}{\boldsymbol{4\pi}} \iiint \frac{\boldsymbol{J}}{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{dv}$$

D) En électrostatique : lorsque les charges électriques sont fixes

Deuxième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Faraday) :

$$\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$$

Troisième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Gauss) :

$$\boldsymbol{\nabla} . \boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}$$

Loi de force de Lorentz

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{qE}$$

$$\boldsymbol{f} = \frac{\boldsymbol{dF}}{\boldsymbol{d\tau}} = \boldsymbol{\rho E}$$

Potentiel :

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla V}$$

Equations de Poisson :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

Solution du potentiel :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\rho}{r} dv$$

E) En magnétostatique : lorsque le champ magnétique est crée par des courants continus

Première équation de Maxwell (équation du flux magnétique) :

$$\nabla . B = 0$$

Quatrième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Ampère) :

$$\nabla \wedge B = \mu_0 J$$

Loi de force de Lorentz

$$F = qv \wedge B$$

$$f = \frac{dF}{d\tau} = J \wedge B$$

Conservation de la charge :

$$\nabla . J = 0$$

Potentiel :

$$B = \nabla \wedge A$$

Jauge de Coulomb :

$$\nabla . A = 0$$

Equations de Poisson :

$$\Delta A + \mu_0 J = 0$$

Solution du potentiel :

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{J}{r} dv$$

CHAPITRE IV

ENERGIE ELECTROMAGNETIQUE DANS LE VIDE

1 Rappel

Soit une distribution continue de charges.

Son énergie électrostatique ***W*** s'exprime :

$$W = \iiint_\tau \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} d\tau = \iiint_\tau \frac{1}{2}\rho V d\tau$$

L'intégrale est étendue à tout l'espace où règne le champ électrostatique ***E***. cette énergie est localisée dans ce champ. La densité volumique ***w*** de l'énergie électrostatique est ainsi :

$$w = \frac{dW}{d\tau} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Exemple : Le champ électrique maximum (au delà duquel il y'a rupture diélectrique de l'air) est ***E = 3.10⁶ V/m***

$$w = \frac{1}{2} \times 8,854.10^{-12} \times 9.10^{12} \approx 40\, J/m^3$$

C'est une valeur très modeste. C'est un inconvénient dans le stockage de l'énergie électrique.

2 Energie du champ électromagnétique

L'énergie se trouve localisée dans le champ électromagnétique ***(E,B)***. Le transport d'énergie par un champ électromagnétique est appelé rayonnement. Exemple :

1) L'énergie solaire nous parvient par l'intermédiaire d'ondes électromagnétique.
2) Une particule électrisée (chargée d'électricité) en mouvement accéléré rayonne de l'énergie.

3 Puissance et vecteur de Poynting

A partir de la 4eme équation de Maxwell :

$$\nabla \wedge B = \mu_0\left(J + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}\right) \Leftrightarrow \nabla \wedge \frac{B}{\mu_0} = J + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

effectuons le produit scalaire suivant :

$$E.\left(\nabla \wedge \frac{B}{\mu_0}\right) = J.E + E.\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{B}{\mu_0}.(\nabla \wedge E) - \nabla.\left(E \wedge \frac{B}{\mu_0}\right) = J.E + \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{\partial E^2}{\partial t}$$

D'après la 2eme équation de Maxwell :

$$\nabla \wedge E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{B}{\mu_0}.(\nabla \wedge E) = \frac{B}{\mu_0}.\left(-\frac{\partial B}{\partial t}\right) = -\frac{1}{2\mu_0}\frac{\partial B^2}{\partial t}$$

D'où :

$$-\frac{1}{2\mu_0}\frac{\partial B^2}{\partial t} - \nabla.\left(E\wedge\frac{B}{\mu_0}\right) = J.E + \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{\partial E^2}{\partial t}$$

$$J.E = -\frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{\partial E^2}{\partial t} - \frac{1}{2\mu_0}\frac{\partial B^2}{\partial t} - \nabla.\left(E\wedge\frac{B}{\mu_0}\right)$$

En intégrant sur tout le volume τ on obtient :

$$\iiint_\tau (J.E)d\tau = -\iiint_\tau \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{\partial E^2}{\partial t} + \frac{1}{2\mu_0}\frac{\partial B^2}{\partial t}\right)d\tau - \iiint_\tau \left(\nabla.\left(E\wedge\frac{B}{\mu_0}\right)\right)d\tau$$

En appliquant le théorème d'Ostrogradski on obtient :

$$\iiint_\tau (J.E)d\tau = -\iiint_\tau \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{\partial E^2}{\partial t} + \frac{1}{2\mu_0}\frac{\partial B^2}{\partial t}\right)d\tau - \oiint_S \left(E\wedge\frac{B}{\mu_0}\right).dS$$

$$\iiint_\tau (J.E)d\tau = -\frac{\partial}{\partial t}\iiint_\tau \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2\right)d\tau - \oiint_S \left(E\wedge\frac{B}{\mu_0}\right).dS$$

S étant la surface qui délimite le volume τ :

$\iiint_\tau (J.E)d\tau$: est la puissance dissipée dans le volume τ sous forme de chaleur par unité de temps.

$\iiint_\tau \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2\right)d\tau$: est l'énergie stockée dans le champ électrique ***E*** et magnétique ***B***.

$-\frac{\partial}{\partial t}\iiint_\tau \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2\right)d\tau$ peut être interprétées comme une diminution de l'énergie emmagasinée.

$-\oiint_S \left(E\wedge\frac{B}{\mu_0}\right)dS$: doit représenter la puissance évacuée vers l'extérieur à travers la surface ***S***. c'est une puissance rayonnée :

$$P(t) = \oiint_S \left(E\wedge\frac{B}{\mu_0}\right).dS = \oiint_S \Pi.dS$$

$$\Pi = E\wedge\frac{B}{\mu_0}$$

Π est le vecteur de Poynting. Il représente la densité de puissance instantanée, c'est un vecteur radiant.

$$\iiint_\tau (\boldsymbol{J}.\boldsymbol{E})d\tau + \oiint_S \boldsymbol{\Pi}.\boldsymbol{dS} = -\frac{\partial}{\partial t}\iiint_\tau \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2\right)d\tau = -\frac{\partial}{\partial t}\iiint_\tau w d\tau$$

En appliquant le théorème d'ostrogradski on obtient :

$$\iiint_\tau (\boldsymbol{J}.\boldsymbol{E})d\tau + \iiint_\tau (\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{\Pi})d\tau = -\frac{\partial}{\partial t}\iiint_\tau w d\tau$$

D'où :

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{\Pi} + \boldsymbol{J}.\boldsymbol{E}$$

C'est l'équation de conservation de l'énergie. Elle a la même structure mathématique que l'équation de la conservation de la charge électrique : $-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{J}$ avec $(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{J}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\Pi})$ mais on remarque que l'équation de la conservation de l'énergie contient un terme de dissipation de chaleur ***J.E***. Autrement dit, l'énergie électromagnétique n'est pas totalement conservée.

Exemple : Dans la protection des animaux et des humains contre le danger des ondes électromagnétiques on doit évaluer le **DAS** (Débit d'Absorption Spécifique) où le **SAR** (Specific absorption rate). Si M_v est la masse volumique du corps on aura :

$$SAR = DAS = \frac{J.E}{M_v} = \frac{\sigma E^2}{M_v} \quad (W/kg)$$

La norme pour le cerveau humain lors de l'utilisation d'un téléphone mobile collé à l'oreille est **DAS ≤ 2 W/kg**.

Analyse vectoriel

Opérateur nabla $\vec{\nabla}$ en coordonnées cartésiennes de vecteurs unitaires $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$:

$$\vec{\nabla}= \vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Opérateur laplacien Δ en coordonnées cartésiennes de vecteurs unitaires $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Opérateur d'alembertien $\square$ en coordonnées cartésiennes de vecteurs unitaires $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$

$$\square=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\ \Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Où ***c*** est la vitesse d'une onde électromagnétique dans le vide (où la vitesse de la lumière)

Applications :

Le gradient d'une fonction scalaire *U* est un vecteur :

$$\vec{\nabla}U=\vec{\imath}\frac{\partial U}{\partial x}+\vec{\jmath}\frac{\partial U}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial U}{\partial z}=\overrightarrow{grad}\ U$$

La divergence d'un vecteur $\vec{A}\ (A_x,A_y,A_z)$ est un scalaire (produit scalaire) :

$$\vec{\nabla}.\vec{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=div\vec{A}$$

Le rotationnel d'un vecteur $\vec{A}\ de\ composantes\ (A_x,A_y,A_z)$ est un vecteur (produit vectoriel) :

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{A}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{\imath}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{\jmath}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}=\overrightarrow{rotA}$$

Laplacien d'une fonction scalaire *U* : $div\ \overrightarrow{grad}\ U=\vec{\nabla}.\vec{\nabla}U=\nabla^2U=\Delta U$

$$\Delta U=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Laplacien d'un vecteur $\vec{A}\ de\ composantes\ (A_x,A_y,A_z)$:

$$\Delta\vec{A}=\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial z^2}$$

D'alembertien d'une fonction scalaire *U* :

$$\square U=\Delta U-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

D'alembertien d'un vecteur $\vec{A}\ de\ composantes\ (A_x,A_y,A_z)$:

$$\square\vec{A}\ =\Delta\vec{A}\ -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}$$

Théorème d'Ostrogradsky :

Soit uns surface fermée ***S*** délimitant un volume $\boldsymbol{\tau}$:

$$\oiiint_{\tau}(\vec{\nabla}.\vec{A})\,d\tau=\oiint_{S}\vec{A}.\overrightarrow{dS}$$

L'intégrale de la divergence d'un vecteur $\vec{A}$, étendue à un volume $\boldsymbol{\tau}$, est égale au flux de ce vecteur sortant de la surface ***S*** qui limite ce volume.

Théorème de Stokes :

Soient un contour fermé ***C***, un élément de déplacement ***dl*** sur ce contour et une surface ***S*** s'appuyant sur ce contour :

$$\oint_C \vec{A}.\overrightarrow{dl} = \iint_S \left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right)\overrightarrow{dS}$$

La circulation d'un vecteur $\vec{A}$ le long d'une courbe fermée ***C*** est égale au flux de son rotationnel sortant de la surface ***S*** délimitée par ***C***.

Applications :

Soient ***f*** un champ scalaire et $\vec{\boldsymbol{A}}$ un champ vectoriel. Vérifier les relations suivantes :

$\vec{\nabla}.\left(f\vec{A}\right) = f\left(\vec{\nabla}.\vec{A}\right) + \vec{A}.\left(\vec{\nabla}f\right)$

$\vec{\nabla}\wedge\left(f\vec{A}\right) = \left(\vec{\nabla}f\right)\wedge\vec{A} + f\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right)$

$\vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{A}\right) - \Delta\vec{A}$

$\vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}f\right) = \vec{0}$

$\vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right) = 0$

Equations de Maxwell dans le vide

Les 4 équations de Maxwell dans un milieu de permittivité ε_0 et de perméabilité μ_0 où règne un champ électromagnétique ($\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}$).

A) Cas général : lorsque les phénomènes dépendent du temps

Première équation de Maxwell (équation du flux magnétique) :

$$\nabla . B = 0$$

Deuxième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Faraday) :

$$\nabla \wedge E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

Troisième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Gauss) :

$$\nabla . E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Quatrième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Ampère) :

$$\nabla \wedge B = \mu_0 \left(J + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right)$$

B) En électrostatique : lorsque les charges électriques sont fixes

$$\nabla \wedge E = 0$$
$$\nabla . E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

C) En magnétostatique : lorsque le champ magnétique est crée par des courants continus

$$\nabla . B = 0$$
$$\nabla \wedge B = \mu_0 J$$

D) En régime permanent : lorsque les charges électriques sont mobiles mais les grandeurs sont indépendantes du temps $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

$$\nabla . B = 0$$
$$\nabla \wedge E = 0$$
$$\nabla . E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
$$\nabla \wedge B = \mu_0 J$$

E) En régime quasi-permanent : lorsque les grandeurs dépendent du temps mais le phénomène de propagation est négligeable.

$$\nabla . B = 0$$
$$\nabla \wedge E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$
$$\nabla . E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
$$\nabla \wedge B = \mu_0 J$$

Exercice 1

Retrouver l'expression de la FEM induite $\boldsymbol{e}$ aux bornes d'une spire à partir de l'équation de Maxwell-Faraday et de la formule de Stokes.

Exercice 2

Retrouver le théorème d'Ampère pour le régime permanent en utilisant la formule de Stockes.

Appliquer le théorème d'Ampère pour calculer l'induction magnétique $\boldsymbol{B(r)}$ à l'intérieur d'un conducteur plein, rectiligne, cylindrique de rayon $\boldsymbol{a}$ et de longueur infini, parcouru par un courant d'intensité $\boldsymbol{I}$ continu de densité $\boldsymbol{J}$ constante.

Exercice 3

Retrouver l'équation de la continuité du courant (ou de conservation de la charge) pour le régime permanent.

Exercice 4

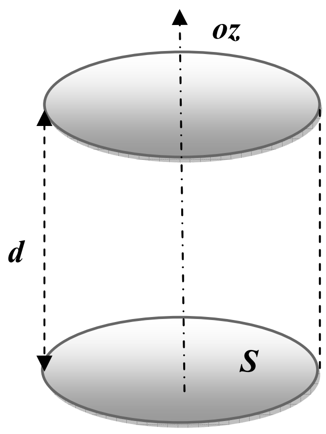
On considère un milieu ohmique de conductivité $\boldsymbol{\sigma}$ (de même valeur en régime permanent qu'en alternatif), de permittivité $\boldsymbol{\varepsilon_0}$ et de perméabilité $\boldsymbol{\mu_0}$. Pour un champ alternatif $\boldsymbol{E}$ de pulsation $\boldsymbol{\omega}$, calculer le rapport $\boldsymbol{\alpha}$ des amplitudes des densités de courant de conduction et de déplacement. Pour $\omega = 2\pi.10^6$ rd/s, faites l'application pour :

Cuivre $\sigma = 6.10^7\ \Omega^{-1}m^{-1}$; sol argileux $\sigma = 10^{-4}\ \Omega^{-1}m^{-1}$; verre $\sigma = 10^{-6}\ \Omega^{-1}m^{-1}$. Qu'en déduisez-vous ?

Exercice 5

On considère deux disques conducteurs parallèles, de surface $\boldsymbol{S}$ et séparés par une distance $\boldsymbol{d}$. Le milieu inter-électrode est supposé ohmique de conductivité $\boldsymbol{\sigma}$ (de même valeur en régime permanent qu'en alternatif), de permittivité $\boldsymbol{\varepsilon_0}$ et de perméabilité $\boldsymbol{\mu_0}$ et on applique une ***ddp*** $\boldsymbol{U(t) = U_0 \cos\omega t}$ entre les électrodes.

1) Calculer la densité du courant de conduction $\boldsymbol{J_c}$ et déduire le courant de conduction $\boldsymbol{I_c}$ en fonction de $\boldsymbol{U(t)}$ et de la résistance $\boldsymbol{R}$ entre les électrodes.
2) Calculer la densité du courant de déplacement $\boldsymbol{J_d}$ et déduire le courant de déplacement $\boldsymbol{I_d}$ en fonction de $\boldsymbol{U(t)}$ et de la capacité $\boldsymbol{C}$ du condensateur.
3) Le milieu étant le verre, on néglige ainsi le courant de conduction et on admet que le champ électrique $\boldsymbol{E(t)}$ est uniforme et parallèle à l'axe $\boldsymbol{Oz}$ (coordonnées cylindriques $\boldsymbol{r, \theta, z}$). Calculer, à partir de l'équation de Maxwell-Ampère, le champ magnétique $\boldsymbol{B(t)}$ dû à la variation du champ électrique entre les armatures en fonction de $\boldsymbol{U(t)}$ et de la coordonnée radiale $\boldsymbol{r}$.



Equation de d'Alembert

Exercice 6

Soit une source ***(ρ, j)*** d'un champ électromagnétique ***(E, B)*** : $\boldsymbol{E(E_x, E_y, E_z)}$ et $\boldsymbol{B(B_x, B_y, B_z)}$. Etablir les équations de propagation du champ électrique ***E*** et de l'induction magnétique ***B*** dans le vide en dehors de la source. Montrer que le champ électrique $E = E_0 \sin\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)a_z$ est une solution de l'équation de propagation de ***E***, où ***c*** est la vitesse de propagation de l'onde et on donne $\varepsilon_0\mu_0 c^2 = 1$.

Trouver l'induction magnétique ***B*** en utilisant l'équation de Maxwell-Faraday et montrer qu'elle est également solution de l'équation de propagation.

Déduire la relation entre les modules **|B|** et **|E|**

Exercice 7

Dans le vide où la charge d'espace est $\rho = 0$ et la densité de courant de conduction est $J = 0$, montrer que l'induction magnétique $B = B_0 \sin\omega\left(t + \frac{y}{c}\right)a_z$ est une solution de l'équation de propagation de B et où c est la vitesse de propagation de l'onde dans le vide.

Trouver le champ électrique ***E*** en utilisant l'équation de Maxwell-Ampère.

Déduire la relation entre les modules **|B|** et **|E|**

Potentiel vecteur A et potentiel scalaire V

Exercice 8

On considère une distribution de charges électriques et de courants à laquelle correspond les potentiels magnétique ***A*** et électrique ***V***. Ces potentiels sont supposés satisfaire à la condition de jauge de Lorentz $\boldsymbol{\nabla . A + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0}$ et on pose $\boldsymbol{A = \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \Pi}{\partial t}}$; où ***Π*** est le vecteur de Hertz.

1) Montrer que ***V*** peut aussi s'exprimer à l'aide de ***Π***.
2) Déduire les expressions du champ électrique ***E*** et du champ magnétique ***B*** en fonction du seul vecteur ***Π***.

Exercice 9

L'équation de d'Alembert dans le vide concernant le potentiel vecteur ***A*** est donnée par l'expression suivante :

$$\nabla^2 . A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0$$

1) Ecrire cette équation pour une seule dimension ***x*** et donner la solution générale.
2) On adopte la jauge de Lorentz et on pose ***u = x- ct***. Déduire l'expression du potentiel scalaire ***V*** en fonction du potentiel vecteur ***A***.
3) On adopte la jauge de Coulomb $\nabla . A = 0$. Déduire le potentiel scalaire ***V*** et retrouver la structure de l'onde plane progressive électrique : $B = \frac{1}{c} n \Lambda E$

Equation de Laplace

Exercice 10

Soient deux sphères concentriques de rayons $\boldsymbol{R_1}$ et $\boldsymbol{R_2}$ où le milieu est de permittivité $\boldsymbol{\varepsilon_0}$ et de densité de charges $\boldsymbol{\rho} = 0$. La sphère interne de rayon $\boldsymbol{R_1}$ est portée à un potentiel ***V = U*** continu constant et la sphère externe de rayon $\boldsymbol{R_2}$ est portée au potentiel ***V = 0***.

Calculer le potentiel $V(r)$ entre les deux sphères où r est la coordonnée radiale.

Calculer le champ électrique $E(r)$ entre les deux sphères.

Application : La sphère interne est la terre de rayon moyen R_1 = 6367 km et la sphère externe est la surface interne de l'ionosphère (couche de Heaviside) de rayon R_2 = 6467 km.
La mesure du champ électrique à la surface de la terre donne $E(R_1)$ = 150 V/m et la mesure de la conductivité au voisinage immédiat du sol donne $\sigma = 23\ 10^{-15}$ S/m. Déduire :

1) La différence de potentiel $U = V(R_1) - V(R_2)$
2) La valeur du champ $E(R_2)$
3) La densité du courant J de conduction à travers la surface de la terre
4) Le courant de conduction I reçu par le globe terrestre

$$\nabla^2 V = \Delta V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi}$$

Exercice 11

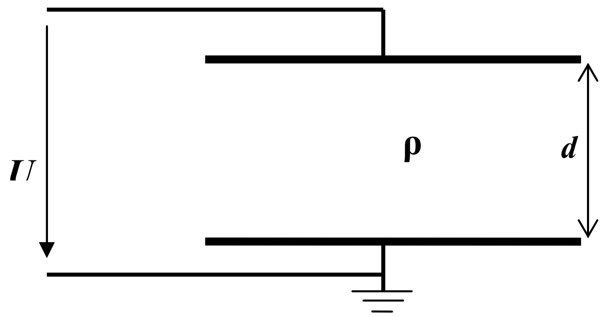
Retrouver les distributions du potentiel $V(r)$ et du champ électrique $E(r)$ entre les deux conducteurs de rayons R_1 et R_2 d'un câble coaxial, de longueur infini suivant son axe z, où le milieu est de permittivité ε_0 et de densité de charges $\rho = 0$. Le conducteur interne de rayon R_1 est portée à un potentiel $V = U$ continu constant et le conducteur externe de rayon R_2 est portée au potentiel $V = 0$.
On donne :

$$\nabla^2 V = \Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Exercice 12

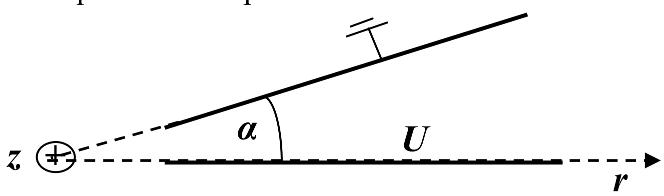
Soient deux électrodes planes et parallèles de dimension infinies distantes de d et une densité de charge ρ constante dans le volume du diélectrique inter électrodes. L'une des électrodes est portée à un potentiel continu U et l'autre est mise à la terre comme l'indique la figure ci-dessous.

1) Donner la distribution du potentiel $V(x)$ et du champ électrique $E(x)$ entre les électrodes.
2) Tracer la variation du champ $E(x)$ pour les valeurs de la densité $\rho = 0$ et $\rho = 2\varepsilon U/d^2$



Exercice 13

On considère deux demi-plans conducteurs infinis suivant les directions r et z, formant un angle α dont l'un est mis à la terre et l'autre porté à un potentiel U. On suppose que le milieu est vide de charge et obéie ainsi à l'équation de Laplace.



Donner les distributions du potentiel électrique V et le champ électrique E

Energie électromagnétique et vecteur de Poynting

Exercice 14

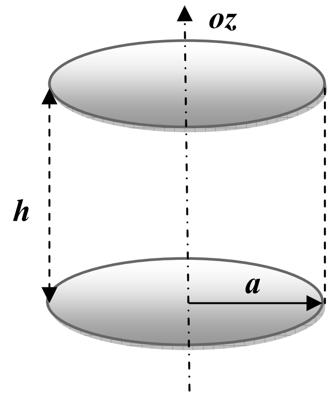
Un condensateur sphérique dont les armatures intérieure et extérieure sont respectivement de rayon R_1 et R_2. L'une des armatures est portée à un potentiel $V(t) = V_0 cos\omega t$ et l'autre est mise à la terre. Le milieu entre les armatures est un diélectrique de permittivité ε_0 et de conductivité nulle (la densité du courant de conduction J_c est négligeable).

1) Donner l'expression du champ électrique ***E(r,t)*** entre les armatures.
2) Calculer la densité du courant de déplacement J_D.
3) Déduire, à partir de J_D, le courant de déplacement I_D en fonction de ***V(t)*** et de la capacité ***C*** du condensateur.
4) Le condensateur est soumis à une **ddp V** continue. Calculer l'énergie emmagasinée ***W*** dans le condensateur en fonction de ***V*** et des rayons R_1 et R_2.

Exercice 15

Deux disques conducteurs de rayon ***a*** de même axe ***oz***, distant de ***h***, formant deux armatures d'un condensateur plan de capacité ***C***. L'une des armatures est portée à un potentiel $V(t) = V_0 \sin\omega t$ et l'autre est mise à la terre. Le milieu entre les armatures est un diélectrique de permittivité ε_0 et de conductivité nulle (la densité du courant de conduction ***J*** est négligeable).

1) Donner l'expression du champ électrique ***E(t)*** supposée uniforme et parallèle à l'axe ***oz***.
2) Calculer la densité du courant de déplacement J_D.
3) Déduire, à partir de J_D, le courant de déplacement I_D en fonction de ***V(t)*** et ***C***
4) Calculer l'énergie emmagasinée ***W*** dans le condensateur en fonction du champ électrique ***E***
5) Déduire l'énergie ***W*** en fonction de la capacité ***C*** du condensateur.



Exercice 16

Un conducteur rectiligne uniforme d'axe ***oz*** et de rayon ***a*** est supposé de longueur infinie. Ce conducteur parcouru par un courant d'intensité ***I*** est placé dans un champ électrique ***E*** uniforme parallèle à l'axe ***oz***. Calculer le vecteur de Poynting Π à une distance $r > a$ de l'axe (donner le module et le sens de Π).

Exercice 17

Deux disques conducteurs de rayon ***r*** distants de ***h***, forment deux armatures d'un condensateur où le diélectrique est de permittivité relative ε_r. L'une des armatures est portée à un potentiel ***V*** continu constant et l'autre est mise à la terre. Calculer l'énergie électromagnétique ***W*** emmagasinée dans ce condensateur à partir de l'expression de la densité de l'énergie électrique. On néglige les effets de bords du condensateur. Application numérique : V = 20 kV ; r = 20 cm ; h = 1 cm ; ε_r = 4 ; ε_0 = 8.54 x10^{-12} F/m.

Exercice 18

Deux disques conducteurs de rayon ***a*** de même axe ***Oz***, distant de ***h***, formant deux armatures d'un condensateur de capacité ***C***. On néglige les effets de bords et en admettant le champ électrique ***E*** parallèle à l'axe ***Oz***.

1) La charge ***Q*** est constante. Exprimer en fonction de ***Q*** et ***C*** l'énergie électromagnétique localisée dans le champ du condensateur.
2) On charge le conducteur, sa charge ***q(t)*** passe de **0** à ***Q***. En admettant que ***E*** reste uniforme et que les lignes du champ ***B*** engendré par la variation de ***E*** sont des cercles d'axe ***Oz***. Exprimer en fonction de ***q*** et de ***dq/dt*** le vecteur de Poynting à la date ***t*** à la distance $r < a$ de ***Oz***.

3) Calculer la puissance reçue par le condensateur à la date t sous forme de rayonnement électromagnétique et retrouver l'expression de l'énergie emmagasinée en fin de charge.

Exercice 19

Retrouver les distributions du potentiel $V(r)$ et du champ électrique $E(r)$ entre les deux conducteurs de rayons R_1 et R_2 d'un câble coaxial, de longueur infini suivant son axe z, où le milieu est de permittivité ε_0 et de densité de charges $\rho = 0$. Le conducteur interne de rayon R_1 est portée à un potentiel $V = U$ continu constant et le conducteur externe de rayon R_2 est portée au potentiel $V = 0$.
On donne :

$$\nabla^2 V = \Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

5) Calculer à partir de la densité de l'énergie électrique w l'énergie électrique W emmagasinée en fonction de la capacité C du condensateur cylindrique et du potentiel U.

6) Le câble est connecté d'un coté à une alimentation délivrant une tension U et de l'autre coté à une charge résistive. Le conducteur interne est ainsi parcourue par un courant d'intensité I et le conducteur externe par le même courant mais de sens inverse. Calculer l'induction magnétique $B(r)$ et le vecteur de Poynting $\Pi(r)$ entre les conducteurs et déduire la puissance P qui transite par le câble.

Exercice 20

Dans le vide on donne le champ électrique d'une onde électromagnétique sous la forme :

$$E(z,t) = 50\cos(\omega t - kz)a_x$$

Trouver la puissance rayonnée à travers une surface circulaire de rayon r = 2,5 m placée dans le plan z = constante.

Impédance d'onde d'un câble coaxial

Exercice 21

Un câble coaxial uniforme supposé de longueur infinie et dont les rayons du conducteur interne et du conducteur externe sont respectivement R_1 et R_2. Le milieu entre les conducteurs est de permittivité ε_0 et de perméabilité μ_0. Un courant i circule dans le conducteur interne et revient en sens inverse par le conducteur externe.

1) Calculer l'induction magnétique B entre les deux conducteurs.
2) Calculer l'inductance L du câble.

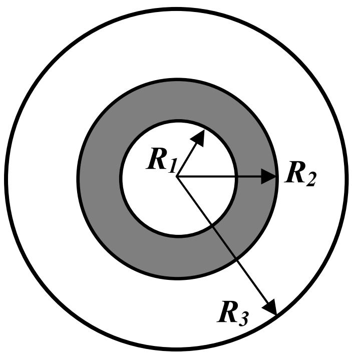
Le conducteur interne est porté à un potentiel V_1 et le conducteur externe est porté à un potentiel V_2.

3) Calculer le champ électrique E entre les conducteurs et déduire la capacité C du câble. Prendre dans les calculs une longueur du câble $l = 1$ m.
4) Déduire la vitesse de propagation c d'une onde électromagnétique se propageant le long de ce câble à partir des expressions de L et de C.

Déduire l'impédance d'onde caractéristique Z du câble.

Exercice 22

On considère deux conducteurs coaxiaux uniformes de longueurs infinies de perméabilité μ_0 et séparés par un isolant de permittivité ε_0 et de perméabilité μ_0. Le conducteur interne est creux et épais de rayons R_1 et R_2 et le conducteur externe est de rayon R_3. La figure ci-dessous représente la section droite du système.



1) Un courant ***i*** circule dans le conducteur interne et revient en sens inverse par le conducteur externe. Calculer l'induction magnétique ***B(r)*** dans les milieux où : $r < R1$; $R1 < r < R2$; $R2 < r < R3$; $r > R3$ et on suppose que la densité de courant est constante dans les conducteurs. Tracer la courbe de variation de ***B*** en fonction de la coordonnée ***r***. Discuter la continuité de l'induction ***B*** à la surface du conducteur interne : à $r = R_1$ et à $r = R_2$
2) Calculer l'induction ***L*** pour une longueur $l = 1m$ du système coaxial.
3) Si le conducteur interne est porté à un potentiel V_1 et le conducteur externe est mis à la terre $V_2 = 0$ et si l'isolant est dépourvu de charge ($\rho = 0$) le milieu entre les électrodes est alors régi par l'équation de Laplace où le potentiel électrique ***V*** ne dépend que de la coordonnée ***r***. Déterminer dans ce cas la distribution du potentiel ***V(r)*** et déduire le champ électrique ***E(r)*** entre les électrodes. On donne :
$$\nabla^2 V = \Delta V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)$$
4) Déduire la capacité ***C*** du système pour une longueur $l = 1\ m$.
5) Déduire la vitesse ***c*** d'une onde électromagnétique se propageant le long du système à partir des expressions de ***L*** et ***C*** ainsi que l'impédance d'onde caractéristique ***Z*** du système.

Exercice 23

Dans le vide on donne le champ électrique d'une onde électromagnétique sous la forme : $E = E_0 \cos\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)a_y$

1) Donner l'expression de la phase φ et du vecteur d'onde ***k***.
2) Montrer que ***c*** est la vitesse de phase de l'onde.
3) Retrouver l'expression de l'induction magnétique associée au champ électrique.

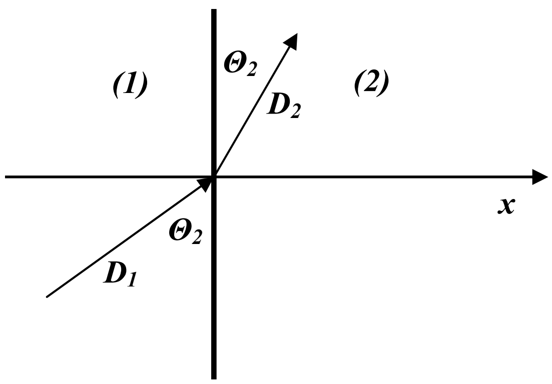
Conditions aux limites entre deux milieux

Exercice 24

Soit un système d'électrodes planes séparées par une distance 2***d*** et soumis à une ddp ***U***. Le diélectrique est composé de 2 couches de même épaisseur d mais de permittivités relatives différentes. Calculer les champs électriques E_1 dans le milieu (1) et le champ E_2 dans le milieu (2) en fonction de U, d, ε_{r1} et ε_{r2}.
On donne $U = 200$ V ; $d = 1$ cm ; $\varepsilon_{r1} = 1$ et $\varepsilon_{r2} = 6$. Comparer les deux champs électriques et que peut-on en conclure.

Exercice 24

La région **(1)** définie par $x < 0$ est le vide et la région **(2)** est un milieu diélectrique pour lequel la permittivité relative $\varepsilon_r = 2.4$. On donne l'induction électrique $D_1 = 3a_x - 4\,a_y + 6\,a_z$ **C/m³**.
Trouver le champ électrique E_2 dans le milieu **(2)** et les angles θ_1 et θ_2



RECAPITULATION

A) Cas général : lorsque les phénomènes dépendent du temps

Première équation de Maxwell (équation du flux magnétique) : $\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{B} = \mathbf{0}$

Deuxième équation de Maxwell (équation de Maxwell-Faraday) : $\boldsymbol{\nabla}\wedge\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial \boldsymbol{t}}$

Troisième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Gauss) : $\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}$

Quatrième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Ampère) : $\boldsymbol{\nabla}\wedge\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\mu_0}\left(\boldsymbol{J} + \boldsymbol{\varepsilon_0}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{t}}\right)$

Loi de force de Lorentz **:** $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{q}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{B})$ **;** $\boldsymbol{f} = \frac{d\boldsymbol{F}}{d\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{\rho E} + \boldsymbol{J}\wedge\boldsymbol{B}$

Equation de la conservation de la charge (ou équation de la continuité du courant): $\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{J} = -\frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial \boldsymbol{t}}$

Potentiels : $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\wedge\boldsymbol{A}$; $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla V} - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial \boldsymbol{t}}$

Jauge de Lorentz : $\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{A} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{c}^2}\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{t}} = \mathbf{0}$

Equations de Poisson : $\Box\boldsymbol{V} + \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}} = \mathbf{0}$; $\Box\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\mu_0 J} = \mathbf{0}$

Solution des potentiels : $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{t}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}\boldsymbol{\pi\varepsilon_0}}\iiint \frac{\boldsymbol{\rho}\left(\boldsymbol{t}-\frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{c}}\right)}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{dv}$; $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{t}) = \frac{\boldsymbol{\mu_0}}{\mathbf{4}\boldsymbol{\pi}}\iiint \frac{\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{t}-\frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{c}}\right)}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{dv}$

Les champs : $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{t}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}\boldsymbol{\pi\varepsilon_0}}\iiint \frac{\boldsymbol{\rho}\left(\boldsymbol{t}-\frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{c}}\right)}{\boldsymbol{r}^2}\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{dv}$; $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{t}) = \frac{\boldsymbol{\mu_0}}{\mathbf{4}\boldsymbol{\pi}}\iiint \boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{t}-\frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{c}}\right)\wedge\frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{r}^2}\boldsymbol{dv}$

B) En régime quasi-permanent : lorsque les grandeurs dépendent du temps mais le phénomène de propagation est négligeable.

Première équation de Maxwell (équation du flux magnétique) : $\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{B} = \mathbf{0}$

Deuxième équation de Maxwell (équation de Maxwell-Faraday) : $\boldsymbol{\nabla}\wedge\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial \boldsymbol{t}}$

Troisième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Gauss) : $\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}$

Quatrième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Ampère) : $\boldsymbol{\nabla}\wedge\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\mu_0 J}$

Loi de force de Lorentz : $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{q}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{B})$; $\boldsymbol{f} = \frac{d\boldsymbol{F}}{d\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{\rho E} + \boldsymbol{J}\wedge\boldsymbol{B}$

Equation de la conservation de la charge (ou équation de la continuité du courant): $\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{J} = \mathbf{0}$

Potentiels : $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\wedge\boldsymbol{A}$; $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla V} - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial \boldsymbol{t}}$

Jauge de Coulomb : $\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{A} = \mathbf{0}$

Equations de Poisson : $\Delta\boldsymbol{V} + \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}} = \mathbf{0}$; $\Delta\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\mu_0 J} = \mathbf{0}$

Solution des potentiels : $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{t}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}\boldsymbol{\pi\varepsilon_0}}\iiint \frac{\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{t})}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{dv}$; $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t}) = \frac{\boldsymbol{\mu_0}}{\mathbf{4}\boldsymbol{\pi}}\iiint \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{t})}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{dv}$

Les champs : $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{t}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}\boldsymbol{\pi\varepsilon_0}}\iiint \frac{\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{t})}{\boldsymbol{r}^2}\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{dv}$; $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{t}) = \frac{\boldsymbol{\mu_0}}{\mathbf{4}\boldsymbol{\pi}}\iiint \boldsymbol{J}(\boldsymbol{t})\wedge\frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{r}^2}\boldsymbol{dv}$

C) En régime permanent : lorsque les charges électriques sont mobiles mais les grandeurs sont indépendantes du temps $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

Première équation de Maxwell (équation du flux magnétique) : $\boldsymbol{\nabla . B = 0}$

Deuxième équation de Maxwell (équation de Maxwell-Faraday) : $\boldsymbol{\nabla \wedge E = 0}$

Troisième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Gauss) : $\boldsymbol{\nabla . E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$

Quatrième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Ampère) : $\boldsymbol{\nabla \wedge B = \mu_0 J}$

Loi de Force de Lorentz : $\boldsymbol{F = q(E + v \wedge B)}$; $\boldsymbol{f = \frac{dF}{d\tau} = \rho E + J \wedge B}$

Equation de la conservation de la charge (ou équation de la continuité du courant) : $\boldsymbol{\nabla . J = 0}$

Potentiels : $\boldsymbol{B = \nabla \wedge A}$; $\boldsymbol{E = -\nabla V}$

Jauge de Coulomb : $\boldsymbol{\nabla . A = 0}$

Equations de Poisson : $\boldsymbol{\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0}$; $\boldsymbol{\Delta A + \mu_0 J = 0}$

Solution des potentiels : $\boldsymbol{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\rho}{r} dv}$; $\boldsymbol{A = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{J}{r} dv}$

Les champs : $\boldsymbol{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\rho}{r^2} u \, dv}$; $\boldsymbol{B = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint J \wedge \frac{u}{r^2} dv}$

D) En électrostatique : lorsque les charges électriques sont fixes

Deuxième équation de Maxwell (équation de Maxwell-Faraday) : $\boldsymbol{\nabla \wedge E = 0}$

Troisième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Gauss) : $\boldsymbol{\nabla . E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$

Loi de force de Lorentz : $\boldsymbol{F = qE}$; $\boldsymbol{f = \frac{dF}{d\tau} = \rho E}$

Potentiel : $\boldsymbol{E = -\nabla V}$

Equation de Poisson : $\boldsymbol{\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0}$

Solutions du potentiel et du champ : $\boldsymbol{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\rho}{r} dv}$; $\boldsymbol{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\rho}{r^2} u \, dv}$

E) En magnétostatique : lorsque le champ magnétique est crée par des courants continus

Première équation de Maxwell (équation du flux magnétique) : $\boldsymbol{\nabla . B = 0}$

Quatrième équation de Maxwell (équation de Maxwell – Ampère) : $\boldsymbol{\nabla \wedge B = \mu_0 J}$

Loi de force de Lorentz : $\boldsymbol{F = qv \wedge B}$; $\boldsymbol{f = \frac{dF}{d\tau} = J \wedge B}$

Equation de la conservation de la charge (ou équation de la continuité du courant): $\boldsymbol{\nabla . J = 0}$

Potentiel : $\boldsymbol{B = \nabla \wedge A}$

Jauge de Coulomb : $\boldsymbol{\nabla . A = 0}$

Equation de Poisson : $\boldsymbol{\Delta A + \mu_0 J = 0}$

Solutions du potentiel et du champ : $\boldsymbol{A = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{J}{r} dv}$; $\boldsymbol{B = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint J \wedge \frac{u}{r^2} dv}$