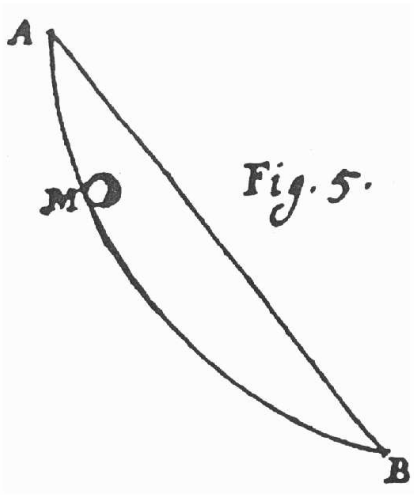
Commande optimale des systèmes dynamiques

Cours 1

Introduction et historique



Renseignements pratiques

Enseignant Denis Arzelier : Directeur de recherche au LAAS-CNRS

Contacts Tel : 05 61 33 64 76 - email : arzelier@laas.fr

Web-page http ://homepages.laas.fr/~arzelier/cours.html

Organisation du cours

❶ 16 séances 1h15 : 20h00

- ➪ Cours magistral et bureaux d'études
- ➪ Support de cours : transparents
- ➪ Exercices sur feuille

Enseignant Richard Epenoy : Ingénieur CNES

Organisation du cours

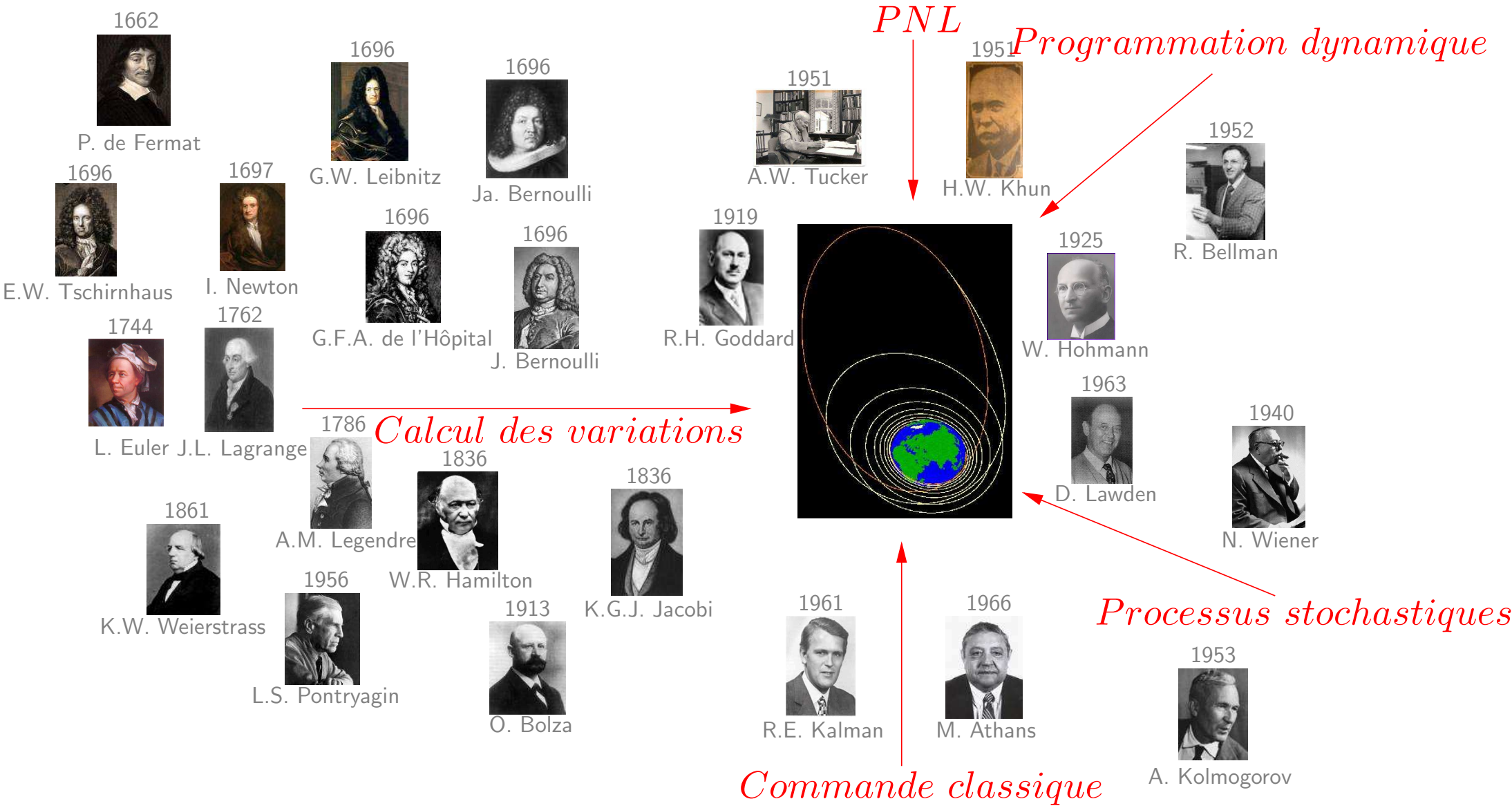
❷ 8 séances 1h15 : 10h00

- ➪ Cours magistral et bureau d'études sur une application spatiale
- ➪ Support de cours : transparents
- ➪ Support MATLAB

❸ 1 Examen 2h30

Durée totale : 30h

Survol historique thématique



Le problème de calcul des variations est défini sur l'espace de Banach $\mathcal{C}^1([t_0, t_f], \mathbb{R}^n)$

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x \in \mathcal{C}^1([t_0,t_f],\mathbb{R}^n)} & J(x, t_f) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_f} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt + \psi_0(t_0, x(t_0), t_f, x(t_f)) \\ \text{sous} & \Phi(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0 \\ & \psi(t_0, x(t_0), t_f, x(t_f)) = 0 \\ & x(t_0) = x_0 \\ & x(t_f) = x_f \quad t_f \text{ libre ou fixé} \end{array}$$

avec :

- $J(x, t_f)$ est une fonctionnelle de Bolza (Lagrange pour $\psi_0 \equiv 0$, Mayer pour $L \equiv 0$)
- $L \ : \ V \to \mathbb{R}$ fonction $\mathcal{C}^1$ appelé Lagrangien
- $\psi_0 \ : \ W \to \mathbb{R}$ fonction $\mathcal{C}^1$
- $\psi \ : \ W \to \mathbb{R}^p$ fonction $\mathcal{C}^1$ définit les conditions de bord ou conditions aux limites
- $\Phi \ : \ V \to \mathbb{R}^s$ fonction $\mathcal{C}^1$ définit les contraintes de phase ou contraintes holonomes si $\Phi(t, x(t)) = 0$
- V est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et W un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

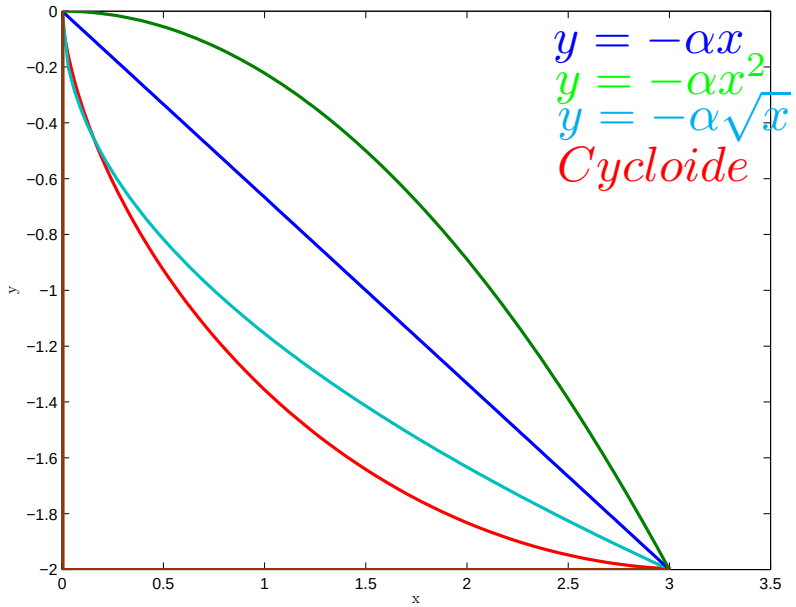
CV : exemple du brachistochrone

Si dans un plan vertical deux points A et B sont donnés, alors il est demandé de spécifier l'orbite AMB d'un point mobile M, le long de laquelle, partant de A, et sous la seule influence de son propre poids, il arrive en B en un temps le plus court.

Jean Bernoulli, Acta Eruditorum, juin 1696

Contributeurs :

- 1638 - Galiléo Galilée (Arc de cercle)
- 1696 - Jean et Jacob Bernoulli
- 1697 - Isaac Newton
- 1696 - Gottfried Wilhelm Leibnitz
- 1696 - Guillaume-François-Antoine de Sainte Mesme de l'Hôpital
- 1696 - Ehrenfried Walther von Tschirnhaus



Formulation du brachistochrone pour le CV

Soit $C(t)$ la courbe paramétrée par t et définie par ses coordonnées cartésiennes $(x(t), y(t))$ vérifiant l'équation suivante $y = f(x)$ de $A(0,0)$ vers $B(a,b) = (3,-2)$

Mise en équations :

- Déplacement infinitésimal :

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} dx$$

- Théorème de l'énergie cinétique :

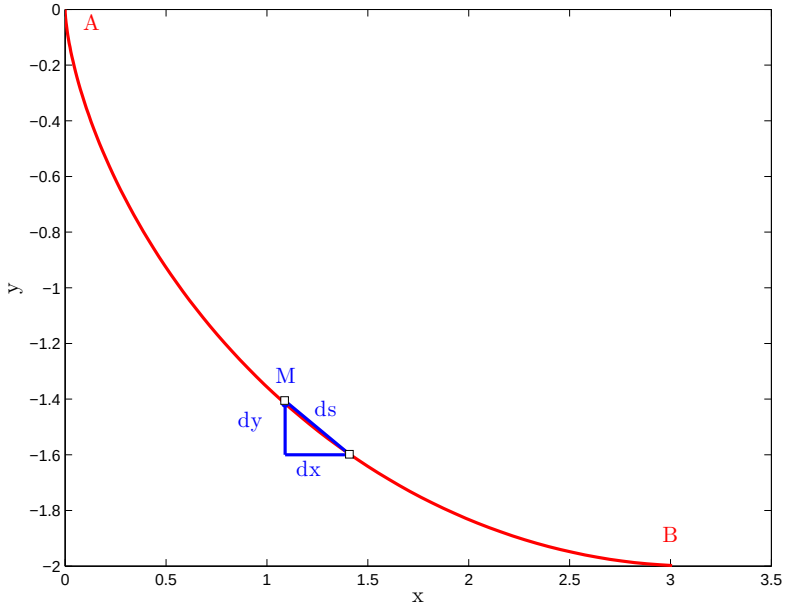
$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$$

- Temps de parcours infinitésimal :

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \frac{\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} dx}{\sqrt{2gy}}$$

- Temps total :

$$T = \int_0^{s(t_f)} \frac{ds}{\sqrt{2gy}}$$



Problème de calcul des variations :

$$\min_x \int_0^a \frac{\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}}{\sqrt{2gy}} dx$$

$$\text{sous} \quad y(x(0)) = 0$$

$$y(a) = b$$

Solution du brachistochrone par Jean Bernoulli

La courbe solution doit suivre le trajet de la lumière dans un milieu où la vitesse augmente selon l'accélération terrestre (g).

Mise en équations :

- Théorème de l'énergie cinétique :

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$$

- Loi de la réfraction (loi de Snell - 1625) :

$$\frac{\sin\theta}{v} = K = \frac{\sin\theta}{\sqrt{2gy}}$$

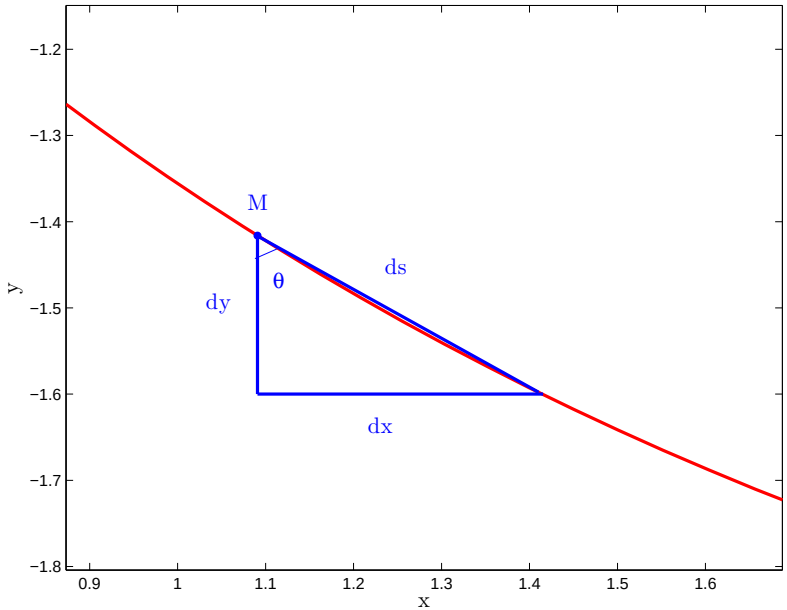
1- La vitesse est nulle en A

2- La vitesse est bornée par $v_{max} = \sqrt{2g|b|}$

$$\frac{1}{\sqrt{2g|b|}} = K$$

- Trajectoire sur une courbe :

$$\sin\theta = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$



$$y\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) = \frac{1}{2gK^2} = |b|$$

Opposée d'une cycloïde générée par un cercle de diamètre $|b|$

- Problèmes isopérimétriques :

$$\min_{x\in\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})} \int_a^b L(t,x,\dot{x})dt, \text{ sous } x(a)=x_1,\ x(b)=x_2,\ G(x)=\int_a^b g(t,x,\dot{x})dt = l$$

pb. de Didon :

$$\max_{x\in\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})} \int_a^b x dt, \text{ sous } b-a\leq L,\ \int_a^b (1+\dot{x}^2)^{1/2}dt = L$$

- Problèmes de Newton (surfaces de révolution de plus faible résistance en mouvement dans un fluide) :

$$\min_{x\in\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})} \int_a^b 2\pi x \frac{\dot{x}^2}{1+\dot{x}^2}dt, \text{ sous, } x(a)=x_1,\ x(b)=x_2$$

- Principes de mécanique (principe de moindre action de Maupertuis (1744)) :

$$\min_{x\in\mathcal{C}^1([t_a,t_b],\mathbb{R}^{3N})} S = \int_{t_a}^{t_b} T(x)-U(t,x)dt$$

« Lorsqu'il arrive quelque changement dans la nature, la quantité d'action nécessaire pour ce changement est la plus petite possible »

Le problème de commande optimale est défini sur l'espace
$\mathcal{KC}^1([t_0, t_f], \mathbb{R}^n) \times \mathcal{KC}^0([t_0, t_f], \mathbb{R}^m)$

$$\begin{aligned}
\min \quad & J(x,u) = \int_{t_0}^{t_f} L(t, x(t), u(t))dt + \psi_0(t_f, x(t_f)) \\
\text{sous} \quad & \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \\
& \psi(t_0, x(t_0), t_f, x(t_f)) = 0 \quad t_0,\ t_f \text{ libres ou fixés} \\
& u(t) \in \mathcal{U} \text{ espace topologique de } \mathcal{KC}^0([t_0, t_f], \mathbb{R}^m)
\end{aligned}$$

avec :

- L : $V \to \mathbb{R}$ fonction $\mathcal{C}^1$ appelé Lagrangien
- ψ_0 : $W \to \mathbb{R}$ fonction $\mathcal{C}^1$
- ψ : $W \to \mathbb{R}^p$ fonction $\mathcal{C}^1$ définit les conditions de bord ou conditions aux limites
- f : $V \to \mathbb{R}^n$ fonction $\mathcal{C}^1$ définit les contraintes dynamiques
- V est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et W un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

- Problème de Cauchy : existence et unicité de la solution de
  $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)),\ x(t_0) = x_0$
  1- L'hypothèse $u(t)$ continue par morceaux + $f(.)$ $\mathcal{C}^1$ $\Rightarrow$ existence et unicité de la solution de la contrainte différentielle avec $x(t) \in \mathcal{KC}^1([t_0, t_f], \mathbb{R}^n)$ (différentiable partout sauf en les points de discontinuité de $u(t)$)
  2- $u(t) \in \mathcal{L}^\infty_{loc}([t_0, t_f], \mathbb{R}^m)$ + $f(.)$ $\mathcal{C}^1$ $\Rightarrow$ existence et unicité de la solution de la contrainte différentielle avec $x(t) \in \mathcal{AC}([t_0, t_f], \mathbb{R}^n)$
- Equivalence des pb. de Lagrange ($\psi_0 = 0$), pb. de Mayer ($L = 0$) et pb. de Bolza

➪ Problème de Mayer :

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x^0 & x \end{bmatrix}',\ \dot{x}^0(t) = L(t, x, u),\ x^0(t_0) = 0$$

➪ Problème de Lagrange :

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x^0 & x \end{bmatrix}',\ \dot{x}^0(t) = 0,\ x^0(t_f) = \frac{1}{t_f - t_0}\psi_0(t_f, x(t_f))$$

Enoncé du problème : *soit une fusée de masse $m(t)$ devant alunir (accélération de la gravité sur la lune (g) en douceur (avec une vitesse $v(t)$ nulle à l'arrivée) à partir d'une hauteur donnée h_0 et avec une vitesse initiale donnée v_0 et en utilisant une poussée $T(t)$ toujours orientée dans le sens inverse de sa chute.*

Mise en équations :

- Equations dynamiques :

$$\dot{h}(t) = v(t)$$
$$\dot{v}(t) = -g + \frac{T(t)}{m(t)}$$
$$\dot{m}(t) = -\frac{T(t)}{\alpha}$$

- Conditions aux limites :

$$h(0) = h_0 > 0,\ v(0) = v_0 \leq 0,\ m(0) = M + F$$
$$h(t_f) = 0,\ v(t_f) = 0,\ m(t_f) \geq M$$

- $J(t_f) = -\int_0^{t_f} \dot{m}(t)dt = m(0) - m(t_f)$
- Contraintes : $0 \leq T(t) \leq \mu$

Problème de Lagrange à temps final libre :

$$\min_{0\leq u(t)\leq 1} \quad -\int_0^{t_f} \dot{x}_3(t)dt = \int_0^{t_f} \sigma u(t)dt$$

sous

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

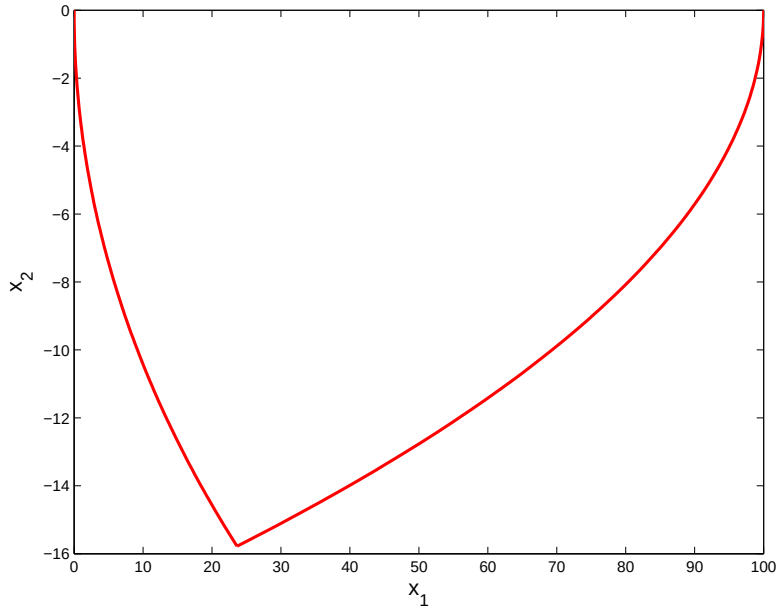
$$\dot{x}_2(t) = -g + \sigma\alpha\frac{u(t)}{x_3(t)}$$

$$\dot{x}_3(t) = -\sigma u(t),\ x_1(0) = h_0 > 0$$

$$x_2(0) = v_0 \leq 0$$

$$x_3(0) = M + F,\ x_1(t_f) = 0$$

$$x_2(t_f) = 0,\ M + F \geq x_3(t_f) \geq M,\ 0 \leq u(t) \leq \mu$$



Nota :

- Problème en consommation minimale
- Problème à temps final libre et avec contraintes inégalités sur la commande et l'état final

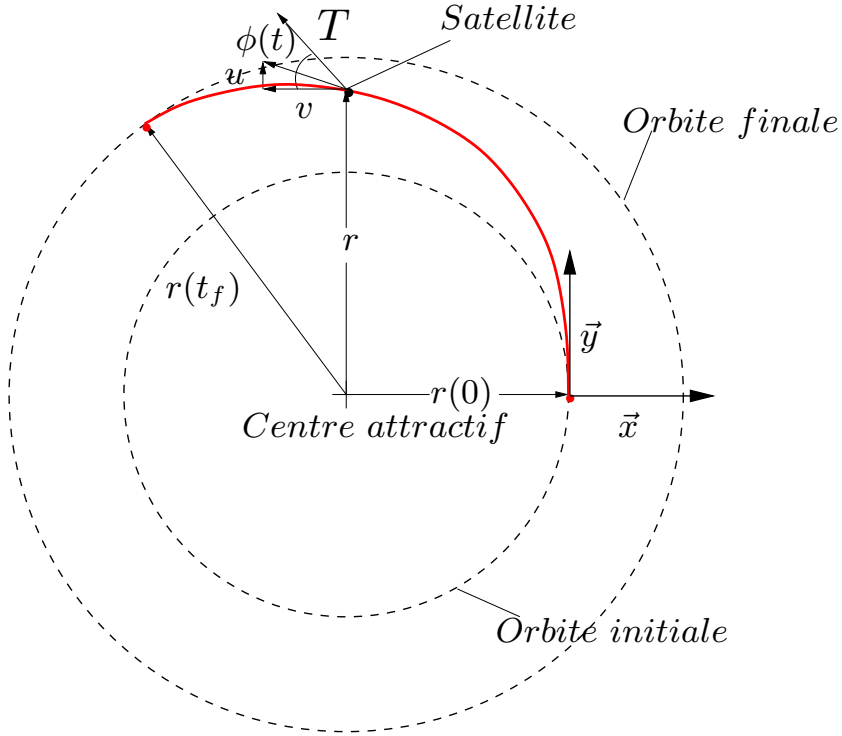
CO : exemple du transfert orbital

Enoncé du problème : *soit une fusée de masse $m(t)$ devant atteindre en un temps minimal (t_f) l'orbite circulaire de rayon donné ($r(t_f)$) à partir d'une orbite circulaire donnée $r(0)$ et avec une vitesse initiale donnée v_0, en utilisant une poussée constante T dont l'orientation $\phi(t)$ peut varier.*

Mise en équations :

- Equations dynamiques :

$$\dot{r}(t) = u(t)$$
$$\dot{u}(t) = \frac{v^2(t)}{r} - \frac{\mu}{r^2} + \frac{T\sin\phi}{m_0 - |\dot{m}(t)|t}$$
$$\dot{v}(t) = -\frac{uv}{r} + \frac{T\cos\phi}{m_0 - |\dot{m}(t)|t}$$



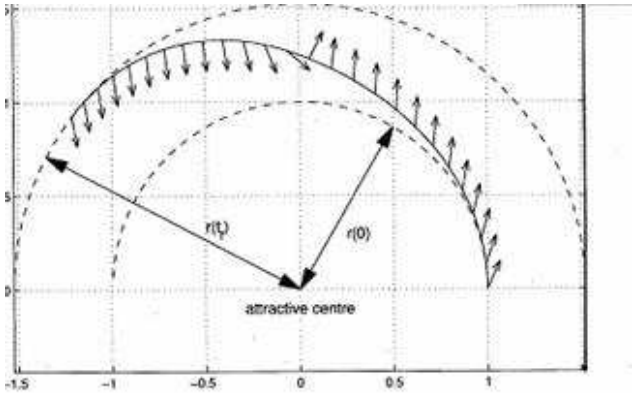
- Conditions aux limites :

$$r(0) = r_0 > 0,\ u(0) = 0,\ v(0) = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}}$$
$$u(t_f) = 0,\quad v(t_f) = \sqrt{\frac{\mu}{r(t_f)}},\ r(t_f) = r_f$$

- Fonctionnelle : $J(t_f) = \displaystyle\int_0^{t_f} dt = t_f$

Problème de Mayer en temps minimum :

$$
\begin{aligned}
\min_{u(t)} \quad & t_f \\
\text{sous} \quad & \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\
& \dot{x}_2(t) = \frac{x_3^2(t)}{x_1} - \frac{\mu}{x_1^2} + \frac{T \sin u}{m_0 - |\dot{m}(t)|t} \\
& \dot{x}_3(t) = -\frac{x_2 x_3}{x_1} + \frac{T \cos u}{m_0 - |\dot{m}(t)|t} \\
& x_1(0) = r_0 > 0, \; x_2(0) = 0 \\
& x_3(0) = \sqrt{\frac{\mu}{x_1(0)}} \\
& x_2(t_f) = 0, \; x_3(t_f) = \sqrt{\frac{\mu}{x_1(t_f)}}, \; x_1(t_f) = r_f
\end{aligned}
$$



Nota :

- Problème en temps minimal
- Problème à temps final libre et sans contraintes inégalités

Résolution d'un problème de CO

❶ Modélisation mathématique du problème de commande optimale

- ➪ Différents groupes de variables (état, commande)
- ➪ Fonctionnelle de coût (Lagrange 1762, Mayer 1878, Bolza 1913)
- ➪ Contrainte différentielle (équation dynamique)
- ➪ Conditions aux limites (initiales, terminales)
- ➪ Contraintes algébriques (inégalités, égalités, ensembles, espaces)
- ➪ Ensemble d'hypothèses (continuité, différentiabilité)

❷ Caractérisation d'un optimum

- ➪ Conditions nécessaires (variation d'ordre 1, principe du maximum)
- ➪ Conditions suffisantes (variation du deuxième ordre)
- ➪ Théorie de Hamilton-Jacobi

❸ Résolution des conditions d'optimalité

- ➪ Approche exacte
- ➪ Méthodes numériques

Pré-requis

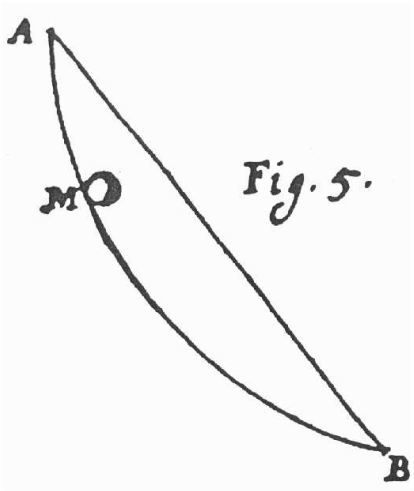
- Mathématiques :
  - ➪ Algèbre linéaire de base
  - ➪ Calcul différentiel et intégral
  - ➪ Eléments d'analyse fonctionnelle
  - ➪ Programmation non linéaire et théorie de l'optimisation statique
- Automatique élémentaire :
  - ➪ Méthodes d'analyse et de commande fréquentielles des modèles LTI
  - ➪ Méthodes d'analyse et de commande dans l'espace d'état des modèles LTI
- Informatique : MATLAB

Commande optimale des systèmes dynamiques

Cours 2

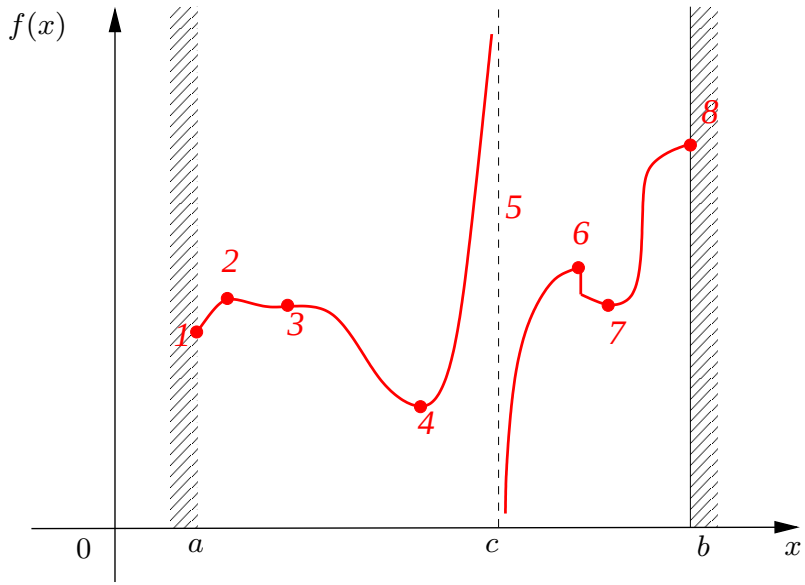
Rappels de PNL

Application à la commande optimale en temps discret



$$\min_{x \in D} \; f(x)$$

- (1) minimum local
- (4), (7) minima locaux, globaux sur (a, b) et sur (c, b)
- (3) point selle
- (2) maximum local
- (5) et (6) optima non analytiques
- (8) maximum local et global sur $[c, b]$



▼ **Définition 1** $x^* \in D \subset \mathbb{R}^n$ *est un minimum local (global) de* $f \; : \; \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *si* $\exists \; \epsilon > 0$ *tel que* $\forall \; x \in \mathcal{B}(x^*, \epsilon) \cap D$ *(*$\forall \; x \in D$*) alors :*

$$f(x^*) \leq f(x)$$

❒ **Théorème 1** *conditions nécessaires d'optimalité locale*

CN1 *Premier ordre : si* $x^* \in D$ *est un minimum de* $f \; : \; \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *alors* $\nabla f(x^*) = 0$

CN2 *Deuxième ordre : si* $x^* \in D$ *est un minimum de* $f \; : \; \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *alors* $\nabla^2 f(x^*) \succeq 0$

▼ **Définition 2** *point stationnaire*

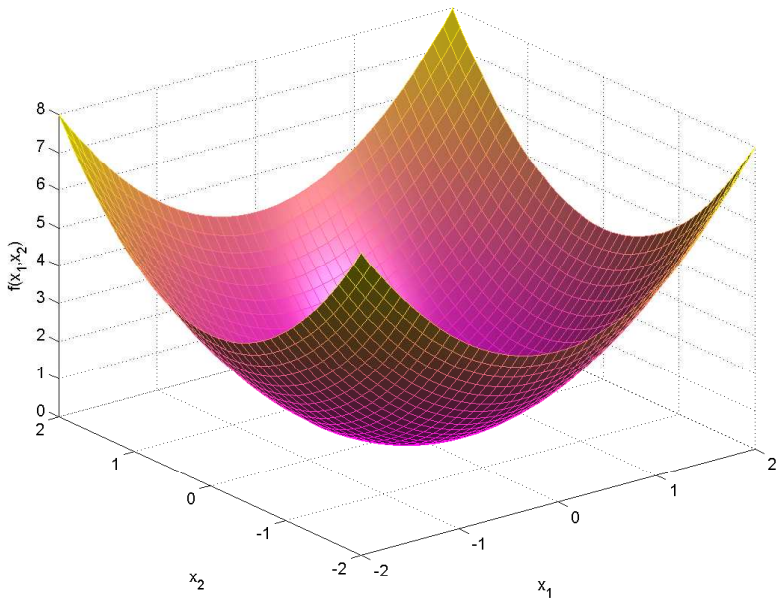
Tout point $x^*(t)$ qui vérifie la condition nécessaire d'optimalité au premier ordre (CN1) est un point stationnaire de la fonction f.

❒ **Théorème 2** *conditions suffisantes d'optimalité locale*

CS *Deuxième ordre : si $\nabla f(x^*) = 0$ et $\nabla^2 f(x^*) \succ 0$ alors $x^* \in D$ est un minimum local de $f \ : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*

✐ **Exemple 1**

- $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$
- $(x_1, x_2) = (0, 0)$ *est un mini. global sur* $\mathbb{R}^2$
- $\nabla f'(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix}$
- $\nabla^2 f(x) = 2 \times \mathbf{1}_2$
- $(0, 0)$ *est un minimum global de* f



(PNL)

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & f(x) \\ \text{sous} & h(x) = \mathbf{0} \\ & g(x) \preceq 0 \end{array}$$

- Fonction coût (critère) $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$
- Contraintes égalités $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$
- Contraintes inégalités $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^r)$

▼ **Définition 3**

- $x \in \mathbb{R}^n$ *est (strictement) réalisable de (PNL) si* $h(x) = \mathbf{0}$ *et* $g(x) \preceq 0$ *(*$\prec 0$*)*
- $x \in \mathbb{R}^n$ *réalisable est régulier si*

$$\mathrm{rg}(H) = \mathrm{rg}\left(\left[\ \nabla h_1(x), \quad \cdots \quad , \nabla h_m(x)\ \right]\right) = m$$

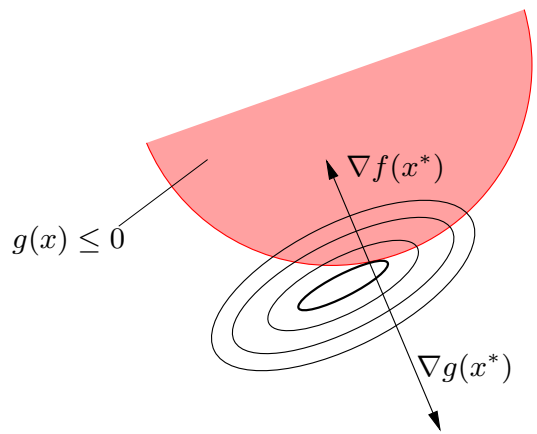
- *Pour* $x \in \mathbb{R}^n$ *réalisable* $A(x) = \{j \mid g_j(x) = 0\}$ *est l'ensemble des contraintes actives (saturées). Si* $j \notin A(x)$*, la contrainte associée à* g_j *est inactive*
- $x^* \in \mathbb{R}^n$ *réalisable est un minimum local de (PNL) si* $\exists\ \epsilon > 0$ *tel que pour tout point réalisable* x

$$\|x - x^*\| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad f(x^*) \leq f(x)$$

❒ **Théorème 3** *condition nécessaire au premier ordre d'optimalité locale (Karush-Kuhn-Tucker)*

CN1 *Si x^* est un minimum local régulier de (PNL) alors il existe deux vecteurs de multiplieurs de Lagrange $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ et $\mu^* \in \mathbb{R}^r$ tels que :*

$$\nabla L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0$$
$$\mu_j^* \geq 0 \quad j = 1, \cdots, r$$
$$\mu_j^* = 0 \quad \forall\, j \notin A(x^*)$$



$L(x, \lambda, \mu) \ : \ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ est le lagrangien associé à (PNL) :

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \lambda' h(x) + \mu' g(x)$$

▼ **Définition 4** *solutions de KKT*

Les solutions des conditions nécessaires au premier ordre sont appelées solutions de Karush-Kuhn-Tucker.

❒ **Théorème 4** *condition nécessaire au deuxième ordre d'optimalité locale*

CN2 *On suppose que les fonctions $f,\ h,\ g$ sont de classe $\mathcal{C}^2$. Si x^*, point réalisable, est un optimum local alors $\exists\ \lambda^* \in \mathbb{R}^m$ et $\exists\ \mu^* \in \mathbb{R}^r$ tels que :*

$$y'\nabla^2_{xx}L(x^*,\lambda^*,\mu^*)y \geq 0 \quad \forall\ y \in V(x^*)$$

où $V(x^*)$ est le sous-espace des variations réalisables au 1er ordre :

$$V(x^*) = \{y \mid \nabla h_i(x^*)'y = 0,\ i = 1,\cdots,m, \quad \nabla g_j(x^*)'y = 0 \quad j \in A(x^*)\}$$

❒ **Théorème 5** *condition suffisante d'optimalité locale*

$f,\ h,\ g$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ et soient $x^* \in \mathbb{R}^n$ réalisable, $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ et $\mu^* \in \mathbb{R}^r$ tels que :

$$\begin{array}{lll}
\nabla L(x^*,\lambda^*,\mu^*) = 0 & & \\
\mu^*_j \geq 0 \quad j = 1,\cdots,r & \mu^*_j = 0 \quad \forall\ j \notin A(x^*) & \mu^*_j > 0 \quad \forall\ j \in A(x^*) \\
y'\nabla^2_{xx}L(x^*,\lambda^*,\mu^*)y > 0 & \forall\ y \neq 0 \in V(x^*) &
\end{array}$$

alors x^* est un minimum local strict de (PNL)

Exemple 2

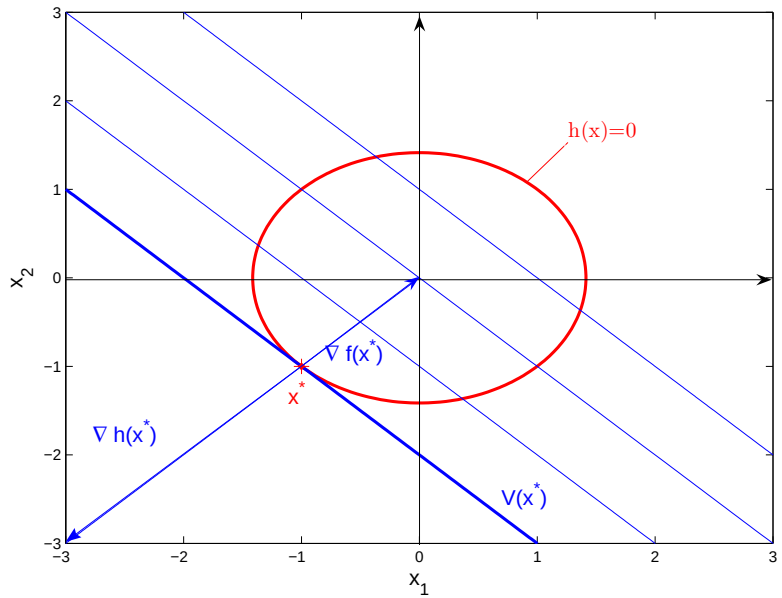
$$\begin{aligned} \min_{x_1,x_2} \quad & x_1 + x_2 \\ \text{sous} \quad & x_1^2 + x_2^2 = 2 \end{aligned}$$

- *Minimum absolu :*

$$x^* = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}$$

- *Maximum absolu :*

$$x^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Exemple 3 *(McCormick 1967)*

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x_1,x_2} & (x_1-1)^2 + x_2^2 \\ \text{sous} & 2kx_1 - x_2^2 \leq 0 \end{array}$$

$0 < k < 1$:

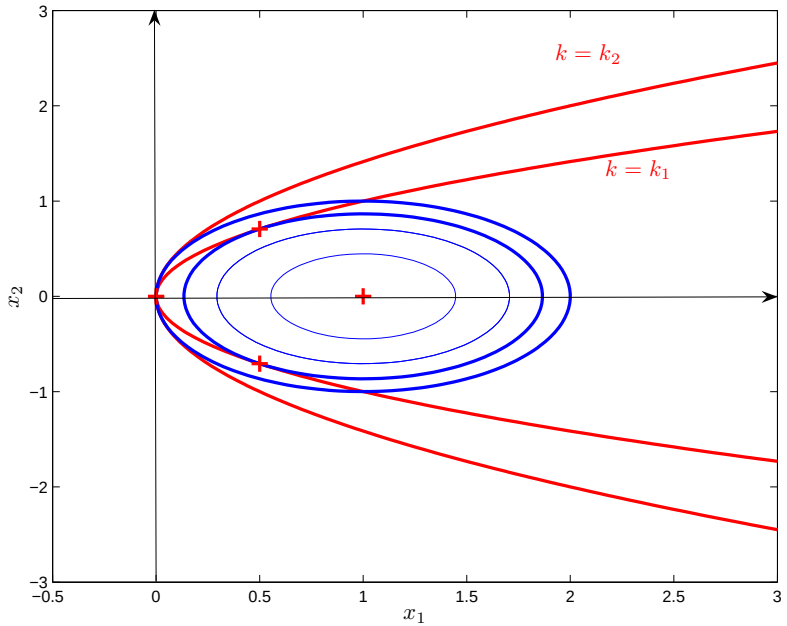
$$(x^*, \mu^*) = \left(\begin{bmatrix} 1-k & \pm\sqrt{2k(1-k)} \end{bmatrix}, 1 \right)$$

$k \geq 1$:

$$(x^*, \mu^*) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, 1/k \right)$$

$k \leq 0$:

$$(x^*, \mu^*) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, 0 \right)$$



Soit le problème de commande optimale en temps discret :

$$\begin{aligned}
\min_{x_i,u_i} \quad & J(x_i,u_i) = \sum_{i=0}^{N-1} L_i(x_i,u_i) + \psi_0(x_N) \\
\text{sous} \quad & x_i = f_{i-1}(x_{i-1},u_{i-1}),\ i = 0,\cdots,N-1,\ N \text{ fixé} \\
& x_i \in \mathbb{R}^n,\ i = 1,\cdots,N \\
& x_0 = \overline{x} \text{ donné} \\
& u_i \in \mathbb{R}^m,\ i = 0,\cdots,N-1 \\
& \psi(x_N) = 0
\end{aligned}$$

avec :

- $J(x_i,u_i)$ est une fonction de Bolza (Lagrange pour $\psi_0 \equiv 0$, Mayer pour $L_i \equiv 0$)
- L_i : $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ fonction $\mathcal{C}^2$ appelé Lagrangien
- ψ_0 : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonction $\mathcal{C}^2$
- ψ : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ fonction $\mathcal{C}^2$ définit les conditions de bord

▼ **Définition 5** *trajectoires d'état et de commande*

$U_{N-1} = (u_0, u_1, \cdots, u_{N-1})$ *est une trajectoire de commande et*
$x = (x_0, x_1, \cdots, x_N)$ *est une trajectoire d'état.*

On suppose que l'équation dynamique du système spécifie de manière unique la trajectoire d'état correspondant à une trajectoire de commande.

$$\begin{aligned} x_i &= f_{i-1}(f_{i-2}(f_{i-3}(\cdots), u_{i-2}), u_{i-1}), \quad i = 1, \cdots, N \\ x_i &= F_i(u_0, u_1, \cdots, u_{i-1}, x_0) = F_i(U_{i-1}, x_0) \quad i = 1, \cdots, N \end{aligned}$$

Le problème de commande optimale en temps discret est un problème de PNL sous contraintes égalités :

$$\begin{aligned} & \min_{u_i} \quad J(U_{N-1}) = \sum_{i=0}^{N-1} L_i(F_i(U_{i-1}, x_0), u_i) + \psi_0(F_N(U_{N-1}, x_0)) \\ (PCODL) \quad & \text{sous} \quad x_0 = \overline{x} \text{ donné} \\ & \qquad u_i \in \mathbb{R}^m, \ i = 0, \cdots, N-1 \\ & \qquad \psi(F_N(U_{N-1}, x_0)) = 0 \end{aligned}$$

- Lagrangien :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(U_{N-1},\nu) &= \sum_{i=0}^{N-1} L_i(F_i(U_{i-1},x_0),u_i) + \psi_0(F_N(U_{N-1},x_0)) + \nu'\psi(F_N(U_{N-1},x_0)) \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} L_i(F_i(U_{i-1},x_0),u_i) + \Psi(F_N(U_{N-1},x_0),\nu)\end{aligned}$$

- Passage à la forme de Mayer : $\tilde{J}(U_{N-1},\nu) = \Psi(F_N,\nu) + y_N = \tilde{\Psi}(\tilde{F}_N,\nu)$

$$\begin{aligned} y_i &= y_{i-1} + L_{i-1}(x_{i-1},u_{i-1}) \\ y_0 &= 0 \end{aligned} \qquad \tilde{x}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} = \tilde{f}_{i-1}(\tilde{x}_{i-1},u_{i-1}) = \tilde{F}_i(U_{i-1},\tilde{x}_0)$$

Le problème de commande optimale en temps discret est un problème de PNL sans contraintes :

$$(PCODM) \qquad \begin{array}{ll} \min\limits_{U_{N-1},\nu} & \tilde{J}(U_{N-1},\nu) = \tilde{\Psi}(\tilde{F}_N(U_{N-1},x_0),\nu) \\ \text{sous} & \tilde{x}_0 = \tilde{\bar{x}} \text{ donné} \\ & u_i \in \mathbb{R}^m,\ i = 0,\cdots,N-1 \end{array}$$

- CN d'optimalité au premier ordre :

  CN1 : si $U^*_{N-1} = (u^*_0, u^*_1, \cdots, u^*_{N-1})$ est une trajectoire de commande optimale pour (PCODM) alors :

$$\nabla_{u_i} J(U^*_{N-1}) = 0 \quad \forall\, i = 0, \cdots N-1$$

- Calcul de $\nabla_{u_i} J(U_{N-1}) = \nabla_{u_i} \Psi(F_N(U_{N-1}, x_0))$:

$$\begin{aligned} \nabla_{u_i} J(U_{N-1}) &= \nabla_{u_i} F_N \nabla \Psi(F_N) \\ &= \nabla_{u_i} f_i \nabla_{x_{i+1}} f_{i+1} \cdots \nabla_{x_{N-1}} f_{N-1} \nabla \Psi(F_N) \end{aligned}$$

où :

$\nabla_{u_i} F_N$: matrice gradient $m \times n$

$\nabla \Psi(F_N)$: vecteur gradient $n \times 1$

$\nabla_{u_i} f_i$: matrice gradient $m \times n$

$\nabla_{x_i} f_i$: matrice gradient $n \times n$

▼ **Définition 6** *vecteur adjoint*

On définit le vecteur adjoint $\lambda_i \in \mathbb{R}^n, \ \forall\, i = 1, \cdots, N$ *par*

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \nabla_{x_i} f_i \cdots \nabla_{x_{N-1}} f_{N-1} \nabla \Psi \quad i = 1, \cdots, N-1 \\ \lambda_N &= \nabla \Psi \end{aligned}$$

Equation adjointe :

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \nabla_{x_i} f_i \lambda_{i+1} \quad i = 1, \cdots, N-1 \\ \lambda_N &= \nabla \Psi \end{aligned}$$

La condition nécessaire d'optimalité au premier ordre devient :

$$\nabla_{u_i} J(U^*_{N-1}) = \nabla_{u_i} f_i \lambda_{i+1} = 0 \ \ \forall\, i = 0, \cdots N-1$$

- Calcul de $\nabla_{u_i}\tilde{J}(U_{N-1}) = \tilde{\Psi}(\tilde{F}_N(U_{N-1}, x_0))$:

$$\nabla_{u_i}\tilde{J}(U_{N-1}, \nu) = \nabla_{u_i}\tilde{f}_i\tilde{\lambda}_{i+1}, \quad i = 0, \cdots, N-1$$

où :

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\lambda}_i & = & \nabla_{\tilde{x}_i}\tilde{f}_i\tilde{\lambda}_{i+1}, \quad i = 1, \cdots, N-1 \\ \tilde{\lambda}_N & = & \nabla\tilde{\Psi} \end{array} \quad \text{avec } \tilde{f}_i = \begin{bmatrix} f_i(x_i, u_i) \\ y_i + L_i(x_i, u_i) \end{bmatrix}$$

- Vecteur adjoint :

$$\tilde{\lambda}_N = \begin{bmatrix} \lambda_N \\ z_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla\Psi \\ 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{\lambda}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i \\ z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla_{x_i} f_i & \nabla_{x_i} L_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{i+1} \\ z_{i+1} \end{bmatrix}$$

- Equation adjointe :

$$\begin{array}{rcl} \lambda_i & = & \nabla_{x_i} f_i \lambda_{i+1} + \nabla_{x_i} L_i, \quad \forall\, i = 0, \cdots N-1 \\ \lambda_N & = & \nabla\Psi \end{array}$$

CN2 : si $U^*_{N-1} = (u^*_0, u^*_1, \cdots, u^*_{N-1})$ est une trajectoire de commande localement optimale pour (PCOD) alors :

$$\nabla_{u_i} H_i(x^*_i, u^*_i, \lambda^*_{i+1}) = 0 \quad \forall\ i = 0, \cdots N-1$$

où le Hamiltonien est défini par $H_i(x_i, u_i, \lambda_{i+1}) = L_i(x_i, u_i) + \lambda'_{i+1} f_i(x_i, u_i)$ et l'équation d'état adjointe est donnée par :

$$\lambda^*_i = \nabla_{x_i} H_i(x^*_i, u^*_i, \lambda^*_{i+1}), \quad i = 1, \cdots, N-1$$

avec la condition terminale $\lambda^*_N = \nabla\Psi(X^*_N)$ et la condition initiale $x_0 = \overline{x}$

Nota : il est nécessaire de résoudre un problème aux deux bouts (Two-Point Boundary Value Problem, TPBVP) par la résolution d'un système d'équations récurrentes non linéaires de dimension $N(2n+m)$ en les inconnues x_i, λ_i et u_i.

Exemple 4 : *Perle*

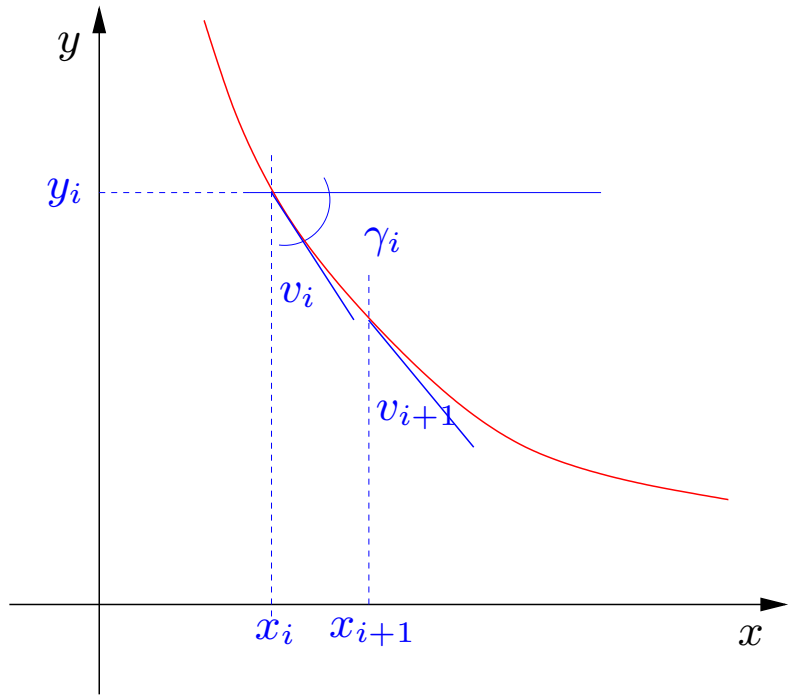
Une perle glisse sans frottement dans un plan (x, y) le long d'un collier dans un champ de gravité donné par l'accélération g. Déterminer la forme de la courbe faite par le collier pour atteindre l'abscisse maximale en un temps $t_f = N\Delta T$ donné.

- *Equation des forces :*

$$v_{i+1} = v_i + g\Delta T \sin\gamma_i$$

- *Equations de la cinématique :*

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \Delta s_i \cos\gamma_i \\ \Delta s_i &= \Delta T v_i + \frac{g}{2}\Delta T^2 \sin\gamma_i \end{aligned}$$



CO en temps discret : exemple de la perle II

❶ Modélisation :

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + (v_i \Delta T + \tfrac{g}{2}\Delta T^2 \sin\gamma_i)\cos\gamma_i & x(0) = 0 \\ v_{i+1} &= v_i + g\Delta T \sin\gamma_i & v(0) = 0 \end{aligned}$$

❷ Fonction coût : $J = -x_N$

❸ Hamiltonien :

$$H_i = \lambda^v_{i+1}(v_i + g\Delta T \sin\gamma_i) + \lambda^x_{i+1}(x_i + \Delta T v_i \cos\gamma_i + \frac{g\Delta T^2}{2}\sin\gamma_i\cos\gamma_i)$$

❹ TPBVP :

$$\begin{aligned} \lambda^v_{i+1} - \lambda^v_i - \tfrac{t_f}{N}\cos\gamma_i &= 0 & \lambda^v_N = 0 \\ \lambda^x_i &= -1 \\ g\tfrac{t_f}{N}\lambda^v_{i+1}\cos\gamma_i + \tfrac{t_f}{N}v_i\sin\gamma_i - \tfrac{gt_f^2}{2N^2}\cos 2\gamma_i &= 0 \\ v_{i+1} - v_i - g\tfrac{t_f}{N}\sin\gamma_i &= 0 & v_0 = 0 \\ x_{i+1} - x_i - \tfrac{t_f}{N}v_i\cos\gamma_i - \tfrac{gt_f^2}{2N^2}\sin\gamma_i\cos\gamma_i &= 0 & x_0 = 0 \end{aligned}$$

Soit le problème de commande optimale en temps discret :

$$\begin{aligned}
\min_{x_i,u_i} \quad & J(x_i,u_i) = \sum_{i=0}^{N-1} L_i(x_i,u_i) + \psi_0(x_N) \\
\text{sous} \quad & x_i = f_{i-1}(x_{i-1},u_{i-1}),\ i = 0,\cdots,N-1,\ N \text{ fixé} \\
& x_i \in \mathbb{R}^n,\ i = 1,\cdots,N \quad x_0 = \overline{x} \text{ donné} \\
& \psi(x_N) = 0
\end{aligned}$$

$\psi_0(x_N)$ est remplacée par $\Psi(x_N,\nu) = \psi_0(x_N) + \nu'\psi(x_N)$. Le hamiltonien et les conditions d'optimalité (équations canoniques de Hamilton) ne changent pas.

- Hamiltonien :

$$H_i(x_i,\lambda_{i+1},u_i) = \lambda'_{i+1} f_i(x_i,u_i) + L_i(x_i,u_i)$$

- Equation adjointe :

$$\lambda_i^* = \nabla_{x_i} H_i(x_i^*,u_i^*,\lambda_{i+1}^*), \quad \lambda_N^* = \nabla_x \Psi(x_N^*,\nu^*) = \nabla_x \psi_0(x_N^*) + \nu'^* \nabla_x \psi(x_N^*)$$

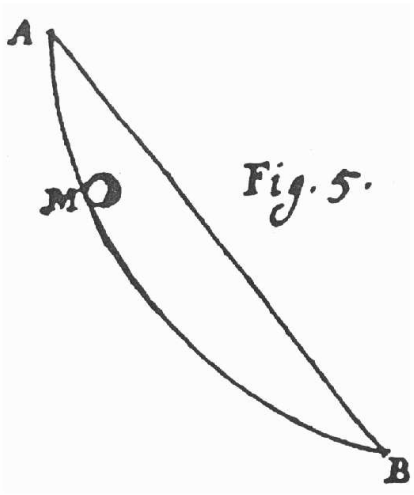
- Equation d'optimalité :

$$\nabla_{u_i} H_i(x_i^*,u_i^*,\lambda_{i+1}^*) = 0, \quad \forall\ i = 0,\cdots,N-1$$

Commande optimale des systèmes dynamiques

Cours 3

Eléments de calcul des variations

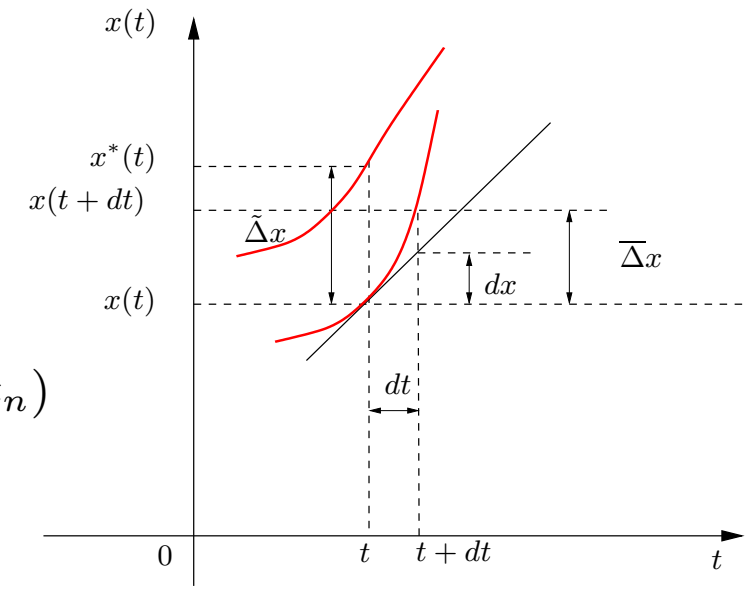


- Accroissement d'une fonction $x(t)\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a, b]$

$$\overline{\Delta} x = x(t+\Delta t) - x(t) = \dot{x}(t)\Delta t + \frac{1}{2!}\ddot{x}(t)\Delta t^2 + \cdots = dx + \frac{1}{2!}d^2x + \cdots$$

Nota :
- t variable indépendante : $\overline{\Delta} t = dt$, $d(dt) = d^2 t = 0$
- La différentielle d'une fonction x est une différentielle dépendante $dx = \dot{x}(t)dt$
- Si $x \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ alors

$$\begin{aligned}
\overline{\Delta}_{t_1} x(t) &= x(t_1 + \Delta t_1, t_2, \cdots, t_n) - x(t_1, \cdots, t_n) \\
\overline{\Delta} x(t) &= x(t_1 + \Delta t_1, \cdots, t_n + \Delta t_n) - x(t_1, \cdots, t_n) \\
dx &= x_{t_1}(t)dt_1 + \cdots + x_{t_n}(t)dt_n = \nabla x(t)' dt \\
d^2 x &= dt' \nabla^2 x(t) dt
\end{aligned}$$



- Variation à temps fixé d'une fonction $x(t)\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\tilde{\Delta} x(t) = x^*(t) - x(t) = \delta x(t) + \frac{1}{2!}\delta^2 x(t) + \cdots$$

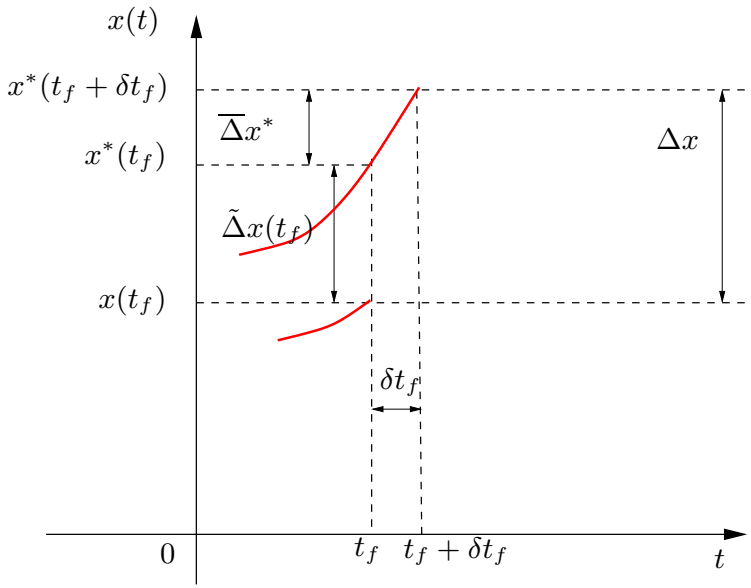
- Variation à temps libre d'une fonction $x(t)\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\Delta x(t,dt) = x^*(t+dt) - x(t) &= \tilde{\Delta} x(t) + \overline{\Delta} x^*(t,dt) \\
&= \delta x(t) + \tfrac{1}{2!}\delta^2 x(t) + dx^* + \tfrac{1}{2!} d^2 x^* + \cdots \\
&= \delta x + \tfrac{1}{2!}\delta^2 x + \dot{x}^* dt + \tfrac{1}{2!}\ddot{x}^* dt^2 + \cdots \\
&= \delta x + \dot{x}^* dt + \tfrac{1}{2!}[\ddot{x}^* dt^2 + \delta^2 x] + \cdots \\
&= \delta x + \dot{x} dt + \tfrac{1}{2!}[2\delta\dot{x}dt + \delta^2 x + \ddot{x}dt^2] + \cdots
\end{aligned}$$

Variations au premier ordre et au deuxième ordre :

$$\Delta^1 x = \delta x + \dot{x}dt \qquad \Delta^2 x = [2\delta\dot{x}dt + \delta^2 x + \ddot{x}dt^2]$$

$$\Delta(.) = \delta(.) + \tfrac{d}{dt}(.)dt \qquad \Delta^2(.) = \Delta(\Delta(.))$$



Nota :

- $\dot{x}^* = \dot{x} + \tilde{\Delta}\dot{x} = \dot{x} + \delta\dot{x} + \frac{1}{2!}\delta^2\dot{x} + \cdots$
- $\ddot{x}^* = \ddot{x} + \tilde{\Delta}\ddot{x} = \ddot{x} + \delta\ddot{x} + \frac{1}{2!}\delta^2\ddot{x} + \cdots$

Exemple 1

Soit la fonction $x(t) = (t_1 - t_2)^2$ *alors*

$$\nabla x = \begin{bmatrix} 2(t_1 - t_2) \\ -2(t_1 - t_2) \end{bmatrix} \quad \nabla^2 x = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

On en déduit :

$$\overline{\Delta} x(t) = 2(t_1 - t_2)dt_1 - 2(t_1 - t_2)dt_2 - 2dt_1 dt_2 + dt_1^2 + dt_2^2 + \cdots$$

ainsi que :

$$\begin{aligned} \Delta x(t, dt) &= \delta x + 2(t_1 - t_2)dt_1 - 2(t_1 - t_2)dt_2 + (2\delta \dot{x}' dt + \delta^2 x - 2dt_1 dt_2 + dt_1^2 + dt_2^2) + \\ &= \Delta^1 x + \tfrac{1}{2}\Delta^2 x + \cdots \end{aligned}$$

▼ **Définition 1** *$J(f)$ est une fonctionnelle si pour chaque fonction $f \in \mathcal{F}$ correspond une valeur de J (J est une fonction de fonction). $\mathcal{F}$ est le champ de définition de la fonctionnelle.*

$$J(f(t)),\ f(t) \in \mathcal{F},\ t \in\ (a,b)$$

✐ **Exemple 2** *: Aire sous une courbe f*

$$I(f) = \int_0^1 f(x)dx$$

Le champ $\mathcal{F}$ de la fonctionnelle $I(f)$ est l'ensemble des fonctions intégrables sur $[0\ ,\ 1]$.

✐ **Exemple 3** *: Energie totale d'une membrane élastique sous une charge Q*

$$E(u) = \frac{1}{2}a \int\int_S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dxdy - \int\int_S Q(x,y)u(x,y)dxdy$$

Le champ $\mathcal{U}$ de la fonctionnelle $E(u)$ est l'ensemble des fonctions u deux fois continûment différentiables sur le domaine S.

▼ **Définition 2**

- $x^*(t) \in \mathcal{KC}^1([t_0, t_f], \mathbb{R}^n)$ *est un minimum local fort de la fonctionnelle* $J(x(t))$ *si* $\exists\ \epsilon > 0$ *tel que* $\forall\ x(.) \in \mathcal{KC}^1([t_0, t_f], \mathbb{R}^n)$ *telle que* $x(t_0) = x_0$ *et* $x(t_f) = x_f$

$$\|x(t) - x^*(t)\|_0 < \epsilon \ \Rightarrow\ J(x(.)) \geq J(x^*(.))$$

Si cette relation est vérifiée pour $\epsilon > 0$ *arbitraire alors* $x^*(t)$ *est un minimum global*

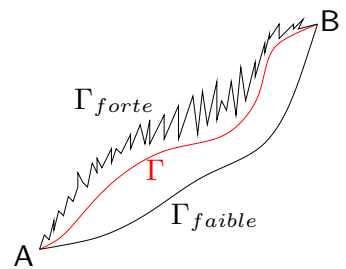
- $x^*(t) \in \mathcal{C}^1([t_0, t_f], \mathbb{R}^n)$ *est un minimum local faible si* $\exists\ \epsilon > 0$ *tel que* $\forall\ x(.) \in \mathcal{C}^1([t_0, t_f], \mathbb{R}^n)$ *telle que* $x(t_0) = x_0$ *et* $x(t_f) = x_f$,

$$\|x(t) - x^*(t)\|_1 < \epsilon \ \Rightarrow\ J(x(.)) \geq J(x^*(.))$$

Si cette relation est vérifiée pour $\epsilon > 0$ *arbitraire alors* $x^*(t)$ *est un minimum global faible*

$$\|x(t)\|_0 = \sup_{a \leq t \leq b} \|x(t)\|$$

$$\|x(t)\|_i = \sup_i \|x^{(i)}(t)\|_0$$



- Chercher $x \in \mathcal{C}^1([t_0, t_f], \mathbb{R}^n)$ est restrictif

✐ **Exemple 4** *: Bolza*

$$J(x) = \int_{-1}^{1} x^2(1-\dot{x})^2 dt \quad \text{sous} \quad x(-1) = 0 \quad \text{et} \quad x(1) = 1$$

$$x^* = 0 \quad \text{pour} \quad -1 \leq t \leq 0 \quad \text{et} \quad x^* = t \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq 1$$

La solution x^* *est AC et* $\dot{x}^*$ *est discontinue en* 0

$$x^* \in \mathcal{KC}^1([-1, 1], \mathbb{R}^n)$$

✐ **Exemple 5** *: contre-exemple de Hilbert*

$$J(x) = \int_{0}^{1} t^{2/3}\dot{x}^2 dt \quad \text{sous} \quad x(0) = 0 \quad \text{et} \quad x(1) = 1$$

$$x^* = t^{1/3}$$

x^* *est AC telle que* $J(x^*)$ *est finie et* $\dot{x}^*$ *est non bornée en* 0

$$x^* \in \mathcal{AC}([0, 1], \mathbb{R}^n)$$

▼ **Définition 3** *variation d'une fonctionnelle différentiable*

$$\begin{aligned}\Delta J &= \tilde{\Delta} J(x, x^*, t_0, t_f) + \overline{\Delta} J(x^*, t_0, \delta t_0, t_f, \delta t_f) \\ &= J(x^*, t_0, t_f) - J(x, t_0, t_f) + J(x^*, t_0 + \delta t_0, t_f + \delta t_f) - J(x^*, t_0, t_f) \\ &= \delta J(x, x^*, \delta t_0, \delta t_f) + \epsilon_x \|x - x^*\| + \epsilon_{t_0} \|\delta t_0\| + \epsilon_{t_f} \|\delta t_f\|\end{aligned}$$

où $\delta J(x, x^*, \delta t_0, \delta t_f)$ *est une fonctionnelle linéaire appelée variation au premier ordre*

❒ **Théorème 1** *théorème fondamental du calcul des variations*

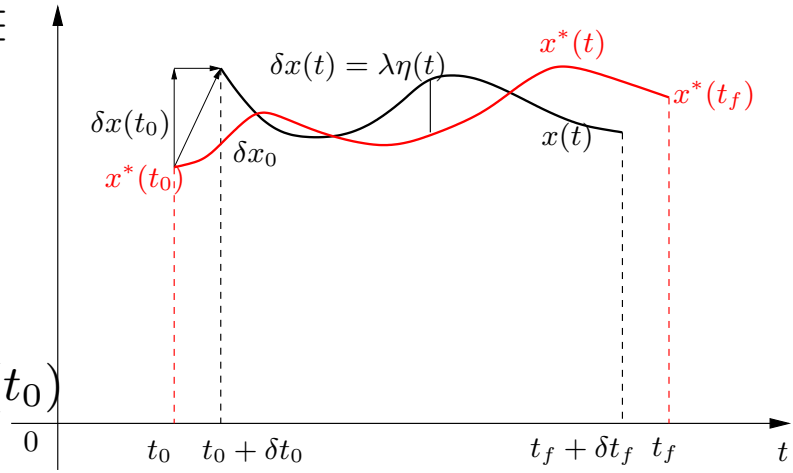
Soit $J(x(t))$ *différentiable définie sur le domaine* $\mathcal{F}$ *de* $\mathcal{KC}^1([t_0, t_f], \mathbb{R}^n)$
Si $x^*(t)$ *est un extrémum fort (faible) alors*

$$\delta J(x^*(t), x(t), \delta t_0, \delta t_f) = 0$$

pour toute variation forte (faible) admissible $\delta x(t)$ *(*$x(t) + \delta x(t) \in \mathcal{F}$*).*

A - Première variation de Lagrange :

Soit $x^*(t) \in \mathcal{C}^1([t_0, t_f), \mathbb{R}^n)$ la trajectoire optimale et les trajectoires paramétrées pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\eta_x(t) \in \mathcal{C}^1([t_0, t_f), \mathbb{R}^n)$, $\eta_f(t_f) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\eta_0(t_0) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$



$$x(t) = x^*(t) + \lambda\eta_x(t) = x^*(t) + \delta x(t)$$

$$\dot{x}(t) = \dot{x}^*(t) + \lambda\dot{\eta}_x(t) = \dot{x}^*(t) + \delta\dot{x}(t)$$

$$t_f = t_f^* + \delta t_f = t_f^* + \lambda\eta_f(t_f), \;\; t_0 = t_0^* + \delta t_0 = t_0^* + \lambda\eta_0(t_0)$$

$$\delta x_0 = \delta x(t_0) + \dot{x}\delta t_0, \;\; \delta x_f = \delta x(t_f) + \dot{x}\delta t_f$$

$$\delta J(t_0^*, t_f^*, x^*, \eta_x, \eta_0, \eta_f) = \frac{d\phi}{d\lambda}(\lambda) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{J(t_0^* + \lambda\eta_0, t_f^* + \lambda\eta_f, x^* + \lambda\eta_x) - J(t_0^*, t_f^*, x^*)}{\lambda}$$

Notations :

$$L(x^*(t_0), \dot{x}^*(t_0), t_0) = L(t_0) \qquad L(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f) = L(t_f)$$

$$\nabla_x L(t, x, \dot{x}) = L_x(t, x, \dot{x}) \qquad \frac{\partial\psi_0(.)}{\partial x_0} = \nabla_{x_0}\psi_0(.) \qquad \frac{\partial\psi_0(.)}{\partial t_0} = \psi_{0t_0}(.)$$

$$\nabla_{\dot{x}} L(t, x, \dot{x}) = L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}) \qquad \frac{\partial\psi_0(.)}{\partial x_f} = \nabla_{x_f}\psi_0(.) \qquad \frac{\partial\psi_0(.)}{\partial t_f} = \psi_{0t_f}(.)$$

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt + \psi_0(t_0, t_f, x(t_0), x(t_f))$$

La variation totale de la fonctionnelle de Bolza est donnée par :

$$\delta J(x^*(t), \delta x(t), \delta \dot{x}, \delta t_0, \delta t_f) = \delta_{t_0} J + \delta_{t_f} J + \delta_x J$$

❶ 1ere variation de J/x :

$$\begin{aligned}\delta_x J(x^*(t), \delta x(t), \delta x_0, \delta x_f) &= \int_{t_0}^{t_f} \left[L'_x(t, x^*, \dot{x}^*)\delta x + L'_{\dot{x}}(t, x^*, \dot{x}^*)\delta \dot{x}\right] dt \\ &\quad + \nabla'_{x_f}\psi_0(x_f)\delta x_f + \nabla'_{x_0}\psi_0(x_0)\delta x_0\end{aligned}$$

❷ 1ere variation de J/t_0 :

$$\delta_{t_0} J(x^*(t_0), \delta t_0) = (-L(t_0) + \psi_{0t_0}(t_0))\delta t_0$$

❸ 1ere variation de J/t_f :

$$\delta_{t_f} J(x^*(t_f), \delta t_f) = (L(t_f) + \psi_{0t_f}(t_f))\delta t_f$$

B - Transformation de la 1ere variation de Lagrange :

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_f} L'_{\dot{x}}(t, x^*, \dot{x}^*)\delta\dot{x}dt &= [L'_{\dot{x}}\delta x]_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt}\left(L'_{\dot{x}}\right)\delta x dt \\
&= L'_{\dot{x}}(t_f)\delta x(t_f) - L'_{\dot{x}}(t_0)\delta x(t_0) - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt}\left(L'_{\dot{x}}\right)\delta x dt \\
&= L'_{\dot{x}}(t_f)\delta x_f - L'_{\dot{x}}(t_f)\dot{x}\delta t_f - L'_{\dot{x}}(t_0)\delta x_0 + L'_{\dot{x}}(t_0)\dot{x}\delta t_0 \\
&\quad - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt}\left(L'_{\dot{x}}\right)\delta x dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta J(x^*(t), \delta x(t), \delta t_0, \delta t_f) &= \int_{t_0}^{t_f} \left[L_x(t, x^*, \dot{x}^*) - \frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t, x^*, \dot{x}^*)\right]' \delta x dt \\
&+ \left[L'_{\dot{x}}(t_f) + \nabla_{x_f}\psi'_0\right]\delta x_f + \left[L(t_f) - L'_{\dot{x}}(t_f)\dot{x}^* + \psi_{0t_f}\right]\delta t_f \\
&- \left[L'_{\dot{x}}(t_0) - \nabla_{x_0}\psi'_0\right]\delta x_0 - \left[L(t_0) - L'_{\dot{x}}(t_0)\dot{x}^* - \psi_{0t_0}\right]\delta t_0
\end{aligned}$$

Nota : les variations δx, $(\delta x_0,\ \delta t_0)$ et $(\delta x_f,\ \delta t_f)$ sont indépendantes

C - Application du lemme de Lagrange :

❒ **Lemme 1** *de Lagrange*

Pour une fonction $y(t) \in \mathcal{C}^0([t_0, t_f], \mathbb{R}^n)$, *si* $\int_{t_0}^{t_f} y'(t)\alpha(t)dt = 0$ *pour toute* $\alpha(t) \in \mathcal{C}^0([t_0, t_f], \mathbb{R}^n)$ *alors* $y(t) \equiv 0$ *sur* $[t_0, t_f]$

❒ **Théorème 2** *C.N. d'optimalité*

- *Equation différentielle d'Euler-Lagrange :*

  Si $x^*(t)$ *est une trajectoire optimale faible locale alors*

$$L_x(t, x^*, \dot{x}^*) - \frac{d}{dt}\left[L_{\dot{x}}(t, x^*, \dot{x}^*)\right] = 0$$

  et toute solution $x^*(t)$ *est une extrémale faible du problème de CV*

- *Conditions de transversalité :*

$$\begin{aligned} -\left[L'_{\dot{x}}(t_0) - \nabla_{x_0}\psi'_0\right]\delta x_0 - \left[L(t_0) - L'_{\dot{x}}(t_0)\dot{x}^* - \psi_{0t_0}\right]\delta t_0 &= 0 \\ \left[L'_{\dot{x}}(t_f) + \nabla_{x_f}\psi'_0\right]\delta x_f + \left[L(t_f) - L'_{\dot{x}}(t_f)\dot{x}^* + \psi_{0t_f}\right]\delta t_f &= 0 \end{aligned}$$

Nota : forme explicite de l'équation d'Euler-Lagrange

$$L_x(t, x^*, \dot{x}^*) - L_{t\dot{x}}(t, x^*, \dot{x}^*) - L'_{x\dot{x}}(t, x^*, \dot{x}^*)\dot{x}^* - L'_{\dot{x}\dot{x}}(t, x^*, \dot{x}^*)\ddot{x}^* = 0$$

Application au problème du Brachistochrone

❶ Formulation par le calcul des variations :

$$\min_x \quad \int_0^a \frac{\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}}{\sqrt{2gy}}dx$$

$$\text{sous} \quad y(x(0)) = 0,\ y(a) = b \qquad L(x, y, \tfrac{dy}{dx}) = L(x, y, \dot{y}) = \frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{\sqrt{2gy}}$$

$$L_{x\dot{y}}(x, y, \dot{y}) = 0$$

❷ Equation d'Euler-Lagrange :

$$\begin{aligned}
L_y(x, y^*, \dot{y}^*) - L_{y\dot{y}}(x, y^*, \dot{y}^*)\dot{y}^* - L_{\dot{y}\dot{y}}(x, y^*, \dot{y}^*)\ddot{y}^* &= 0 \\
\frac{d}{dx}\left[L(x, y^*, \dot{y}^*) - \dot{y}L_{\dot{y}}(x, y^*, \dot{y}^*)\right] &= 0 \\
\frac{d}{dx}\left[\frac{\sqrt{1+\dot{y}^{*2}}}{\sqrt{2gy^*}} - \dot{y}L_{\dot{y}}(x, y^*, \dot{y}^*)\right] &= 0 \\
\frac{d}{dx}\left[\frac{\sqrt{1+\dot{y}^{*2}}}{\sqrt{2gy^*}} - \frac{\dot{y}^{*2}}{\sqrt{2gy^*}\sqrt{1+\dot{y}^{*2}}}\right] &= 0
\end{aligned}$$

❸ Equation différentielle de la cycloïde :

$$y^*(1+\dot{y}^{*2}) = |b|$$

❶ Si $L(t, x, \dot{x}) = L(t, \dot{x})$ alors

$$L_{\dot{x}}(t, \dot{x}^*) = C$$

Cette intégrale de l'équation d'Euler-Lagrange est appelée intégrale de l'impulsion

❷ Si $L(t, x, \dot{x}) = L(x, \dot{x})$ alors

$$L(x^*, \dot{x}^*) - L_{\dot{x}}(x^*, \dot{x}^*)'\dot{x}^* = C$$

Cette intégrale de l'équation d'Euler-Lagrange est appelée intégrale de l'énergie

Nota : l'équation d'Euler-Lagrange : système de n équations différentielles du second ordre avec $2n + 2$ conditions initiales et terminales

Exemple 6

Déterminer la trajectoire extrémale de la fonctionnelle $\int_0^{t_f} [t\dot{x} + \dot{x}^2(t)]dt$ *pour* $x(0) = 1$ *et* $x(t_f) = 5$ *avec* $t_f > 0$ *libre.*

L'intégrale de l'équation d'Euler-Lagrange est l'intégrale de l'impulsion : $L_{\dot{x}}(t, \dot{x}^*) = t + 2\dot{x}^* = C_1$. *On en déduit*

$$x^*(t) = -\frac{t^2}{4} + \frac{C_1 t}{2} + C_2$$

Conditions de transversalité :

$$t_f \dot{x}^*(t_f) + \dot{x}^{*2}(t_f) - (t_f + 2\dot{x}^*(t_f))\dot{x}^*(t_f) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}^*(t_f) = 0$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\dot{x}^*(t_f) = -\tfrac{t_f}{2} + \tfrac{C_1}{2} && \Rightarrow \quad C_1 = t_f \\
&x(0) = 1 = C_2 \\
&x(t_f) = 5 = -\tfrac{t_f^2}{4} + \tfrac{C_1 t_f}{2} + C_2 && \Rightarrow \quad t_f = 4
\end{aligned}$$

$$x^*(t) = -\frac{t^2}{4} + 2t + 1$$

C.N. d'optimalité au 2eme ordre

Soit le problème de CV :

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x \in \mathcal{C}^1([t_0,t_f],\mathbb{R}^n)} & \displaystyle\int_{t_0}^{t_f} L(t,x,\dot{x})dt \\ \text{sous} & x(t_0) = x_0,\ x(t_f) = x_f \\ & t_0,\ t_f \text{ fixés} \end{array}$$

où $L(.)\ :\ V \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

Deuxième variation de Lagrange :

$$\phi(\eta_x) = \delta^2 J(x^*, \eta_x) = \int_{t_0}^{t_f} \left[\eta_x' L_{xx}\eta_x + 2\dot{\eta}_x' L_{x\dot{x}}\eta_x + \dot{\eta}_x' L_{\dot{x}\dot{x}}\dot{\eta}_x\right] dt$$

où $\eta_x \in \mathcal{C}^1([t_0,t_f],\mathbb{R}^n)$, $\eta_x(t_0) = 0$ et $\eta_x(t_f) = 0$

Nota : $\eta_x^* \equiv 0$ est un minimum fort du problème de CV auxiliaire :

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{\eta_x \in \mathcal{KC}^1([t_0,t_f],\mathbb{R}^n)} & \phi(\eta_x) \\ \text{sous} & \eta_x(t_0) = 0,\ \eta_x(t_f) = 0 \\ & t_0,\ t_f \text{ fixés} \end{array}$$

L'équation d'Euler-Lagrange pour le problème de CV auxiliaire : Jacobi

$$\frac{d}{dt}\left[L_{\dot{x}\dot{x}}\dot{\eta}_x(t) + L_{\dot{x}x}\eta_x(t)\right] = L_{x\dot{x}}\dot{\eta}_x(t) + L_{xx}\eta_x(t)$$

▼ **Définition 4** *points conjugués*

Le point τ est dit conjugué au point t_0 relativement à $\phi(\eta_x)$ si l'équation de Jacobi possède une solution $\overline{\eta}_x$ telle que $\overline{\eta}_x(\tau) = \overline{\eta}_x(t_0) = 0$,
$L_{\dot{x}\dot{x}}(\tau, x^*, \dot{x}^*)\overline{\eta}_x(\tau) \neq 0$

❐ **Théorème 3** *C.N. pour une extrémale faible*

Si $x^*(t)$ est une extrémale faible du problème de CV alors $x^*(t)$ vérifie
$\forall\ t \in [t_0, t_f]$

- *l'équation d'Euler-Lagrange*
- *la condition de Legendre-Clebsch :*

$$L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x^*, \dot{x}^*) \succeq 0$$

- *la condition de Jacobi :*

Il n'y a pas de points conjugués à t_0 dans l'intervalle (t_0, t_f)

❒ **Théorème 4** *C.S. au 2eme ordre*

Si $x^*(t)$ vérifie $\forall\ t \in [t_0, t_f]$ les conditions suffissantes suivantes :

- *l'équation d'Euler-Lagrange :*

$$\frac{d}{dt}L^*_{\dot{x}} - L^*_x = 0$$

- *la condition forte de Legendre-Clebsch :*

$$L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x^*, \dot{x}^*) \succ 0$$

- *la condition forte de Jacobi :*

il n'existe pas de points conjugués à t_0 dans le semi intervalle $(t_0, t_f]$

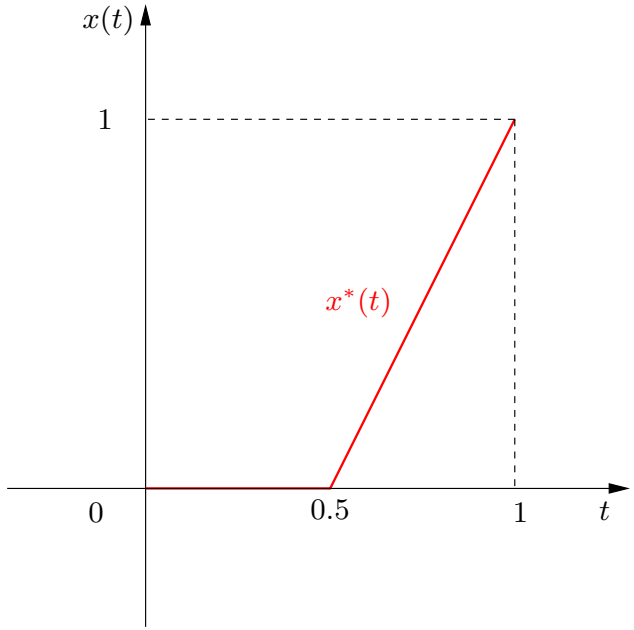
alors $x^*(t)$ est une extrémale faible stricte du problème de CV simplifié

Exemple 7 *Bolza*

$$\min\ J = \int_0^1 x^2(2-\dot{x})^2 dt,\ x(0)=0,\ x(1)=1$$

- $J^* = 0$
- $x^*(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, 0.5] \\ 2t-1 & t \in [0.5, 1] \end{cases}$
- $x^*(t)$ *est solution d'Euler-Lagrange*

$$x^2\ddot{x} + x\dot{x}^2 - 4x = 0$$



Théorème 5 *Conditions de Weierstrass-Erdmann*

Si $x^*(t) \in \mathcal{KC}^1([t_0, t_f], \mathbb{R}^n)$ *est une extrémale locale avec un point de discontinuité de* $\dot{x}$ *en* $t_i \in [t_0, t_f]$ *alors* $x^*(t)$ *vérifie l'équation d'Euler-Lagrange, les conditions de transversalité finales et initiales et les conditions de Weierstrass-Erdmann*

$$L_{\dot{x}}(t_i^-) = L_{\dot{x}}(t_i^+)$$
$$(L - L'_{\dot{x}}\dot{x})(t_i^-) = (L - L'_{\dot{x}}\dot{x})(t_i^+)$$

Soit le problème de CV :

$$\min_{x \in \mathcal{KC}^1([t_0,t_f],\mathbb{R}^n)} \int_{t_0}^{t_f} L(t,x,\dot{x})dt$$

$$\text{sous} \qquad x(t_0) = x_0,\ x(t_f) = x_f,\ t_0,\ t_f \text{ fixés}$$

❒ **Théorème 6** *CN de Weierstrass*

Si $x^*(t)$ est une extrémale forte du problème de CV alors $\forall\ t \in [t_0, t_f]$ et $\forall\ u \in \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{E}(t,x^*,\dot{x}^*,u) = L(t,x^*,u) - L(t,x^*,\dot{x}^*) - L'_{\dot{x}}(t,x^*,\dot{x}^*)(u-\dot{x}^*) \geq 0$$

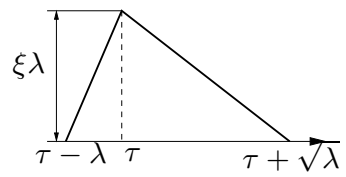
Cette condition est vérifiée si la fonction $L(.,.,\dot{x})$ est convexe

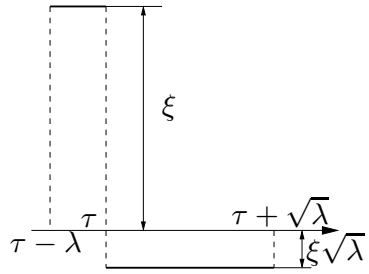
Nota : la fonction $\mathcal{E}(t,x^*,u)$ est appelée fonction de Weierstrass

Variation en aiguille de Weierstrass :

$$x_\lambda(t) = x^*(t) + h_\lambda(t)$$

$$h_\lambda(t) = \begin{cases} \xi\lambda + (t-\tau)\xi & t \in [\tau-\lambda, \tau] \\ \xi\lambda - (t-\tau)\xi\sqrt{\lambda} & t \in [\tau, \sqrt{\lambda}+\tau] \end{cases}$$





Problème de CV :

$$\min_x \quad J = \int_{t_0}^{t_f} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt + \psi_0(t_0, t_f, x(t_0), x(t_f))$$

avec $k(x_0, t_0) = 0$ et $l(x_f, t_f) = 0$ et

- les contraintes intégrales :

$$\int_{t_0}^{t_f} r(t, x(t), \dot{x}(t))dt = 0 \quad r(.) \in \mathbb{R}^r$$

- les contraintes instantanées :

$$\forall\ t \quad q(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0 \quad q(.) \in \mathbb{R}^q$$

▼ **Définition 5** *Lagrangien augmenté*

La fonction

$$\mathcal{L}(t, x(t), \dot{x}(t), \lambda, \mu(t)) \ : \ V \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$$

$$\mathcal{L}(t, x(t), \dot{x}(t), \lambda, \mu(t)) = L(t, x(t), \dot{x}(t)) + \lambda' r(t, x(t), \dot{x}(t)) + \mu(t)' q(t, x(t), \dot{x}(t))$$

est le Lagrangien augmenté associé au problème de CV où $\lambda \in \mathbb{R}^r$ *et* $\mu(t) \ : \ [t_0, t_f] \to \mathbb{R}^q$ *sont les multiplieurs de Lagrange respectivement associés aux contraintes intégrales et instantanées*

❒ **Théorème 7** *C.N. d'optimalité et équation différentielle d'Euler-Lagrange*

Si $x^*(t)$ est une trajectoire optimale faible locale alors

$$\mathcal{L}_x(t, x^*, \dot{x}^*, \lambda^*, \mu^*(t)) - \frac{d}{dt}\left[\mathcal{L}_{\dot{x}}(t, x^*, \dot{x}^*, \lambda^*, \mu^*(t))\right] = 0$$

Nota : résultats précédents valides avec $L(t, x(t), \dot{x}(t)) \rightarrow \mathcal{L}(t, x(t), \dot{x}(t), \lambda, \mu(t))$

- Conditions de Weierstrass, Weierstrass-Erdmann, Legendre et de transversalité
- Relations canoniques de Hamilton

Contraintes inégalités intégrales et instantanées :

- les contraintes intégrales :

$$\int_{t_0}^{t_f} r(t, x(t), \dot{x}(t))dt \leq 0 \;\; r(.) \in \mathbb{R}^r \;\; \rightarrow \;\; \int_{t_0}^{t_f} [r(t, x(t), \dot{x}(t)) + Z]dt \leq 0 \;\; Z \in \mathbb{R}^r \mid Z_i = z_i^2$$

- les contraintes instantanées :

$$\forall\, t \;\; q(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0 \;\; q(.) \in \mathbb{R}^q \;\; \rightarrow \;\; q(t, x(t), \dot{x}(t)) + Y = 0 \;\; Y \in \mathbb{R}^q \mid Y_i = y_i^2$$

Nota : $\mathcal{L}_{Z_i} = \lambda_i^* Z_i^* = 0$ et $\mathcal{L}_{Y_i} = \mu_i^*(t) Y_i^* = 0$, si $Y_i^* \neq 0 \Rightarrow \mu_i^*(t) = 0$ ou $Z_i^* \neq 0 \Rightarrow \lambda_i^* = 0$, la contrainte associée est non saturée et n'intervient pas

▼ **Définition 6** *variables canoniques*

- *Vecteur d'état adjoint :*

$$p(t) = L_{\dot{x}}(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) \quad \dot{p}(t) = L_x(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))$$

Si la condition de Hilbert $\det(L_{\dot{x}\dot{x}}) \not\equiv 0$ *est vérifiée alors* $localement$ $\dot{x}(t) = f(t, x, p)$

- *Le Hamiltonien associé à la fonctionnelle* J *:*

$$H(t, x(t), p(t)) = -L(t, x, \dot{x}(t)) + p'(t) f(t, x(t), p(t))$$

Nota : si L *est de classe* $\mathcal{C}^2$ *alors* $H \in \mathcal{C}^2([t_0, t_f] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
\frac{dH}{dx}(t, x^*, p^*) &= -L_x(t, x^*, \dot{x}^*) - L'_{\dot{x}}(t, x^*, \dot{x}^*(t)) f_x(t, x^*(t), p^*(t)) + p^{*'} f_x(t, x^*(t), p^*(t)) \\
&= -L_x(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) \\
\frac{dH}{dp}(t, x^*, p^*) &= f(t, x^*, p^*) - L'_{\dot{x}}(t, x^*, \dot{x}^*(t)) f_p(t, x^*, p^*) + p^{*'} f_p(t, x^*(t), p^*(t)) \\
&= f(t, x^*, p^*) \\
\frac{dH}{dt}(t, x^*, p^*) &= -L_t(t, x^*, \dot{x}^*(t)) - L'_{\dot{x}}(t, x^*, \dot{x}^*(t)) f_t(t, x^*, p^*) + p^{*'} f_t(t, x^*, p^*) \\
&= -L_t(t, x^*, \dot{x}^*(t))
\end{aligned}$$

❶ Equations canoniques d'Euler-Lagrange : $2n$ équations différentielles du premier ordre

$$\begin{aligned} \dot{x}^*(t) &= H_p(t, x^*, p^*) \\ \dot{p}^* &= -H_x(t, x^*, p^*) \end{aligned}$$

❷ Conditions de transversalité :

$$\begin{aligned} -\left[p'(t_0) - \nabla_{x_0}\psi_0'\right]\delta x_0 + \left[H(t_0) + \psi_{0t_0}\right]\delta t_0 &= 0 \\ \left[p'(t_f) + \nabla_{x_f}\psi_0'\right]\delta x_f + \left[-H(t_f) + \psi_{0t_f}\right]\delta t_f &= 0 \end{aligned}$$

❸ Conditions de Weierstrass-Erdmann : H^* et p^* doivent être continus sur la trajectoire optimale en tout point de discontinuité en x^*

$$H^*(t_i^-) = H^*(t_i^+) \quad p^*(t_i^-) = p^*(t_i^+)$$

❹ Condition de Weierstrass : $\forall\ q$

$$\mathcal{E}(t, x^*, \dot{x}^*, u) = \mathcal{E}(t, x^*, p^*, q) = H(t, x^*, p^*) - H(t, x^*, q) - H_q'(t, x^*, q)(p^* - q) \geq 0$$

❺ Condition de Legendre-Clebsch :

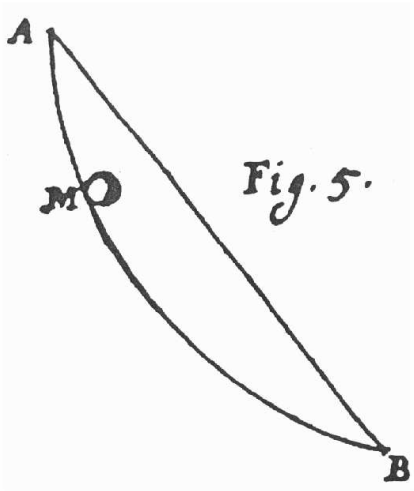
$$H_{pp}(t, x^*(t), p^*(t)) \succeq 0$$

Commande optimale des systèmes dynamiques

Cours 4

Approche variationnelle en commande optimale

Principe du maximum de Pontryagin



Le problème de commande optimale est défini par :

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{u(t)\in\mathcal{C}^0([t_0,t_f],\mathbb{R}^m)} & J(x,u)=\displaystyle\int_{t_0}^{t_f} L(t,x(t),u(t))dt+\psi_0(t_f,x(t_f)) \\ \text{sous} & \dot{x}(t)=f(t,x(t),u(t)),\ x(t_0)=x_0 \\ & x(t_f)=x_f,\ t_f \text{ libres} \end{array}$$

- $x(t)\in\mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état
- $u(t)\in\mathbb{R}^m$ est le vecteur de commande
- Problème de calcul des variations sous une contrainte différentielle instantanée (équation dynamique d'état)

Nota :

$$\int_{t_0}^{t_f}\frac{d\psi_0(t,x(t))}{dt}dt=\psi_0(t_f,x(t_f))-\psi_0(t_0,x(t_0))$$

$$J_2(x,u)=\int_{t_0}^{t_f}\left[L(t,x(t),u(t))+\frac{d\psi_0(t,x(t))}{dt}\right]dt=J(x,u)-\psi_0(t_0,x(t_0))$$

Fonctionnelle augmentée avec le vecteur des multiplieurs de Lagrange

$\lambda \ : \ [t_0, t_f] \to \mathbb{R}^n$: appelé vecteur d'état adjoint

$$\begin{aligned}
\mathcal{J} &= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ L(t,x,u) + \lambda'(t)[f(t,x,u) - \dot{x}] \right\} dt + \psi_0(t_f, x(t_f)) \\
&= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) - \lambda'(t)\dot{x}(t) \right\} dt + \psi_0(t_f, x(t_f)) \\
&= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ H(t,x,u,\lambda) + \dot{\lambda}' x(t) \right\} dt - \lambda'(t_f)x(t_f) + \lambda'(t_0)x(t_0) + \psi_0(t_f, x(t_f))
\end{aligned}$$

Première variation sur l'état, la commande et le temps final :

$$x(t) = x^*(t) + \delta x(t) \quad u(t) = u^*(t) + \delta u(t) \quad t_f = t_f^* + \delta t_f$$

$$\begin{aligned}
\delta J &= \left[H^* + \psi^*_{0t_f} \right]_{|t_f} \delta t_f + \left[\nabla_{x_f} \psi_0^* - \lambda^*(t) \right]'_{|t_f} \delta x_f \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[H_x^* + \dot{\lambda}^*(t) \right]' \delta x(t) + H_u^{*'} \delta u(t) \right\} dt
\end{aligned}$$

❒ **Théorème 1** *Si* $u^*(t)$ *est trajectoire optimale locale faible de commande alors* $\exists\ \lambda^*(t)\ [t_0, t_f] \to \mathbb{R}^n$:

- *C.N. 1 : équations canoniques de Hamilton*

$$\begin{array}{rcl} H_\lambda(t, x^*, u^*, \lambda^*) & = & \dot{x}^*(t) = f(t, x^*, u^*) \ \text{ Equation d'état} \\ H_x(t, x^*, u^*, \lambda^*) & = & -\dot{\lambda}^*(t) \ \text{ Equation d'état adjointe} \\ H_u(t, x^*, u^*, \lambda^*) & = & 0 \ \text{ Equation de commande} \end{array}$$

- *C.N. 2 : condition au deuxième ordre de Jacobi*

  Il n'existe pas de points conjugués sur $[t_0, t_f)$ *ou la solution* $S(t)$ *de :*

$$-\dot{S} = H_{xx} + Sf_x + f_x' S - (H_{xu} + Sf_u) H_{uu}^{-1} (H_{ux} + f_u' S), \quad S(t_f) = \psi_{0xx}(t_f, x(t_f))$$

  est finie sur $[t_0, t_f)$

- *C.N. 3 : condition au deuxième ordre de Legendre-Clebsch*

$$H_{uu}^* \succeq 0$$

- *C.N. 4 : les conditions de transversalité*

Différentes conditions de transversalité

$$\left[H(t_f, x^*(t_f), u^*(t_f), \lambda^*(t_f)) + \psi^*_{0t_f}\right] \delta t_f + \left[\nabla_{x_f}\psi^*_0 - \lambda^*(t_f)\right]' \delta x_f = 0$$

❶ t_f fixé et x_f fixé : $\delta t_f = 0 \quad \delta x_f = 0 \quad x(t_0) = x_0 \quad x(t_f) = x_f$

❷ t_f fixé et x_f contraint $\psi(x(t_f)) = 0,\ \psi(.) \in \mathbb{R}^N$:

$$\psi(x^*(t^*_f)) = 0 \qquad x(t_0) = x_0$$
$$\nabla_{x_f}\psi^*_0 + \psi^{*'}_{x_f}\nu = \lambda^*(t_f)$$

❸ t_f fixé et x_f libre : $\delta t_f = 0 \quad \delta x_f \neq 0 \quad x(t_0) = x_0 \quad \nabla_{x_f}\psi^*_0 - \lambda^*(t_f) = 0$

❹ t_f libre et x_f fixé :

$$\delta t_f \neq 0 \quad \delta x_f = 0 \quad x(t_0) = x_0 \quad x(t_f) = x_f \quad H(t_f, x^*(t_f), u^*(t_f), \lambda^*(t_f)) + \psi^*_{0t_f} = 0$$

❺ t_f libre et x_f contraint $\psi(t_f, x(t_f)) = 0,\ \psi(.) \in \mathbb{R}^N$:

$$\left[H^* + \nu'\psi^*_{t_f} + \psi^*_{0t_f}\right]_{|t_f} \delta t_f + \left[\nabla_{x_f}\psi^*_0 + \psi^{*'}_{x_f}\nu - \lambda^*\right]'_{|t_f} \delta x_f = 0$$

❻ t_f libre et x_f libre : $\delta t_f \neq 0 \quad \delta x_f \neq 0 \quad x(t_0) = x_0$

$$\left[H^* + \psi^*_{0t_f}\right]_{|t_f} \delta t_f + \left[\nabla_{x_f}\psi^*_0 - \lambda^*\right]'_{|t_f} \delta x_f = 0$$

❒ **Théorème 2** *condition forte de Legendre-Clebsch*

Pour un triplet d'extrémales (x^*, u^*, λ^*) *vérifiant les CN au premier ordre et au second ordre d'optimalité, une condition suffisante pour que ce soit une extrémale minimale faible est que la condition de Legendre-Clebsch forte soit vérifiée :*

$$H_{uu}(t, x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t)) \succ 0$$

✐ **Exemple 1**

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{u(t)\in\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})} & J(x,u) = \int_0^1 (x(t)-u(t))^2 dt \\ \text{sous} & \dot{x}(t) = u(t) \quad x(0) = 1 \end{array}$$

❶ *C.N. 1 :*

$$H = (u-x)^2 + \lambda u \qquad H_u^* = \lambda^* + 2(u^* - x^*) = 0 \qquad \dot{\lambda}^* = 2(u^* - x^*) \qquad \lambda^*(1) = 0$$

$$\lambda^*(t) = 0 \qquad u^*(t) = x^*(t) \qquad x^*(t) = e^t \qquad u^*(t) = e^t$$

❷ *C.N. 2 : équation de Riccati homogène et points conjugués sur cet intervalle*

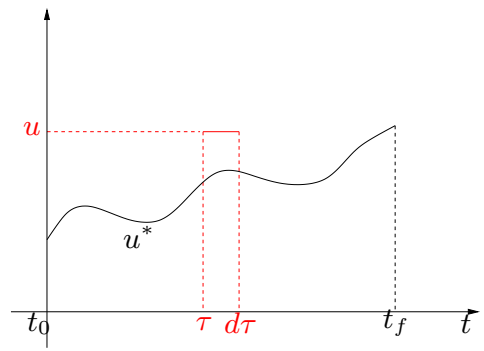
$$\dot{s}(t) = \frac{s^2(t)}{2} - 2s(t), \;\; s(1) = 0 \qquad s(t) \equiv 0 \qquad s(t) \text{ est finie partout sur } [0,1]$$

❸ *C.N. 3 et C.S. de Legendre-Clebsch :* $H_{uu} = 2 > 0$

$(x^*(t) = e^t, u^*(t) = e^t)$ *est un minimum local faible*

Variation forte (en aiguille)

$$\delta u = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad t < \tau \ \tau \in (t_0, t_f) \\ u - u^* & \text{pour} \quad \tau \leq t \leq \tau + d\tau \\ 0 & \text{pour} \quad \tau + d\tau \leq t \leq t_f \end{cases}$$



C.N. 4 : condition de Weierstrass

Si (x^*, λ^*, u^*) est un minimum fort du problème de commande optimale alors u^* conduit à un minimum absolu pour le Hamiltonien :

$$\delta H = H(t, x^*, \lambda^*, u) - H(t, x^*, \lambda^*, u^*) \geq 0 \quad \forall\ t \text{ et } u \neq u^*$$

Exemple 1 *(suite)*

❹ *C.N. 4 : condition de Weierstrass*

$$\begin{aligned} H(t, x^*, \lambda^*, u) - H(t, x^*, \lambda^*, u^*) &= (u - x^*)^2 + \lambda^* u - (u^* - x^*)^2 - \lambda^* u^* \\ &= (u - u^*)^2 > 0 \ \forall\ u \neq u^* \end{aligned}$$

$(x^*(t) = e^t, u^*(t) = e^t)$ *est un minimum local fort*

On suppose que $u^* \in \mathcal{PC}^1([t_0, t_f], \mathbb{R}^n)$ et $\tau \in [t_0, t_f]$ est le point de discontinuité en lequel la condition $\theta(\tau, x(\tau)) = 0$ est imposée

On définit alors $G(\tau, x_\tau, \xi, t_f, x_f, \nu) = \psi_0(t_f, x_f) + \nu' \psi(t_f, x_f) + \xi' \theta(\tau, x_\tau)$

1. Equations canoniques d'Euler-Lagrange sur les sous-arcs $[t_0, \tau]$ et $[\tau, t_f]$
2. Conditions de transversalité et conditions aux extrémités
3. Condition de Legendre-Clebsch
4. Conditions de Weierstrass-Erdmann :

$$H^*(\tau, x(\tau), u(\tau^-), \lambda(\tau^-)) = H^*(\tau, x(\tau), u(\tau^+), \lambda(\tau^+)) - G_\tau(\tau^*, x^*(\tau), \xi^*)$$
$$\lambda^*(\tau^-) = \lambda^*(\tau^+) + G_{x_\tau}(\tau^*, x^*(\tau), \xi^*)$$

5. Condition de Weierstrass : $\forall\ u \neq u^*$ et $\forall\ u \neq u^*(\tau^+)$

$$H(t, x^*, \lambda^*, u) - H(t, x^*, \lambda^*, u^*) > 0$$

Nota : pour une discontinuité non contrainte $\theta \equiv 0$, la condition de Weierstrass est vérifiée à l'égalité pour $u^* = u(\tau^-)$ et $u = u(\tau^+)$

Exemple 2

Exemple 2

$$\min_{u(t)\in\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})} \quad J(x,u) = \int_0^1 u(t)^3 dt$$

$$\text{sous} \qquad \dot{x}(t) = u(t) \quad x(0) = 0 \quad x(1) = 1$$

❶ *C.N. 1 :*

$$\dot{\lambda}^* = 0 \qquad \lambda^*(t) = \lambda^*(1) = \lambda^* \qquad H = u^3 + \lambda u$$

$$H_u^* = \lambda^* + 3u^{2*} = 0 \qquad u^* = \sqrt{\frac{-\lambda^*}{3}} \qquad x^*(t) = \sqrt{\frac{-\lambda^*}{3}}t \qquad x(1) = 1$$

$$\lambda^* = -3 \qquad x^*(t) = t \qquad u^*(t) = 1 \qquad J^* = 1$$

❷ *C.N. 3 et C.S. de Legendre-Clebsch :*

$$H_{uu} = 6u \qquad H_{uu}^* = 6 > 0$$

❸ *C.N. 2 : équation de Riccati homogène*

$$\dot{s}(t) = s^2/6, \;\; s(1) = 0 \qquad s(t) \equiv 0$$

Le minimum $(x^*, u^*, \lambda^*) = (t, 1, -3)$ *est un minimum local faible*

Exemple 2 (suite)

❹ C.N. 5 : condition de Weierstrass

$$\delta H(x^*, \lambda^*, u, u^*) = u^3 - u^{3*} + \lambda^*(u - u^*) = (u-1)^2(u+2) < 0 \text{ pour } u < -2\,!$$

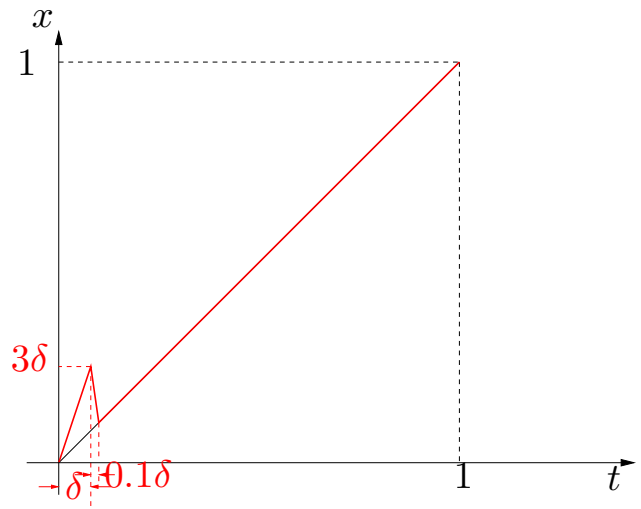
Le minimum $(x^*, u^*, \lambda^*) = (t, 1, -3)$ n'est pas un minimum fort

❺ C.N. 4 : conditions de Weierstrass-Erdman

$$\lambda(\tau_i^-) = \lambda(\tau_i^+) = \lambda$$
$$u(\tau_i^-)(u^2(\tau_i^-) + \lambda) = u(\tau_i^+)(u^2(\tau_i^+) + \lambda)$$

$$\begin{aligned} J(x,u) &= \int_0^\delta u^3(t)dt + \int_\delta^{1.1\delta} u^3(t)dt \\ &\quad + \int_{1.1\delta}^1 u^3(t)dt \\ &= 1 - 678\delta \end{aligned}$$

$J^*_{u \in \mathcal{K}\mathcal{C}^0} < J^*_{u \in \mathcal{C}^0}$



Approche variationnelle en CO : commentaires

- Le vecteur d'état adjoint $\lambda(t)$ découple les variables $x(t)$ et $u(t)$ dans les équations d'Euler-Lagrange (équations canoniques de Hamilton)
- Le vecteur de commande $u(t)$ n'est pas contraint ni borné
- La commande optimale $u^*(t)$ est obtenue par application du principe du minimum de Pontryagin : $H(t, x, u, \lambda) = \lambda_0 L(t, x, u) + \lambda' f(t, x, u)$
  - $\lambda_0 = 1$: principe du minimum de Pontryagin
  - $\lambda_0 = -1$: principe du maximum de Pontryagin

$$\max \to \min \quad J(x, u) \to \lambda_0 J(x, u) = \int_{t_0}^{t_f} \lambda_0 L(t, x(t), u(t))dt + \lambda_0 \psi_0^*$$

- Si H ne dépend pas explicitement de t alors il est constant le long de la trajectoire optimale

$$H_t(t, x^*, u^*, \lambda^*) = \frac{dH(t, x, u, \lambda)}{dt}$$

- Résoudre le problème aux deux bouts revient à résoudre les équations d'état et d'état adjointe avec les conditions initiales et finales (méthodes numériques dans les cas généraux : non linéaires et variants dans le temps)
- La résolution du problème aux deux bouts permet de résoudre l'équation de commande pour obtenir la commande optimale $u^*(t)$ en boucle ouverte

✐ **Exemple 3** *Soit le problème de commande optimale (double intégrateur)*

$$\min_{u(t)\in\mathcal{KC}^0([t_0,t_f],\mathbb{R})} \quad J(x,u) = \frac{1}{2}\int_0^2 u(t)^2 dt$$

$$\text{sous} \quad \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= u(t) \\ x(0) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}' \\ x(2) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}' \end{aligned}$$

Nota : problème de commande optimale à instant final et état final fixes où $L(t,x(t),u(t)) = \frac{1}{2}u^2(t)$ *est de classe* $\mathcal{C}^2$

❶ *Hamiltonien :*

$$H(x_1(t),x_2(t),u(t),\lambda_1(t),\lambda_2(t)) = \frac{1}{2}u^2(t) + \lambda_1(t)x_2(t) + \lambda_2(t)u(t)$$

❷ *Equation de commande :*

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x^*,u^*,\lambda^*) = u^*(t) + \lambda_2^*(t) = 0$$

$$u^*(t) = -\lambda_2^*(t)$$

Approche variationnelle en CO : exemple 1 (II)

❸ Hamiltonien à l'optimum :

$$H(x_1^*(t), x_2^*(t), \lambda_1^*(t), \lambda_2^*(t)) = -\frac{1}{2}\lambda_2^{2*}(t) + \lambda_1^*(t)x_2^*(t)$$

❹ Equations d'état :

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1^*(t) &= H_{\lambda_1}(x_1^*(t), x_2^*(t), \lambda_1^*(t), \lambda_2^*(t)) &= x_2^*(t) \\
\dot{x}_2^*(t) &= H_{\lambda_2}(x_1^*(t), x_2^*(t), \lambda_1^*(t), \lambda_2^*(t)) &= -\lambda_2^*(t)
\end{aligned}$$

❺ Equations d'état adjointe :

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_1^*(t) &= -H_{x_1}(x_1^*(t), x_2^*(t), \lambda_1^*(t), \lambda_2^*(t) &= 0 \\
\dot{\lambda}_2^*(t) &= -H_{x_2}(x_1^*(t), x_2^*(t), \lambda_1^*(t), \lambda_2^*(t) &= -\lambda_1^*(t)
\end{aligned}$$

❻ Solution des équations d'état et d'état adjointe :

$$\begin{aligned}
x_1^*(t) &= \tfrac{C_3}{6}t^3 - \tfrac{C_4}{2}t^2 + C_2 t + C_1 \\
x_2^*(t) &= \tfrac{C_3}{2}t^2 - C_4 t + C_2 \\
\lambda_1^*(t) &= C_3 \\
\lambda_2^*(t) &= -C_3 t + C_4
\end{aligned}$$

❼ Expression explicite de la commande optimale :

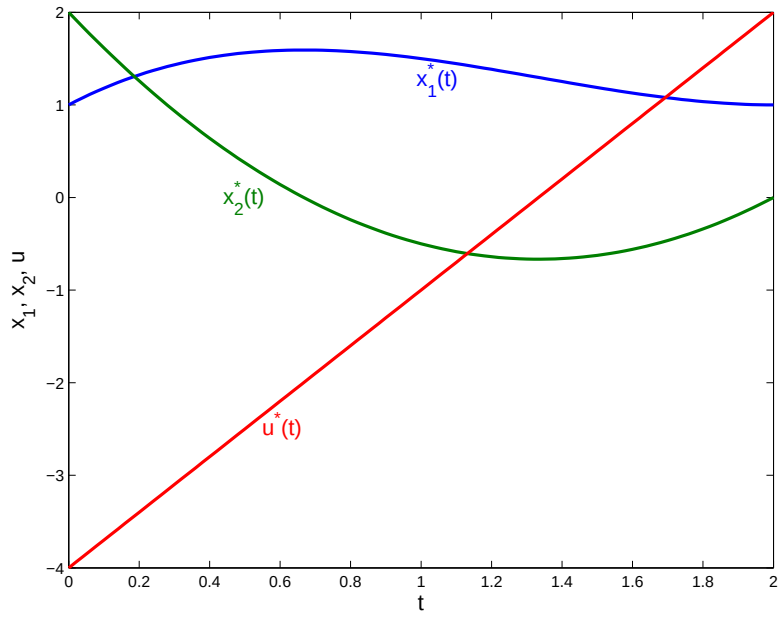
$$u^*(t) = C_3 t - C_4$$

❽ Détermination des constantes d'intégration :

$$C_1 = 1 \quad C_2 = 2 \quad C_3 = 3 \quad C_4 = 4$$

❾ Solution optimale :

$$\begin{aligned}
x_1^*(t) &= 0.5t^3 - 2t^2 + 2t + 1 \\
x_2^*(t) &= 1.5t^2 - 4t + 2 \\
\lambda_1^*(t) &= 3 \\
\lambda_2^*(t) &= -3t + 4 \\
u^*(t) &= 3t - 4 \\
H(x^*(t), \lambda^*(t)) &= -2 \\
J(x^*(t), u^*(t)) &= \frac{1}{2}\int_0^2 u^2(t)dt \\
&= \frac{3}{2}\left[t^3\right]_0^2 - 6\left[t^2\right]_0^2 + 8\left[t\right]_0^2 = 4
\end{aligned}$$



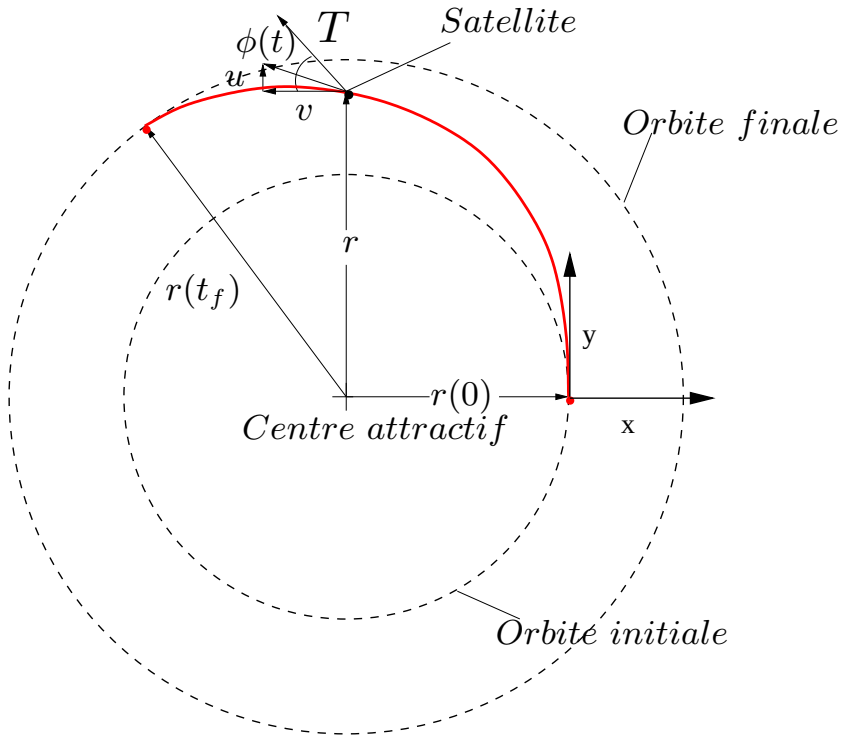
```
>> S=dsolve('Dx1=x2,Dx2=-lambda2,Dlambda1=0,Dlambda2=-lambda1,...
x1(0)=1,x2(0)=2,x1(2)=1,x2(2)=0')

S =

    lambda1: [1x1 sym]
    lambda2: [1x1 sym]
         x1: [1x1 sym]
         x2: [1x1 sym]
>> for tp=0:0.02:2
t=sym(tp);
x1p(j)=double(subs(S.x1));
x2p(j)=double(subs(S.x2));
lambda2(j)=double(subs(S.lambda2));
u(j)=-double(subs(S.lambda2));
t1(j)=tp;
j=j+1;
end
```

Exemple 4 *Problème du transfert orbital :* *soit une fusée de masse $m(t)$ devant atteindre en un temps donné (t_f) l'orbite circulaire de rayon maximal $(r(t_f))$ à partir d'une orbite circulaire donnée $r(0)$ et avec une vitesse initiale donnée v_0, en utilisant une poussée constante T dont l'orientation $\phi(t)$ peut varier.*

Mise en équations :

- *Equations dynamiques :*

$$\dot{r}(t) = u(t)$$
$$\dot{u}(t) = \frac{v^2(t)}{r} - \frac{\mu}{r^2} + \frac{T\sin\phi}{m_0 - |\dot{m}(t)|t}$$
$$\dot{v}(t) = -\frac{uv}{r} + \frac{T\cos\phi}{m_0 - |\dot{m}(t)|t}$$



- *Conditions aux limites :*

$$r(0) = r_0 > 0,\ u(0) = 0,\ v(0) = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}}$$
$$u(t_f) = 0,\ v(t_f) = \sqrt{\frac{\mu}{r(t_f)}}$$

- *Fonctionnelle :* $J = -r(t_f)$

Approche variationnelle en CO : exemple 2 (II)

❶ Hamiltonien :

$$H(x(t),\phi(t),\lambda(t)) = \lambda_1 u + \lambda_2\left(\frac{v^2}{r} - \frac{\mu}{r^2} + \frac{T\sin\phi}{m_0 - |\dot{m}|t}\right) + \lambda_3\left(-\frac{uv}{r} + \frac{T\cos\phi}{m_0 - |\dot{m}|t}\right)$$

❷ Equation de commande :

$$\frac{\partial H}{\partial \phi}(x^*,\phi^*,\lambda^*) = \frac{T}{m_0 - |\dot{m}|t}(\lambda_2^*(t)\cos\phi^*(t) - \lambda_3^*(t)\sin\phi^*(t)) = 0$$

$$\lambda_2^*(t)\cos\phi^*(t) = \lambda_3^*(t)\sin\phi^*(t) \Rightarrow \tan\phi^*(t) = \frac{\lambda_2^*(t)}{\lambda_3^*(t)}$$

❸ Equation d'état adjointe :

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_1^*(t) &= -H_r(x^*(t),\phi^*,\lambda^*(t)) &&= -\lambda_2^*(t)\left(-\frac{v^{2*}(t)}{r^{2*}(t)} + \frac{2\mu}{r^{3*}}\right) - \lambda_3^*(t)\frac{u^*(t)v^*(t)}{r^{2*}(t)} \\
\dot{\lambda}_2^*(t) &= -H_u(x^*(t),\phi^*,\lambda^*(t)) &&= -\lambda_1^*(t) + \lambda_3^*(t)\frac{v^*(t)}{r^*(t)} \\
\dot{\lambda}_3^*(t) &= -H_v(x^*(t),\phi^*,\lambda^*(t)) &&= -2\lambda_2^*(t)\frac{v^*(t)}{r^*(t)} + \lambda_3^*(t)\frac{u^*(t)}{r^*(t)}
\end{aligned}$$

❹ Conditions de transversalité : t_f fixé et $x(t_f)$ contraint par $\psi(t_f, x^*(t_f)) = 0$

Approche variationnelle en CO : exemple 2 (III)

Problème aux deux bouts :

$$
\begin{aligned}
\dot{r}^* &= u^* \\
\dot{u}^* &= \frac{v^{2*}}{r^*} - \frac{\mu}{r^{2*}} + \frac{T \sin \phi^*}{m_0 - |\dot{m}(t)|t} \\
\dot{v}^* &= -\frac{u^* v^*}{r^*} + \frac{T \cos \phi^*}{m_0 - |\dot{m}(t)|t} \\
\dot{\lambda}_1^* &= -\lambda_2^* \left(-\frac{v^{2*}}{r^{2*}} + \frac{2\mu}{r^{3*}} \right) - \lambda_3^* \frac{u^* v^*}{r^{2*}} \\
\dot{\lambda}_2^* &= -\lambda_1^* + \lambda_3^* \frac{v^*}{r^*} \\
\dot{\lambda}_3^* &= -2\lambda_2^* \frac{v^*}{r^*} + \lambda_3^* \frac{u^*}{r^*}
\end{aligned}
$$

Conditions initiales et finales :

$$
\begin{aligned}
\lambda_1^*(t_f) &= -1 + \frac{\nu_2 \sqrt{\mu}}{2 r^{*3/2}(t_f)} & r(0) &= 0 \\
\lambda_2^*(t_f) &= \nu_1 & u(0) &= 0 \\
\lambda_3^*(t_f) &= \nu_2 & v(0) &= \sqrt{\frac{\mu}{r_0}}
\end{aligned}
\qquad
\begin{bmatrix} u^*(t_f) \\ v^*(t_f) - \sqrt{\dfrac{\mu}{r^*(t_f)}} \end{bmatrix} = 0
$$

Le problème de commande optimale étudié est défini par :

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{u(t)\in\mathcal{U}} & J(x,u) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_f} L(t,x(t),u(t))dt + \psi_0(t_f,x(t_f)) \\ \text{sous} & \dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)),\ x(t_0) = x_0 \\ & x(t_f) = x_f,\ t_f \text{ libres} \end{array}$$

➥ **Hypothèses 1** - *les fonctions* $L(.)$ *et* $f(.)$ *sont de classe* $\mathcal{C}^1$ *par rapport à* x *et* t *:* $f(t,x,u)$, $f_x(t,x,u)$,$f_t(t,x,u)$, $L(t,x,u)$, $L_x(t,x,u)$, $L_t(t,x,u)$ *sont continues sur* $[t_0,t_f]\times\mathbb{R}^n\times\overline{\mathcal{U}}$

- *Le Hamiltonien* $H(t,x,u,\lambda) = L(t,x,u) + \lambda' f(t,x,u)$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *par rapport à* x *:* $H(t,x,u,\lambda)$ *et* $H_x(t,x,u,\lambda)$ *sont continues sur* $[t_0,t_f]\times\mathbb{R}^n\times\overline{\mathcal{U}}\times\mathbb{R}^n$
- *Contrainte sur le vecteur de commandes :* $u(t)\in\mathcal{U}$ *espace topologique de* $\mathcal{KC}^0([t_0,t_f],\mathbb{R}^m)$
- Les variations $\delta u(t)$ sur la trajectoire optimale de la commande $u^*(t)$ ne sont plus arbitraires : $u(t) = u^*(t) + \delta u(t) \in \mathcal{U}$
- Principe du maximum de Pontryagin pour $H(t,x,u,\lambda) = -L(t,x,u) + \lambda' f(t,x,u)$ donc ici principe du minimun de Pontryagin

Première variation de la fonctionnelle :

$$\begin{aligned}\delta J &= \left[H^* + \psi^*_{0t_f}\right]_{|t_f} \delta t_f + \left[\nabla_{x_f}\psi^*_0 - \lambda^*(t)\right]'_{|t_f} \delta x_f \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \left\{\left[H^*_x + \dot{\lambda}^*(t)\right]' \delta x(t) + H^{*'}_u \delta u(t)\right\} dt\end{aligned}$$

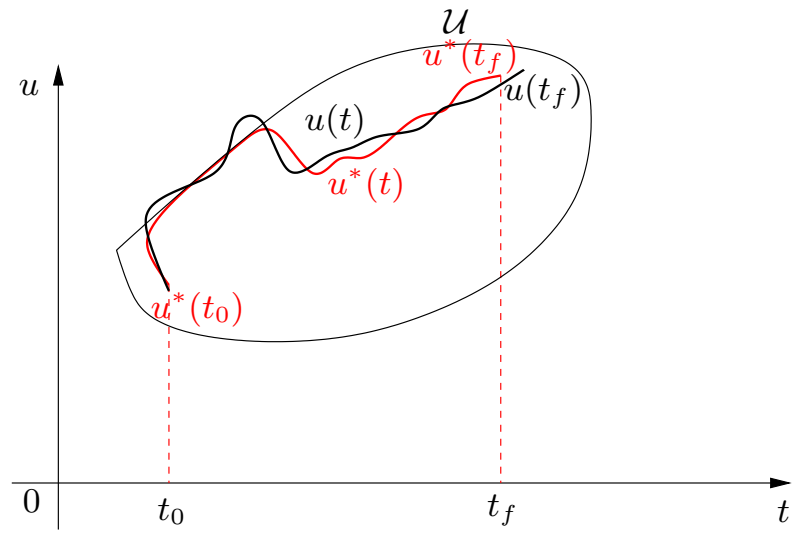
Les conditions nécessaires pour que $u^*(t)$ minimise J sont :

- $\delta J = 0$ si $u^*(t)$ est à l'intérieur de $\mathcal{U}$
- $\delta J \geq 0$ si $u^*(t)$ est sur la frontière de $\mathcal{U}$
- Equations canoniques de Hamilton :

$$\dot{x}^*(t) = H_\lambda(t, x^*, u^*, \lambda^*)$$
$$\dot{\lambda}^*(t) = -H_x(t, x^*, u^*, \lambda^*)$$

- Conditions de transversalité :

$$\left[H^* + \psi^*_{0t_f}\right]_{|t_f} \delta t_f + \left[\nabla_{x_f}\psi^*_0 - \lambda^*(t)\right]'_{|t_f} \delta x_f = 0$$



$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} H^{*'}_u \delta u(t) dt$ avec $H^{*'}_u \delta u(t) = H((t, x^*, u^* + \delta u, \lambda^*)) - H((t, x^*, u^*, \lambda^*))$

d'où $\delta J \geq 0$ implique $H(t, x^*, u, \lambda^*) \geq H(t, x^*, u^*, \lambda^*)\ \forall\ u \in \mathcal{U}$

❒ **Théorème 3** *principe de Pontryagin*

Si $u^*(t) \in \mathcal{U}$ *est une commande optimale admissible et* $x^*(t)$ *la trajectoire d'état optimale solution de l'équation d'état associée à* $u^*(t)$ *alors il existe un vecteur* $\lambda^*(t)$ *tel que les équations canoniques de Hamilton :*

$$\begin{aligned} \dot{x}^*(t) &= H_\lambda(t, x^*, u^*, \lambda^*) \\ \dot{\lambda}^*(t) &= -H_x(t, x^*, u^*, \lambda^*) \end{aligned}$$

L.S. Pontryagin

aient des solutions $(x^*(t), \lambda^*(t))$ *sous les conditions de transversalité :*

$$\left[H^* + \psi^*_{0t_f}\right]_{|t_f} \delta t_f + \left[\nabla_{x_f} \psi^*_0 - \lambda^*(t)\right]'_{|t_f} \delta x_f = 0$$

et $u^*(t)$ *est un minimum global du Hamiltonien sur* $\mathcal{U}$

$$\min_{u \in \mathcal{U}} \quad H(t, x^*, \lambda^*, u) = H(t, x^*, \lambda^*, u^*)$$

ou

$$H(t, x^*, \lambda^*, u) \geq H(t, x^*, \lambda^*, u^*) \quad \forall\, u \in \mathcal{U}$$

Nota :

- Si le vecteur de commande n'est pas contraint, la condition de minimisation du Hamiltonien revient à l'annulation du gradient du Hamiltonien par rapport à la commande à l'optimum

$$\min_{u \in \mathbb{R}^m} \quad H(t, x^*, \lambda^*, u) = H(t, x^*, \lambda^*, u^*) \quad \Leftrightarrow \quad H_u(t, x^*, \lambda^*, u^*) = 0$$

- Problème aux deux bouts : $2n$ équations différentielles à résoudre avec n conditions initiales $x(0)$ et n conditions finales si $x(t_f)$ est fixé ou N multiplieurs $+ \; n - N$ contraintes sur les variables adjointes si $\psi(.) \in \mathbb{R}^N$ avec $\psi(t_f, x(t_f)) = 0$

Conditions nécessaires additionnelles :

❶ Si t_f est libre et $H(t, x, \lambda, u) = H(x, \lambda, u)$ alors

$$H(x^*(t), \lambda^*(t), u^*(t)) \equiv 0 \quad \forall \; t \in [t_0, t_f]$$

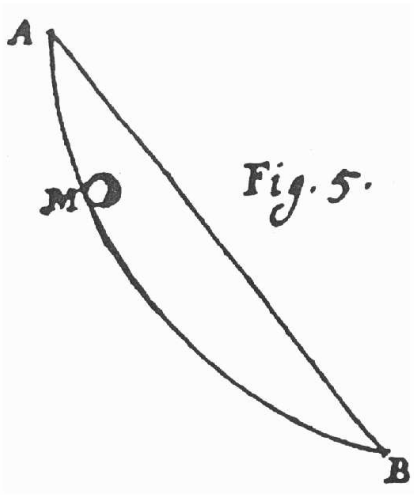
❷ Si t_f est fixé et $H(t, x, \lambda, u) = H(x, \lambda, u)$ alors

$$H(x^*(t), \lambda^*(t), u^*(t)) = C \quad \forall \; t \in [t_0, t_f]$$

Commande optimale des systèmes dynamiques

Cours 5

Applications du principe de Pontryagin



Exemple 1 *Problème de l'alunissage*

$$\min_{0\le u(t)\le 1} \quad -\int_0^{t_f} \dot{x}_3(t)dt = \int_0^{t_f} \sigma u(t)dt$$

sous

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -g + \sigma\alpha\frac{u(t)}{x_3(t)}$$

$$\dot{x}_3(t) = -\sigma u(t),\ x_1(0) = h_0 > 0$$

$$t_f \text{ libre},\ x_2(0) = v_0 \le 0$$

$$x_3(0) = M + F,\ x_1(t_f) = 0$$

$$x_2(t_f) = 0,\ 0 \le u(t) \le 1$$

Nota : problème de consommation minimum ≡ problème en temps minimum

$$J(t_f) = -\int_0^{t_f} \dot{x}_3(t)dt = -\int_0^{t_f} \dot{m}(t)dt = m(0) - m(t_f) = m(0)\left(1 - e^{\frac{(v_0 - g t_f)}{\alpha}}\right)$$

$J(t_f)$ *est une fonction strictement monotone croissante*

- Définition du Hamiltonien :

$$H(x,\lambda,u) = \sigma u(t) + \lambda_1(t)x_2(t) + \lambda_2(t)(\sigma\alpha\frac{u(t)}{x_3(t)} - g) - \sigma\lambda_3(t)u(t)$$

- Equations canoniques de Hamilton :

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1^*(t) &= x_2^*(t) \\
\dot{x}_2^*(t) &= -g + \sigma\alpha\frac{u^*(t)}{x_3^*(t)} \\
\dot{x}_3^*(t) &= -\sigma u^*(t) \\
\dot{\lambda}_1^*(t) &= -H_{x_1}^* = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1^*(t) = K_1 \\
\dot{\lambda}_2^*(t) &= -H_{x_2}^* = -\lambda_1^*(t) \quad \Rightarrow \quad \lambda_2^*(t) = -K_1 t + K_2 \\
\dot{\lambda}_3^*(t) &= -H_{x_3}^* = \sigma\alpha\frac{\lambda_2^*(t)u^*(t)}{x_3^{2*}(t)} \quad \Rightarrow \quad \dot{\lambda}_3^*(t) = \sigma\alpha\frac{(-K_1 t + K_2)u^*(t)}{x_3^{2*}(t)}
\end{aligned}$$

- Conditions initiales, finales :

$$x_1(0) = h_0 \quad x_2(0) = v_0 \quad x_3(0) = M + F \quad x_1(t_f) = 0 \quad x_2(t_f) = 0$$

Exemple de l'alunissage III

- Analyse du Hamiltonien comme fonction de u :

$$H(u) = \lambda_1(t)x_2(t) - \lambda_2(t)g + \left[\sigma\alpha\frac{\lambda_2(t)}{x_3(t)} - \sigma(\lambda_3(t) - 1)\right] u(t) = \phi_1(t) + \phi_2(t)u(t)$$

$H(u)$ est une fonction affine qui est minimale en ses bornes inférieure ou supérieure suivant le signe de $\phi_2(t) \Rightarrow$ commande optimale tout ou rien

$$u^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \phi_2(t) < 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha\lambda_2(t)}{x_3(t)} + 1 < \lambda_3(t) \\ 0 & \text{si } \phi_2(t) > 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha\lambda_2(t)}{x_3(t)} + 1 > \lambda_3(t) \end{cases}$$

Nota : condition de singularité

$u(t)$ est indéterminée si $\phi_2(t) = \frac{\alpha\lambda_2(t)}{x_3(t)} + 1 - \lambda_3(t) = 0$

Cette condition de singularité ne peut jamais être physiquement satisfaite

- Etude du signe de $\phi_2(t) = \left[\sigma\alpha\frac{\lambda_2(t)}{x_3(t)} - \sigma(\lambda_3(t) - 1)\right]$:

  - $\frac{d\phi_2(t)}{dt} = -\sigma\alpha\frac{\lambda_1}{x_3(t)} = -\sigma\alpha\frac{K_1}{m(t)}$
  - 1 commutation au plus en t_c
  - Pour $t_0 \rightarrow t_c$ $u^*(t) = 0$ et pour $t_c \rightarrow t_f$ $u^*(t) = 1$

Exemple de l'alunissage III

- Etude de l'arc de trajectoire $0 \rightarrow t_c,\ u = 0$:

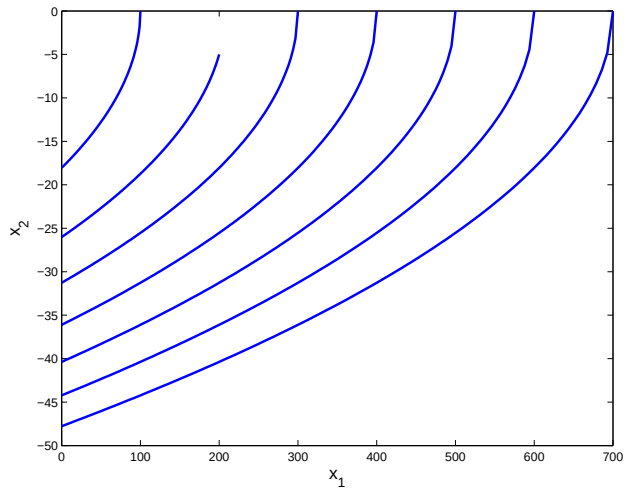
$$\begin{array}{rclcrcl} \dot{x}_1^*(t) & = & x_2^*(t) & \Rightarrow & x_1^*(t) & = & -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + h_0 \\ \dot{x}_2^*(t) & = & -g & \Rightarrow & x_2^*(t) & = & -gt + C_1 = -gt + v_0 \\ \dot{x}_3^*(t) & = & 0 & \Rightarrow & x_3^*(t) & = & m(0) = M + F \end{array}$$

- Equation de la trajectoire en chute libre :

$$x_1^*(t) = h_0 + \frac{(v_0^2 - x_2^{*2}(t))}{2g}$$

- Conditions finales au point t_c :

$$\begin{array}{rcl} x_{1c}^* & = & -\frac{gt_c^2}{2} + v_0 t_c + h_0 \\ x_{2c}^* & = & -gt_c + v_0 \\ x_{3c}^* & = & M + F \end{array}$$



Exemple de l'alunissage IV

- Etude de l'arc de trajectoire $t_c \to t_f,\ u = 1$:

$$\dot{x}_1^*(t) = x_2^*(t) \quad \Rightarrow$$
$$x_1^*(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + h_0 + \frac{\alpha m(0)}{\sigma} + \frac{\alpha m(0)}{\sigma}\left[1 - \frac{\sigma(t-t_c)}{m(0)}\right]\left[\log\left|1 - \frac{\sigma(t-t_c)}{m(0)}\right| - 1\right]$$
$$\dot{x}_2^*(t) = -g + \frac{\sigma\alpha}{x_3(t)} \quad \Rightarrow \quad x_2^*(t) = -gt + v_0 - \alpha\log\left|\frac{m(0) - \sigma(t-t_c)}{m(0)}\right|$$
$$\dot{x}_3^*(t) = -\sigma \quad \Rightarrow \quad x_3^*(t) = -\sigma t + C_3 = -\sigma t + m(0) + \sigma t_c = -\sigma(t - t_c) + m(0)$$

- Conditions finales : $m_f^*,\ t_f^*,\ t_c$

$$0 = -\frac{g{t_f^*}^2}{2} + v_0 t_f^* + h_0 + \frac{\alpha m(0)}{\sigma} + \frac{\alpha m(0)}{\sigma}\left[1 - \frac{\sigma(t_f^* - t_c^*)}{m(0)}\right]\left[\log\left|1 - \frac{\sigma(t_f^* - t_c^*)}{m(0)}\right| - 1\right]$$
$$0 = -gt_f^* + v_0 - \alpha\log\left|1 - \frac{\sigma(t_f^* - t_c^*)}{m(0)}\right|$$
$$m_f^* = -\sigma(t_f^* - t_c^*) + m(0)$$

MATLAB :

```
>> [mf,tc,tf]=solve('mf+(50*(tf-tc))-1500=0','-(1.63*tf)-(200*log(1-((tf-tc)/30)))=0',...
'-(0.815*tf^2)+6100+((6000*(1-((tf-tc)/30)))*(log(1-((tf-tc)/30))-1))')
```

Exemple de l'alunissage V

- Equations de la surface de commutation : $m(0)/\sigma > \theta^* = t_f^* - t_c^* > 0$

$$\begin{aligned} x_{1c}^* &= -\frac{g\theta^{*2}}{2} - \alpha\theta^* - \frac{\alpha m(0)}{\sigma}\log\left|1 - \frac{\sigma\theta^*}{m(0)}\right| \\ x_{2c}^* &= g\theta^* + \alpha\log\left|1 - \frac{\sigma\theta^*}{m(0)}\right| \end{aligned}$$

Nota :

- En éliminant θ^*, on obtient la surface de commutation $F(x_{1c}^*, x_{2c}^*) = 0$
- $\sigma\theta^*/m(0)$ est la proportion de masse initiale consommée

- Approximation de la surface de commutation : pour $\dfrac{\sigma\theta^*}{m(0)} \leq 0.25$

$$\log\left|1 - \frac{\sigma\theta^*}{m(0)}\right| \sim -\frac{\sigma\theta^*}{m(0)} - \frac{\sigma^2\theta^{*2}}{2m(0)^2}$$

$$x_{2c}^* = \left(g - \frac{\alpha\sigma}{m(0)}\right)\sqrt{\frac{2x_{1c}^*}{\frac{\alpha\sigma}{m(0)} - g}} - \frac{\alpha\sigma^2}{m(0)^2}\frac{x_{1c}^*}{\frac{\alpha\sigma}{m(0)} - g}$$

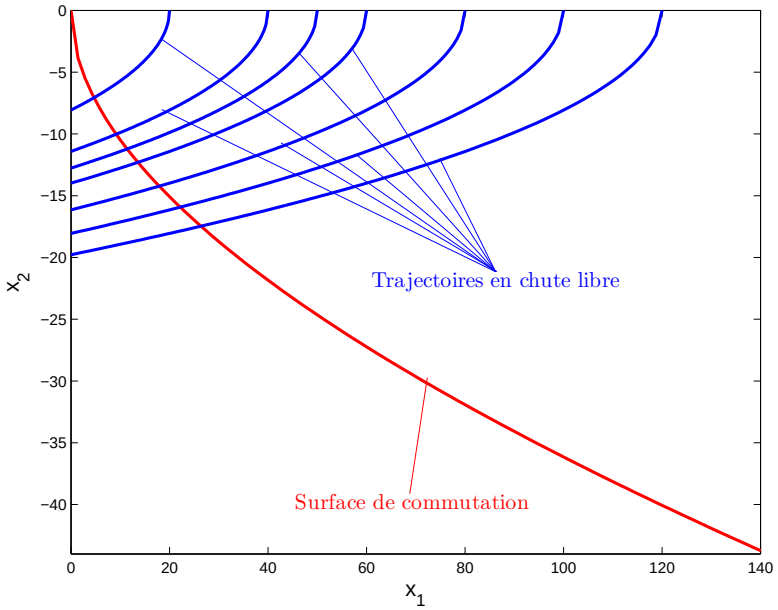
Nota : $\dfrac{\alpha\sigma}{m(0)} \geq g$ et $\theta^* = \sqrt{\dfrac{2x_{1c}^*}{(\frac{\alpha\sigma}{m(0)} - g)}}$

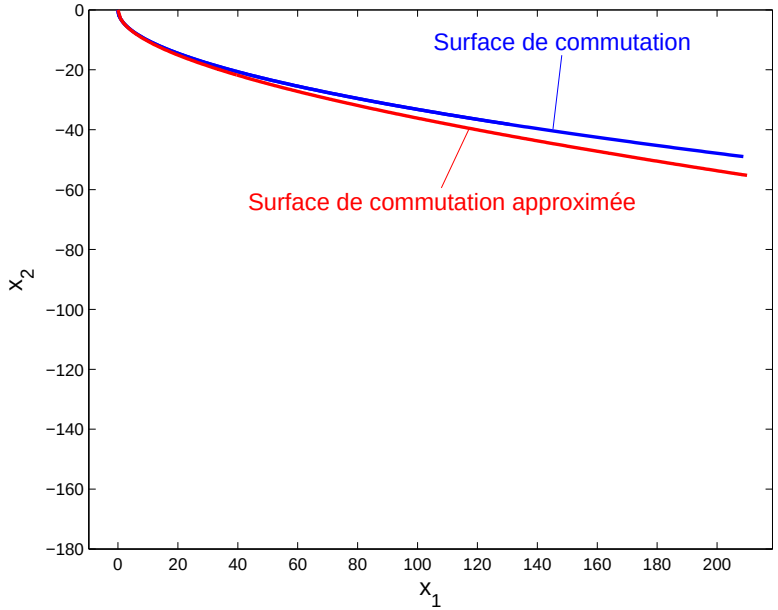
Exemple de l'alunissage VI

- Espace réalisable :

$$\frac{\sigma\theta^*}{m(0)} \leq 0.25 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 0 \leq x_{1c} \leq 0.25^2 a \dfrac{m^2(0)}{\sigma^2} \\ -0.5a\dfrac{m(0)}{\sigma} - 0.25^2 b \dfrac{m^2(0)}{\sigma^2} \leq x_{2c} \leq 0 \end{cases}$$

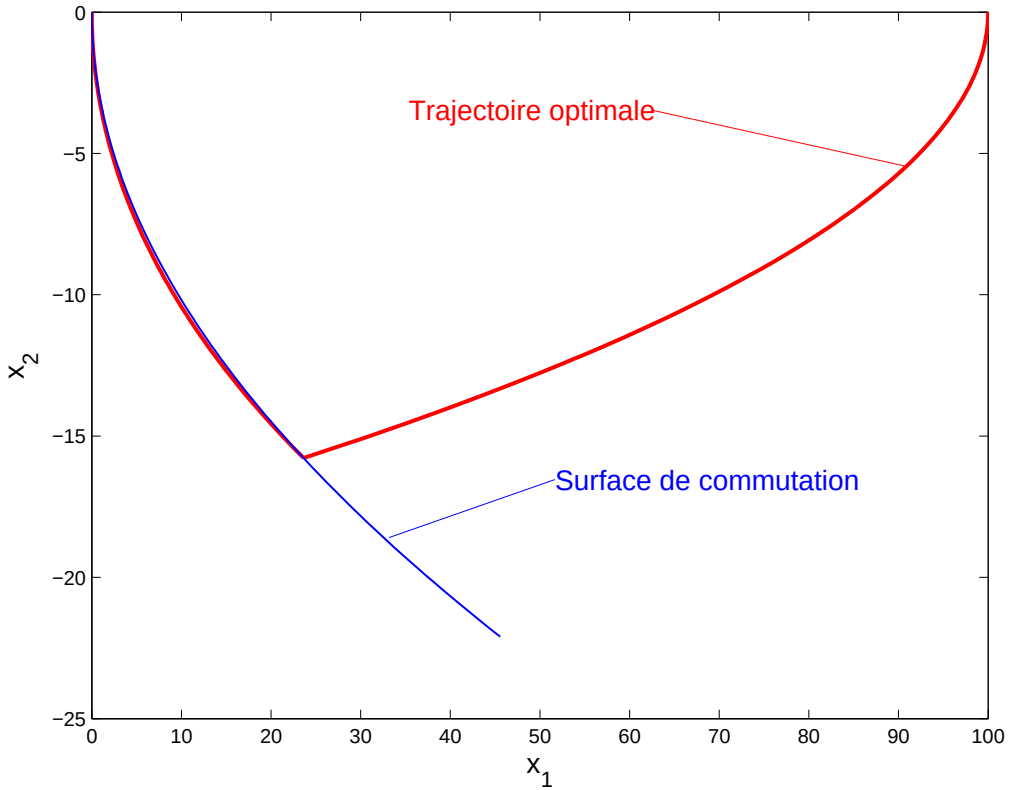
où $a = 0.5(\dfrac{\alpha\sigma}{m(0)} - g)$ et $b = \dfrac{\alpha\sigma^2}{2m^2(0)}$ et la surface de commutation approximée : $f(x_{1c}, x_{2c}) = bx_{1c} + 2a^2\sqrt{\frac{x_{1c}}{a}} + ax_{2c} = 0$





Données numériques :

$$h_0 = 100 \text{ m} \quad m(0) = 1500 \text{ kg} \quad g = 1.63 \text{ m/s}^2$$
$$\sigma = 50 \text{ kg/s} \quad \alpha = 200 \text{ m/s}$$



$t_f^* = 12.61$ s $\quad t_c^* = 9.68$ s

$m_f^* = 1353,5$ kg $\quad J^* = 146.5$ kg

$x_{1c}^* = 23.63$ m $\quad x_{2c}^* = -15.78$ m/s

$0 \leq x_{1c} \leq 141.65$ m $\quad -44$ m/s $\leq x_{2c} \leq 0$

Nota : la surface de commutation et la trajectoire ($t_c \rightarrow t_f$) optimale sont distinctes

Commande optimale bang-bang

Le problème de commande optimale étudié est défini par :

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{u(t)\in\mathcal{U}} & J(x,u) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_f} L(t,x(t)) + M'(t,x(t))u(t)dt + \psi_0(t_f,x(t_f)) \\ \text{sous} & \dot{x}(t) = f(t,x(t)) + G(t,x(t))u(t),\ \ x(t_0) = x_0 \end{array}$$

- $\mathcal{U} = \{u(t) \in \mathbb{R}^m \ : \ \underline{u}_i \leq u_i \leq \overline{u}_i \ \forall\ i = 1, \cdots, m\}$
- La commande "entre" linéairement dans le problème

✍ Hamiltonien : fonction linéaire de u

$$H(t,x(t),u(t),\lambda(t)) = L(t,x) + M'(t,x)u(t) + \lambda'(t)\left[f(t,x) + G(t,x)u(t)\right]$$

✍ Principe de Pontryagin :

$$u_i^*(t) = \begin{cases} \underline{u}_i & \text{si} \quad [M'(t,x) + \lambda'(t)G(t,x)]_i > 0 \\ \overline{u}_i & \text{si} \quad [M'(t,x) + \lambda'(t)G(t,x)]_i < 0 \end{cases}$$

La commande optimale $u^*(t)$ est une commande bang-bang

- Equations canoniques de Hamilton et problème aux deux bouts :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(t,x(t)) + G(t,x(t))u(t),\ x(t_0) = x_0 \\ \dot{\lambda}(t) &= -\frac{\partial L(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial M'(t,x)}{\partial x}u(t) - \frac{\partial f'(t,x)}{\partial x}\lambda(t) - \lambda'(t)\frac{\partial G(t,x)}{\partial x}u(t),\ \lambda(t_f) = \lambda_f\end{aligned}$$

Exemple 2 *modèles linéaires et temps minimum*

$$\begin{aligned}&\min_{-1\le u(t)\le 1} && t_f \\ &\text{sous} && \dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t)u(t) \\ & && x(t_0) = x_0,\ x(t_f) = 0\end{aligned}$$

- *Hamiltonien :* $H(t,x(t),u(t),\lambda(t)) = \lambda'(t)A(t)x(t) + \lambda'(t)b(t)u(t)$
- *Principe de Pontryagin :*

$$u^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \lambda'(t)b(t) < 0 \\ -1 & \text{si} \quad \lambda'(t)b(t) > 0 \end{cases} \qquad \lambda'(t)b(t) \text{ fonction de commutation}$$

- *Condition de transversalité :* $\lambda'(t_f)(A(t_f)x(t_f) + b(t_f)u(t_f)) + 1 = 0$
- *Equation d'état adjointe :* $\dot{\lambda}(t) = -A'(t)\lambda(t)$

✍ Condition de singularité / commande i : $[M'(t,x^*) + \lambda'(t)G(t,x^*)]_i = 0$

$$H(t,x^*,\lambda^*) = L(t,x^*) + \sum_{j\neq i}^{m} M_j(t,x^*)u_j^*(t) + \lambda^{*'}(t)\left[f(t,x^*) + \sum_{j\neq i}^{m} G_j(t,x^*)u_j^*(t)\right]$$

u_i^* est un élément optimal singulier du vecteur de commande optimale u.

▼ **Définition 1** *solution singulière*

Pour un vecteur $u^*(t)$ dont les composantes sont singulières, si la condition $\dfrac{\partial H(t,x^*,\lambda^*)}{\partial u} = 0$ est vérifiée sur un intervalle de temps fini alors $u^*(t)$ est une solution singulière (arc singulier) totale (partielle) sur $[t_0, t_f]$ ($[t_1, t_2]$)

❒ **Théorème 1** *condition généralisée de Legendre-Clebsch*

Une condition nécessaire d'optimalité pour le vecteur de commande $u^*(t)$ est

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{d^p H_u}{dt^p} = 0 \;\forall\; t \in [t_0, t_f] \quad \text{et} \quad (-1)^q \frac{\partial}{\partial u}\frac{d^{2q} H_u}{dt^{2q}} \succeq 0 \;\forall\; t \in [t_0, t_f]$$

pour p pair et q l'ordre de singularité de $u^*(t)$

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{u} & \psi_0(x(t_f)) \\ \text{sous} & \dot{x}(t) = f(x) + g(x)u \ , u \in \mathbb{R}, \ x(0) \text{ donné} \\ & \psi(x(t_f)) = 0, \ t_f \text{ fixé} \end{array}$$

- Hamiltonien : $H = \lambda'(f(x) + g(x)u)$
- Système d'état adjoint : $\dot{\lambda} = -f'_x\lambda - g'_x\lambda u$
- Conditions de transversalité : $\lambda(t_f) = \nabla_{x_f}\psi_0 + \psi'_{x_f}\nu$
- Condition d'optimalité : $H_u = \lambda' g(x) = 0$
- Conditions de singularité :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[H_u] &= \lambda' g_x(f(x) + g(x)u) - \lambda'(f_x + g_x u)g(x) = 0 \\ &= \lambda'(g_x f(x) - f_x g(x)) = \lambda' q(x) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}[H_u] &= -\lambda' f_x q(x) - \lambda' g_x q(x)u + \lambda' q_x(f(x) + g(x)u) = 0 \\ &= u(\lambda' q_x g(x) - \lambda' g_x q(x)) + \lambda'(q_x f(x) - f_x q(x)) = 0 \end{aligned}$$

- Commande singulière : si $(\lambda' q_x g(x) - \lambda' g_x q(x)) \neq 0$

$$u = -\frac{\lambda'(q_x f(x) - f_x q(x))}{\lambda'(q_x g(x) - g_x q(x))}$$

- Surface singulière dans l'espace (λ, x) : (dimension 2n-2)

$$\begin{aligned} \lambda' g(x) &= 0 \\ \lambda'(g_x f(x) - f_x g(x)) &= 0 \end{aligned}$$

Nota :

- Si $\dfrac{\partial H}{\partial t} = 0$ et t_f libre alors la dimension de la surface singulière est 2n-3

$$H = \lambda'(f(x) + g(x)u) = \lambda' f(x) = 0$$

- Si $n = 3$ alors l'équation de la surface singulière est donnée par :

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ (g_x f(x) - f_x g(x))_1 & (g_x f(x) - f_x g(x))_2 & (g_x f(x) - f_x g(x))_3 \end{vmatrix} = 0$$

Arcs singuliers : exemple

Le problème de commande optimale étudié est défini par :

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{|u(t)|\leq 1} & J = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^2 x^2 dt \\ \text{sous} & \dot{x}(t) = u(t),\ x(0) = 1,\ x(2) = 0 \end{array}$$

- Hamiltonien : $H(x, u, \lambda) = \dfrac{x^2}{2} + \lambda u$
- Equations canoniques de Hamilton :

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}^*(t) & = & u^*(t),\ x^*(0) = 1 \\ \dot{\lambda}^*(t) & = & -x(t),\ x^*(2) = 0 \end{array}$$

- Principe de Pontryagin :

$$u^*(t) = -\text{sign}(\lambda^*(t)) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad \lambda^*(t) > 0 \\ 1 & \text{si} \quad \lambda^*(t) < 0 \\ \text{singulière} & \text{si} \quad \lambda^*(t) = 0 \end{cases}$$

Arcs singuliers : exemple (suite)

- Analyse des arcs singuliers : $\lambda(t) = 0, \ \forall\, t \in [t_1, t_2] \subset [0, 2]$

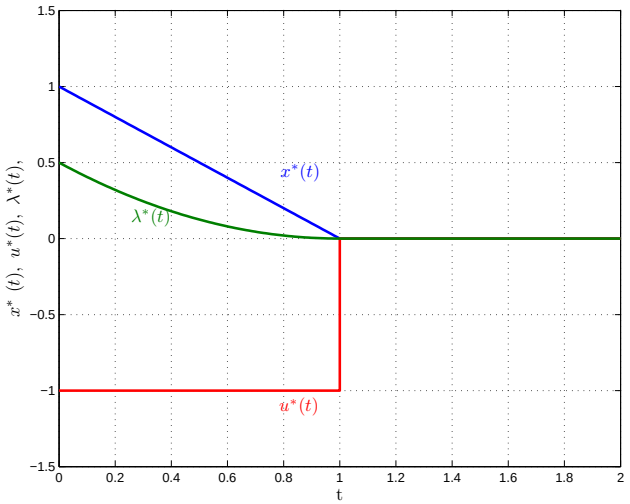
$$\lambda(t) = 0 \ \Rightarrow \ \dot{\lambda}(t) = 0 \ \Rightarrow \ x(t) = 0 \ \Rightarrow \ u(t) = 0$$

Nota : une commutation se produit en t_1 si $x(t_1) = 0$

- Discussion :
  - $\lambda^*(t) < 0 \ \Rightarrow \ u^*(t) = -\mathrm{sign}(\lambda^*) = 1 \ \Rightarrow \ x^*(t) = t + 1$ donc pas de commutation et solution impossible
  - $\lambda^*(t) > 0 \ \Rightarrow \ u^*(t) = -\mathrm{sign}(\lambda^*) = -1 \ \Rightarrow \ x^*(t) = 1 - t \ \Rightarrow \ t_c = 1$ alors $\lambda^*(t) = \dfrac{t^2}{2} - t + \lambda(0)$ avec $\lambda(0) = 0.5$

La solution optimale est donc donnée par :

$$\begin{array}{ll} 0 \le t \le 1 & \begin{array}{l} u^*(t) = -1 \quad x^*(t) = 1 - t \\ \lambda^*(t) = \dfrac{t^2}{2} - t + \dfrac{1}{2} \end{array} \\ 1 \le t \le 2 & \begin{array}{l} u^*(t) = 0 \quad x^*(t) = 0 \\ \lambda^*(t) = 0 \quad \lambda^*(2) = 0 \end{array} \end{array}$$



Le problème de commande optimale étudié est défini par :

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{u(t)\in\mathcal{U}} & J = \displaystyle\int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0 \\ \text{sous} & \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\ x(t_0) = x_0,\ x(t_f) = 0 \end{array}$$

- $\mathcal{U} = \{u(t) \in \mathbb{R}^m \ : \ -1 \leq u_i \leq 1 \ \forall \ i = 1, \cdots, m\}$
- La dynamique du sytème est supposée linéaire

✍ Hamiltonien : $H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = 1 + \lambda'(t)\,[Ax(t) + Bu(t)]$

✍ Equations canoniques de Hamilton :

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}^*(t) & = & Ax^*(t) + Bu^*(t) \quad x^*(t_0) = x_0,\ x^*(t_f) = 0 \\ \dot{\lambda}^*(t) & = & -A'\lambda^*(t) \end{array}$$

✍ Principe de Pontryagin :

$$u^*(t) = -\text{sign}(B'\lambda^*(t)) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad B'\lambda^*(t) > 0 \\ 1 & \text{si} \quad B'\lambda^*(t) < 0 \\ \text{singulière} & \text{si} \quad B'\lambda^*(t) = 0 \end{cases}$$

- C.N.S. de singularité :

  ❐ **Théorème 2** *Le système admet une commande optimale en temps minimum singulière sur* $[t_1, t_2]$ *ssi le système n'est pas commandable*

- Unicité de la commande optimale et nombre de commutations :

  ❐ **Théorème 3** *Si le système est complètement commandable alors il n'existe qu'une seule commande extrémale égale à la commande optimale en temps minimum. Dans ce cas, si ses* n *pôles sont réels la commande optimale* $u^*(t)$ *peut commuter au plus* $n-1$ *fois*

- Existence de la commande optimale :

  ❐ **Théorème 4** *Si le système est complètement commandable et si les valeurs propres de* A *sont toutes à partie réelle non positive alors une commande optimale en temps minimum conduisant* x_0 *en* $x(t_f) = 0 \ \forall \ x_0 \in \mathbb{R}^n$ *existe toujours*

Nota : si le système est temps-variant $(\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t))$, l'unicité des extrémales et de la commande optimale est toujours vraie

Le problème de commande optimale étudié est défini par :

$$\min_{u(t)\in\mathcal{U}} \quad J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^{m} |u_i(t)| dt$$

$$\text{sous} \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \; x(t_0) = x_0, \; x(t_f) = x_f$$

- Hamiltonien : $H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = \sum_{j=1}^{m} |u_i(t)| + \lambda'(t)\,[Ax(t) + Bu(t)]$
- Equations canoniques de Hamilton :

$$\begin{aligned} \dot{x}^*(t) &= Ax^*(t) + Bu^*(t) \quad x^*(t_0) = x_0, \; x^*(t_f) = x_f \\ \dot{\lambda}^*(t) &= -A'\lambda^*(t) \end{aligned}$$

- Principe de Pontryagin :

$$u^*(t) = -\mathrm{dez}(B'\lambda^*(t)) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |B'\lambda^*(t)| < 1 \\ -\mathrm{sign}(\mathrm{B}'\lambda^*(\mathrm{t})) & \text{si} \quad |B'\lambda^*(t)| > 1 \\ 0 \leq u \leq 1 & \text{si} \quad B'\lambda^*(t) = -1 \\ -1 \leq u \leq 0 & \text{si} \quad B'\lambda^*(t) = 1 \end{cases}$$

- C.S. de non singularité :

  ❐ **Théorème 5** *Si le système est commandable et la matrice A n'est pas singulière :*

$$\det(B_j A) \neq 0 \;\; \forall\, j = 1, \cdots, m \quad B = \begin{bmatrix} B_1 & \cdots & B_j & \cdots B_m \end{bmatrix}$$

  alors le système n'admet pas de commande optimale en consommation minimale singulière sur $[t_0, t_f]$

- Unicité de la commande optimale en consommation minimale :

  ❐ **Théorème 6** *Si le système n'admet pas de commande optimale en consommation minimale singulière sur $[t_0, t_f]$ alors il existe une unique commande optimale en consommation minimale.*

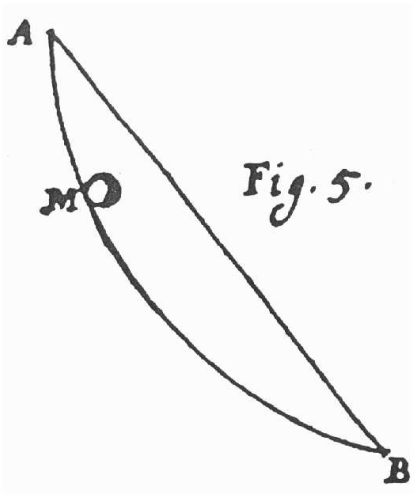
- Structure de commande en boucle ouverte ou fermée

Nota : pas de théorème général d'existence de la loi de commande optimale en consommation minimale

Commande optimale des systèmes dynamiques

Cours 6

Théorie du régulateur linéaire quadratique



Soit le problème de commande optimale :

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{u(t)\in\mathbb{R}^m} & J(u) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{t_f} [x'(t)Q(t)x(t) + u'(t)R(t)u(t)]\,dt + \dfrac{1}{2}x'(t_f)Q_f x(t_f) \\ \text{sous} & \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t),\ x(0) = x_0 \text{ fixé} \\ & t_f \text{ fixé} \\ & x(t_f) = x_f \text{ libre} \end{array}$$

➥ **Hypothèses 1**

- $Q_f \succeq 0$, $Q(t) \succeq 0$, $\forall\ t \in [0, t_f]$
- $R(t) \succ 0$, $\forall\ t \in [0, t_f]$
- Interprétation : déterminer la commande $u(t)$ qui maintienne le vecteur d'état proche de son état d'équilibre 0 sans une dépense trop forte en énergie de commande
- Nota : pas de contrainte sur la commande

❶ Hamiltonien :

$$H(x,u,\lambda) = \frac{1}{2}\left[x'(t)Q(t)x(t) + u'(t)R(t)u(t)\right] + \lambda'(t)\left[A(t)x(t) + B(t)u(t)\right]$$

❷ Equation d'optimalité :

$$H_u(x^*,u^*,\lambda^*) = R(t)u^*(t) + B'(t)\lambda^*(t) = 0 \;\Rightarrow\; u^*(t) = -R^{-1}(t)B'(t)\lambda^*(t)$$

❸ Equations canoniques de Hamilton : TPBVP

$$\begin{aligned}
\dot{x}^*(t) &= A(t)x^*(t) - B(t)R^{-1}(t)B'(t)\lambda^*(t),\; x(0) = x_0 \\
\dot{\lambda}^*(t) &= -Q(t)x^*(t) - A'(t)\lambda^*(t),\; \lambda^*(t_f) = Q_f x_f
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^*(t) \\ \dot{\lambda}^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & -B(t)R^{-1}B'(t) \\ -Q(t) & -A'(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^*(t) \\ \lambda^*(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x(0) \\ \lambda^*(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ Q_f x_f \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^*(t) \\ \lambda^*(t) \end{bmatrix} = \Phi(t,0) \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda^*(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t,0) & \Phi_{12}(t,0) \\ \Phi_{21}(t,0) & \Phi_{22}(t,0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda^*(0) \end{bmatrix}$$

où $\Phi(t,0)$ est la matrice de transition d'état du TPBVP

En utilisant la condition terminale sur l'état adjoint, on obtient :

$$\lambda^*(t) = \left[\Phi_{22}(t_f,t) - Q_f\Phi_{12}(t_f,t)\right]^{-1}\left[Q_f\Phi_{11}(t_f,t) - \Phi_{21}(t_f,t)\right]x^*(t)$$

$$\lambda^*(t) = P(t)x^*(t)$$

avec $P(t) \succeq 0$, $\forall\, t \in [0,t_f]$ et $P(t_f) = Q_f$

Nota : la matrice $\left[\Phi_{22}(t_f,t) - Q_f\Phi_{12}(t_f,t)\right]^{-1}$ existe toujours puisque

$$\left[\Phi_{22}(t_f,t_f) - Q_f\Phi_{12}(t_f,t_f)\right]^{-1} = \mathbf{1}$$

et

$$P(t_f) = \left[\Phi_{22}(t_f,t_f) - Q_f\Phi_{12}(t_f,t_f)\right]^{-1}\left[Q_f\Phi_{11}(t_f,t_f) - \Phi_{21}(t_f,t_f)\right] = Q_f$$

Comme $\lambda(t) = P(t)x(t)$, on a

$$\dot{\lambda}^*(t) = \dot{P}(t)x^*(t) + P(t)\dot{x}^*(t) \quad u^*(t) = -R^{-1}B'(t)P(t)x^*(t)$$

En substituant ces expressions dans le système d'équations canoniques de Hamilton, on obtient l'équation différentielle de Riccati :

$$\dot{P}(t) + A'(t)P(t) + P(t)A(t) - P(t)B(t)R^{-1}B'(t)P(t) + Q(t) = 0 \quad P(t_f) = Q_f$$

✍ **Remarques 1**

- *La matrice de Riccati $P(t)$ est une matrice symétrique variant dans le temps indépendante de l'instant initial (ici $t_0 = 0$)*
- *L'équation de Riccati constitue un système de $n(n+1)/2$ équations différentielles ordinaires du premier ordre non linéaires variant dans le temps*
- *La matrice de Riccati $P(t)$ est une matrice définie positive sur $[0, t_f)$*
- *La matrice $P(t)$ peut être calculée hors ligne par intégration numérique arrière à partir de $P(t_f) = Q_f$*

❒ **Théorème 1** *Le problème LQ défini avec les hypothèses précédentes a une solution unique qui est caractérisée par :*

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)B'(t)P(t)x^*(t) = K(t)x^*(t)$$

où $K(t)$ est gain de Kalman et $P(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est la matrice de Riccati symétrique définie positive solution de l'équation de Riccati différentielle :

$$\dot{P}(t) + A'(t)P(t) + P(t)A(t) - P(t)B(t)R^{-1}B'(t)P(t) + Q(t) = 0$$

satisfaisant la condition terminale $P(t_f) = Q_f$. La trajectoire d'état optimale est solution de :

$$\dot{x}^*(t) = \left[A(t) - B(t)R^{-1}(t)B'(t)P(t)\right] x^*(t),\ x(0) = x_0$$

Le coût optimal est alors donné par :

$$J^*(x^*(t), t) = \frac{1}{2}x^{*'}(t)P(t)x^*(t) \quad \forall\ t \in [0, t_f]$$

❒ **Théorème 2** *Le problème LQ défini avec les hypothèses précédentes et un critère de performance :*

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^{t_f} \begin{bmatrix} x'(t) & u'(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q(t) & S(t) \\ S'(t) & R(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt + \frac{1}{2}x'(t_f)Q_f x(t_f)$$

a une solution unique qui est caractérisée par :

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)\left[B'(t)P(t) + S'(t)\right]x^*(t) = K(t)x^*(t)$$

où $K(t)$ est gain de Kalman et $P(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est la matrice de Riccati symétrique définie positive solution de l'équation de Riccati différentielle :

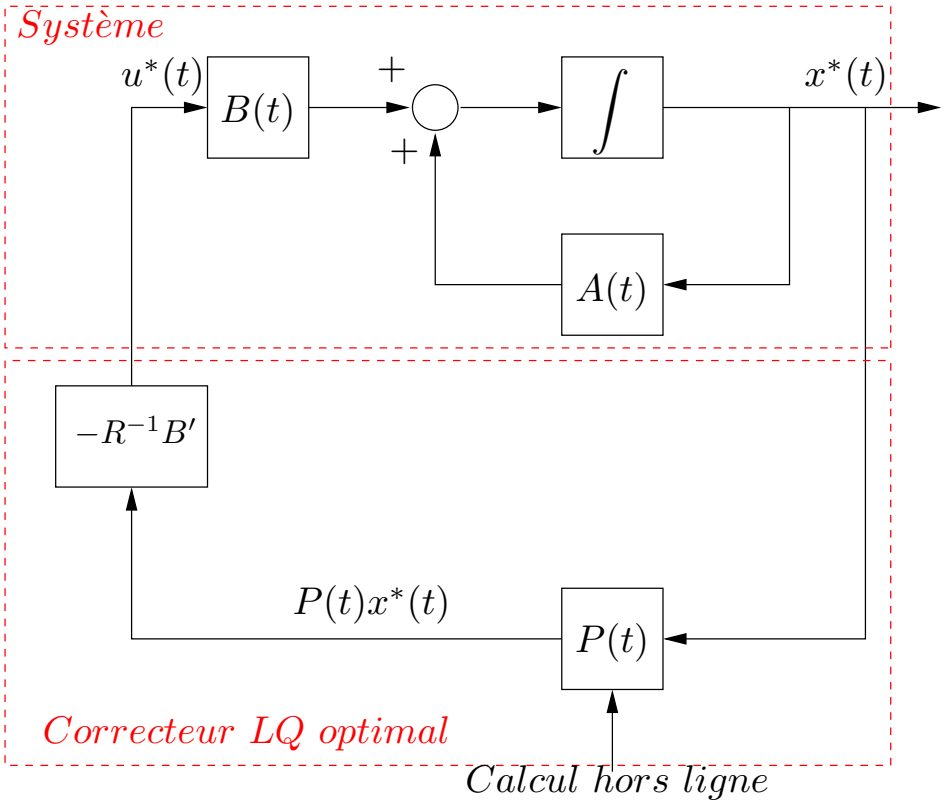
$$\dot{P}(t) + A'(t)P(t) + P(t)A(t) - \left[P(t)B(t) + S(t)\right]R^{-1}\left[B'(t)P(t) + S'(t)\right] + Q(t) = 0$$

satisfaisant la condition terminale $P(t_f) = Q_f$. La trajectoire d'état optimale est solution de :

$$\dot{x}^*(t) = \left[A(t) + B(t)K(t)\right]x^*(t),\ x(0) = x_0$$

Remarques 2

- *La structure de la commande optimale est une structure de commande en boucle fermée*
- *La loi de commande optimale est linéaire et variant dans le temps même si le système est LTI*
- *L'hypothèse de commandabilité de la paire $(A(t), B(t))$ n'est pas nécessaire*



- *Le vecteur d'état complet doit être disponible à la mesure*

Soit le problème LQ en horizon fini :

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{u(t)\in\mathbb{R}} & J(u) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{t_f} \left[x_1^2(t) + hx_2^2(t) + u^2(t)\right] dt \\ \text{sous} & \dot{x}_1(t) = ax_2(t) + u(t),\ x_1(0) = x_{10} \text{ fixé} \\ & \dot{x}_2(t) = bx_2(t), x_2(0) = x_{20} \text{ fixé} \end{array}$$

Le régulateur LQ optimal est donné par :

$$u^*(t) = -p_{11}(t)x_1(t) - p_{12}(t)x_2(t)$$

où $p_{11}(t)$ et $p_{12}(t)$ sont les solutions de :

$$\begin{array}{rcl} \dot{p}_{11}(t) & = & p_{11}^2(t) - 1,\ p_{11}(t_f) = 0 \\ \dot{p}_{12}(t) & = & -ap_{11}(t) - bp_{12}(t) + p_{11}(t)p_{12}(t),\ p_{12}(t_f) = 0 \\ \dot{p}_{22}(t) & = & p_{12}^2(t) - 2ap_{12}(t) - 2bp_{22}(t) - h,\ p_{22}(t_f) = 0 \end{array}$$

✍ **Remarques 3**

- $u^*(t)$ *est indépendante de* h *puisque* $p_{11}(t)$ *et* $p_{12}(t)$ *sont indépendants de* h
- *Pour* $a \neq 0$, $u^*(t)$ *dépend de* x_2 *même si* x_2 *est non commandable*
- *Pour* $a = 0$, $u^*(t)$ *ne dépend pas de* x_2

$$\begin{aligned} \dot{p}_{11}(t) &= p_{11}^2(t) - 1, \; p_{11}(t_f) = 0 \\ \dot{p}_{12}(t) &= p_{12}(t)(p_{11}(t) - b), \; p_{12}(t_f) = 0 \end{aligned}$$

donc

$$p_{12}(t) = p_{12}(0) e^{\int_0^t (b - p_{11}(\tau)) d\tau}, \; p_{12}(t_f) = 0$$

On en conclut que $p_{12}(t) = 0$ *sur l'intervalle* $[0, t_f]$

❒ **Théorème 3**

Dans le cas invariant dans le temps, la solution de l'équation de Riccati différentielle est obtenue à partir de la solution du système d'équations différentielles linéaires :

$$\begin{bmatrix} \dot{X}(t) \\ \dot{Y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B' \\ -Q & -A' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix} = \mathcal{H} \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} X(t_f) \\ Y(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ Q_f \end{bmatrix} X_f$$

où $\mathcal{H}$ est la matrice Hamiltonienne

$$P(t) = Y(t)X^{-1}(t) = \left[U_{21} + U_{22}e^{-\Lambda_u(t_f-t)}Ge^{\Lambda_s(t_f-t)}\right]\left[U_{11} + U_{12}e^{-\Lambda_u(t_f-t)}Ge^{\Lambda_s(t_f-t)}\right]^{-1}$$

avec :

$$U^{-1}\mathcal{H}U = \begin{bmatrix} \Lambda_s & 0 \\ 0 & \Lambda_u \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix}$$

$$G = -\left[U_{22} - Q_f U_{12}\right]^{-1}\left[U_{21} - Q_f U_{11}\right]$$

Soit le problème de commande optimale :

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{u(t)\in\mathbb{R}^m} & J(u) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\infty [x'(t)Qx(t) + u'(t)Ru(t)]\,dt \\ \text{sous} & \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\ x(0) = x_0 \text{ fixé} \end{array}$$

➥ **Hypothèses 2**

- $Q \succeq 0$
- $R \succ 0$
- *La paire* (A, B) *est commandable*

Nota : $t_f \to \infty$

- Pas de coût terminal $\lim\limits_{t_f\to\infty} x'(t_f)Q_f x(t_f)$
- Comportement du vecteur d'état en régime permanent après le régime transitoire

❒ **Théorème 4** *[Kalman 1960]*

Si $Q_f = 0$ *et la paire* (A, B) *est commandable alors* $\lim_{t_f \to \infty} P(t) = P$ *solution de l'équation de Riccati algébrique :*

$$A'P + PA - PBR^{-1}B'P + Q = 0$$

❒ **Théorème 5**

Le problème LQ défini avec les hypothèses précédentes a une solution unique :

$$u^*(t) = -R^{-1}B'Px^*(t) = Kx^*(t)$$

où K *est gain de Kalman et* $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *est la matrice de Riccati symétrique solution de l'équation de Riccati algébrique :*

$$A'P + PA - PBR^{-1}B'P + Q = 0 \qquad P = U_{21}U_{11}^{-1}$$

La trajectoire d'état optimale et le coût optimal sont donnés par :

$$\dot{x}^*(t) = \left[A - BR^{-1}B'P\right]x^*(t),\ x(0) = x_0 \quad J^* = \frac{1}{2}x_0'Px_0$$

❒ **Théorème 6**

Le problème LQ en horizon infini pour lequel la paire (A, B) est commandable et la paire (A, C) est observable ($Q = C'C$) a une solution unique :

$$u^*(t) = -R^{-1}B'Px^*(t)$$

où la matrice de Riccati symétrique $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est définie positive et solution de l'équation de Riccati algébrique :

$$A'P + PA - PBR^{-1}B'P + Q = 0$$

De plus, le système dynamique en boucle fermée est asymptotiquement stable

$$\Lambda(A - BR^{-1}B'P) \subset \mathbb{C}^-$$

Nota :

- Existence d'une loi optimale stabilisante $\Rightarrow$ (A, B) stabilisable et (A, C) détectable
- $\Lambda(\mathcal{H}) \cap \mathbb{C}^0 = \emptyset \Rightarrow (A, B)$ stabilisable et (A, C) détectable
- Si (A, C) est détectable mais non observable alors $P \succeq 0$

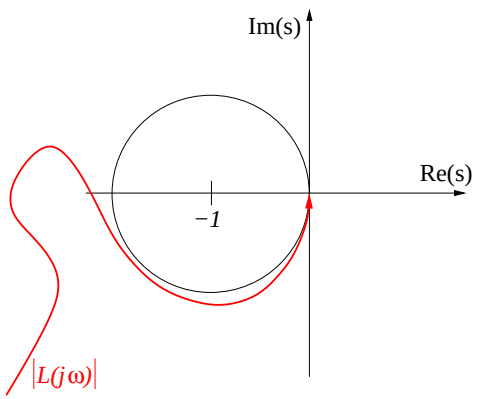
Pour des matrices de pondération $Q \succeq 0$ et $R = \rho \mathbf{1}$ $\rho > 0$

❒ **Théorème 7** *inégalité de Kalman*

Si le gain de boucle est $L_u(s) = K_r \Phi(s) B = -R^{-1} B' P (s\mathbf{1} - A)^{-1} B$

$$\underline{\sigma}(\mathbf{1} + L_u(j\omega)) \geq 1$$

Interprétation SISO :



$$|1 + L_u(j\omega)| \geq 1 \ \forall \ \omega \quad \Leftrightarrow \quad |S_u(j\omega)| \leq 1 \ \forall \ \omega$$

$$|D^{-1} - 1| < 1 \leq |1 + L_u(j\omega)| \ \forall \ \omega$$

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} 0.5 & \leq & M_G & \leq & +\infty \\ -60^o & \leq & M_\Phi & \leq & 60^o \end{array}}$$

$$D = \mathrm{diag}\{k_i e^{j\theta_i}\}$$

$$\theta_i = 0, \ 0.5 \leq k_i \leq \infty$$

$$k_i = 1 \quad |\theta_i| \leq 60^o$$

Synthèse : calcul du régulateur LQ

Le régulateur LQ de gain K_r est déterminé par le choix des matrices

$$Q = H'H \quad \text{et} \quad R = \rho 1$$

Modelage des valeurs singulières :

- $Q = C'\mathrm{diag}(q_i)C$ et (q_i, ρ) paramètres de synthèse
- Faible roll-off aux hautes fréquences (-20 dB/decade) / incertitudes de modélisation et bruits de mesure
- Choix par loopshaping :
  - Basses fréquences :

$$\underline{\sigma}(-K_r\Phi(j\omega)B) > |w_1(j\omega)| > 1 \quad \omega < \omega_l$$

  - Hautes fréquences :

$$\overline{\sigma}(-K_r\Phi(j\omega)B) < \frac{1}{|w_2(j\omega)|} < 1 \quad \omega > \omega_h$$

Synthèse : exemple de régulateur LQ

Modèle d'état :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e$$

$$z = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x(t)$$

Fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{1-s}{s^2}$$

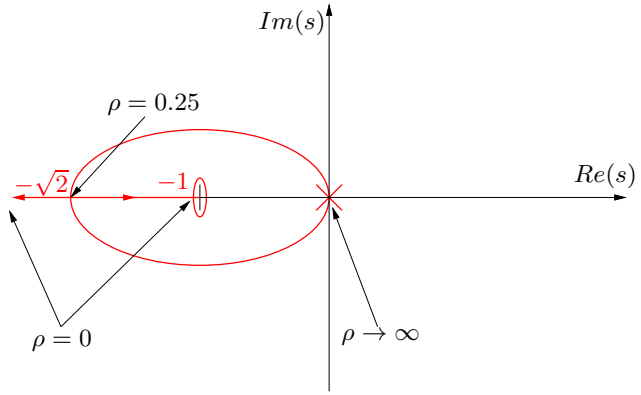
Régulateur ($e = 0$) minimisant :

$$J = \int_0^\infty [z^2 + \rho u^2] dt \quad \text{avec} \quad \rho > 0$$

Solution analytique :

$$P = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{1+2\sqrt{\rho}} & \sqrt{\rho} \\ \sqrt{\rho} & \sqrt{\rho(1+2\sqrt{\rho})} \end{bmatrix}$$

$$K_r = -\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\rho}} & \frac{\sqrt{1+2\sqrt{\rho}}}{\sqrt{\rho}} \end{bmatrix}$$

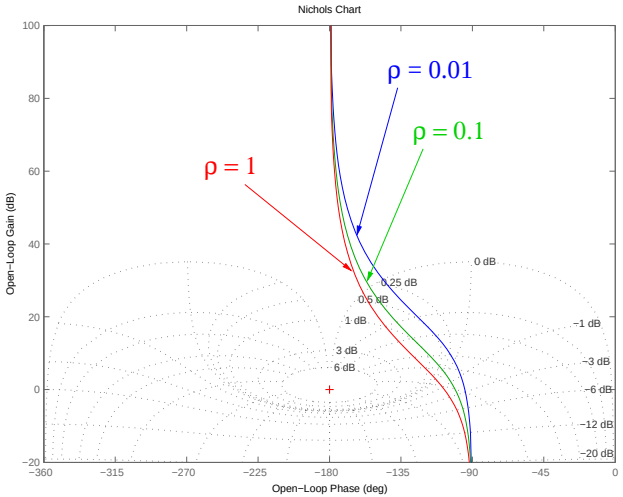
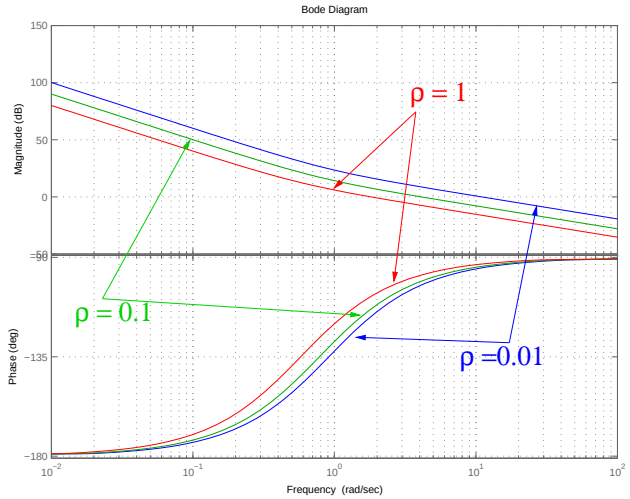
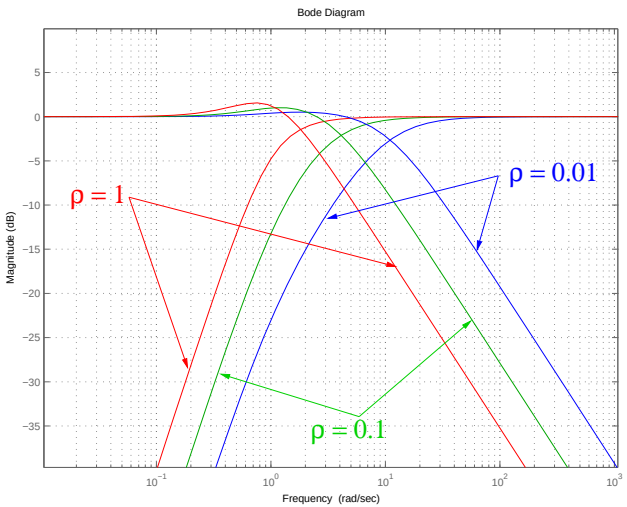
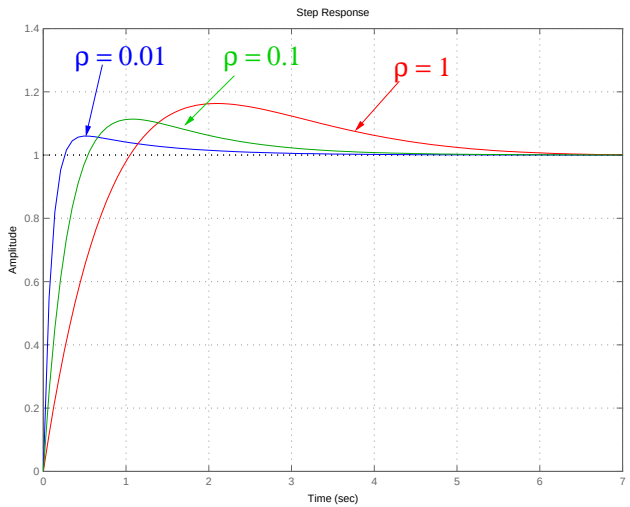


- Pour $\rho < 0.25$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\sqrt{1+2\sqrt{\rho}} \pm \sqrt{1-2\sqrt{\rho}}}{2\sqrt{\rho}}$$

- Pour $\rho > 0.25$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\sqrt{1+2\sqrt{\rho}} \pm j\sqrt{-1+2\sqrt{\rho}}}{2\sqrt{\rho}}$$

Synthèse : exemple de régulateur LQ

```
>> [K,P]=lqr(A,B,C'*C,rho)
```