Corrigé type

Exercice 1 :

a) Le LRT

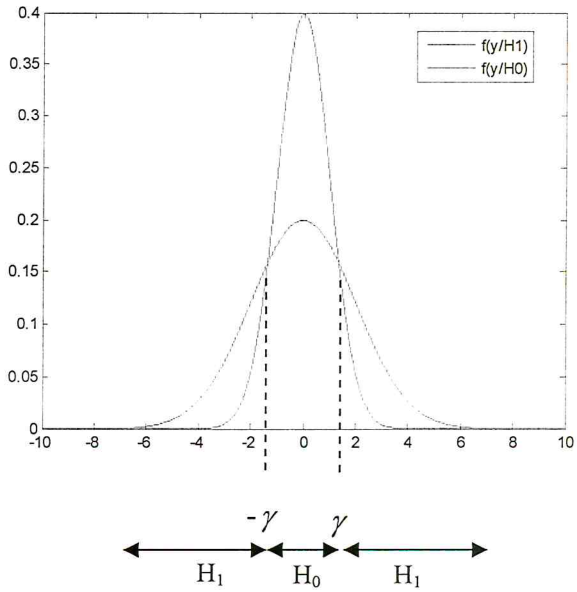
$$\Lambda(y) = \frac{f_{y/H_1}}{f_{y/H_0}} \underset{H0}{\overset{H1}{\gtrless}} \frac{p_0\left(C_{10} - C_{00}\right)}{p_1\left(C_{01} - C_{11}\right)} = \eta$$

$$f(y/H_1) = f(y/H_0) * f(s)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 + \sigma_1^2$$

$$|y| \underset{H0}{\overset{H1}{\gtrless}} \sqrt{\frac{2\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\left(\sigma_0^2 - \sigma_1^2\right)\log(\eta\frac{\sigma}{\sigma_0})} = \gamma$$



Pour $\eta = 1$,

$$\gamma = \sqrt{\frac{2\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\left(\sigma_0^2 - \sigma_1^2\right)\log(\frac{\sigma}{\sigma_0})}$$

b) Calcul de γ :

$$P_{FA} = 2\int_{\gamma}^{\infty} f(y/H_0)dy = 2\int_{\gamma}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_0^2}\right)dy$$

On pose $t^2 = \dfrac{y^2}{2\sigma_0^2} \Rightarrow t = \dfrac{y}{\sqrt{2}\sigma_0}$

$$P_{FA} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\gamma}{\sqrt{2}\sigma_0}}^{\infty} \exp\left(-t^2\right)dt = erfc\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}\sigma_0}\right) = 1 - erf\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}\sigma_0}\right)$$

Si $P_{FA} = 0.4$, $erf\left(\dfrac{\gamma}{\sqrt{2}\sigma_0}\right) = 0.6$ et d'après le tableau, on obtient : $\dfrac{\gamma}{\sqrt{2}\sigma_0} \approx 0.595$

$$\gamma \approx 0.8415\sigma_0$$

Exercice 2:

a) f(x) suit la loi exponentielle donnée par :

$$\begin{cases} H_0 : \mathrm{f}(\mathrm{x}) = \dfrac{1}{b}\exp\left(-\dfrac{x}{b}\right) \\ H_1 : \mathrm{f}(\mathrm{x}) = \dfrac{1}{b(1+SNR)}\exp\left(-\dfrac{x}{b(1+SNR)}\right) \end{cases}$$

b) $\mathbf{P_{FA}}$:

$$P_{FA}=\int_0^{\infty}\int_T^{\infty}\frac{1}{b}\exp(-\frac{x}{b})p(y)dy$$

On utilise le produit de convolution, on obtient la fdp de $y=\hat{b}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i$ comme

$$p(y)=\left(\frac{N}{b}\right)^N\frac{2}{(N-1)!}y^{N-1}\exp\left(-\frac{Ny}{b}\right)$$

$$P_{FA}=\int_0^{\infty}\exp(-\frac{\alpha y}{b})\left(\frac{N}{b}\right)^N\frac{2}{(N-1)!}y^{N-1}\exp\left(-\frac{Ny}{b}\right)dy$$

Pour N=1 $\Rightarrow$ $P_{FA}=(1+\alpha)^{-1}$ (intégration par partie)

Pour N=2 $\Rightarrow$ $P_{FA}=\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)^{-2}$ (intégration par partie)

Pour N quelconque $\Rightarrow$ $P_{FA}=\left(1+\frac{\alpha}{N}\right)^{-N}$

Exercice 3 :

a) Estimation de $\hat{\nu}$ et $\hat{b}$:

Utilisant les moments d'ordre 1 et 2, on remarque que le rapport $\frac{\mu_2}{\mu_1^2}$ est in dépendant du paramètre d'échelle b. D'où

$$\begin{cases}\mu_1=<x>=\left(\frac{4}{\pi b^2}\right)\frac{\Gamma(2)\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu)}\\ \mu_2=<x^2>=\left(\frac{4}{\pi b^2}\right)^2\frac{\Gamma(3)\Gamma(\nu+2)}{\Gamma(\nu)}\end{cases}$$

$$\frac{\mu_2}{\mu_1^2}=\frac{\Gamma(3)\Gamma(\nu+2)\Gamma(\nu)}{[\Gamma(2)\Gamma(\nu+1)]^2}$$

En se basant sur la caractéristique $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$, on obtient

$$\hat{\nu}=\frac{2\mu_1^2}{\mu_2-2\mu_1^2}$$

A partir de μ_1, on peut facilement déduire

$$\hat{b}=\sqrt{\frac{4\hat{\nu}}{\pi\mu_1}}$$