20 octobre 2013

COURS DE TOPOLOGIE (L3)

Université Lille 1

2013-2014

Léa Blanc-Centi

1 ESPACES NORMÉS, ESPACES MÉTRIQUES

1.1 Rappels sur les ensembles dénombrables

1.1.1 Définition

DÉFINITION-PROPRIÉTÉ

> Un ensemble I est dit **dénombrable**
> $\Longleftrightarrow$ *i*) il existe une bijection de I sur une partie de $\mathbb{N}$;
> $\Longleftrightarrow$ *ii*) il existe une bijection de I sur une partie de la forme $\{0, \dots, q-1\}$ ou sur $\mathbb{N}$ entier ;
> $\Longleftrightarrow$ *iii*) il existe une suite croissante de parties finies $J_k \subset I$ telle que $I = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} J_k$.
>
> Autrement dit, on peut numéroter les éléments de I.

DÉMONSTRATION:

- *i*) équivaut à *ii*) car toute partie K finie de cardinal q (resp. infinie) de $\mathbb{N}$ est en bijection avec l'ensemble $\{0, \dots, q-1\}$ (resp. avec $\mathbb{N}$ entier).
- *ii*) $\Longrightarrow$ *iii*) : comme *iii*) est inchangée par bijection, il suffit de traiter les cas
  - $I = \{0, \dots, q-1\}$: alors $J_k = I$ pour tout k convient ;
  - $I = \mathbb{N}$: alors $J_k = \{0, \dots, k\}$ convient.
- *iii*) $\Longrightarrow$ *ii*) : on numérote progressivement les éléments de I. Notons $J_0 = \{a_0, \dots, a_{q_0-1}\}$, $J_1 = \{a_0, \dots, a_{q_0-1}, a_{q_0}, \dots, a_{q_1-1}\}$ (puisque $J_0 \subset J_1$), etc. Il y a deux cas.
  - Ou bien la suite J_k est stationnaire : il existe un indice k_0 tel que $\forall k \geq k_0,\ J_k = J_{k_0}$; dans ce cas $I = J_{k_0}$ est fini.
  - Ou bien le processus est infini : dans ce cas l'application $n \mapsto a_n$ est bien définie de $\mathbb{N}$ dans I, est injective par construction, et surjective (car tout élément de I est dans l'un des J_k).

□

1.1.2 Exemples

Toute partie finie, toute partie de $\mathbb{N}$, tout ensemble en bijection avec un ensemble dénombrable sont dénombrables. $\mathbb{Z} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{l \in \mathbb{Z} \mid -k \leq l \leq k\}$ est dénombrable.

PROPOSITION 1.1

> $\mathbb{Q}$ *et* $\mathbb{Q}[X]$ *sont dénombrables.*

DÉMONSTRATION:

On utilise le *iii*) de la définition. Pour $\mathbb{Q}$, on pose

$$J_k = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid |a| \leq k+1,\ 0 < |b| \leq k+1 \right\}$$

et pour $\mathbb{Q}[X]$, on pose J'_k l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{Q}[X]$ de degré au plus k dont tous les coefficients sont dans J_k. □

PROPOSITION 1.2

> *Un produit* fini *de dénombrables, une réunion dénombrable de dénombrables, une partie d'un dénombrable, l'image (surjective) d'un dénombrable sont également dénombrables.*

DÉMONSTRATION:

• il suffit de montrer que le produit de deux ensembles dénombrables est dénombrable : si $I = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} J_k$ et $I' = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} J'_k$ (où les J_k et J'_k sont finis, et les suites croissantes pour l'inclusion), alors $I \times I' = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (J_k \times J'_k)$. Les parties $J_k \times J'_k$ sont finies et la suite est croissante pour l'inclusion.

• si L est une partie dénombrable et pour tout $l \in L$, I_l est dénombrable : on peut écrire $I_l = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} J_{l,k}$ (où les $J_{l,k}$ sont finis, et la suite est croissante pour l'inclusion). Comme L est dénombrable on peut supposer que c'est une partie de $\mathbb{N}$. Alors $\bigcup_{l\in L} I_l = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} J'_p$ où $J'_p = \bigcup_{k\in\mathbb{N},\ l\in L,\ k+l\leq p} J_{l,k}$. On vérifie que les J'_k forment bien une suite croissante de parties finies.

• si $I = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} J_k$ est dénombrable, et $I' \subset I$, alors $I' = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (I' \cap J_k)$; si f est une fonction définie sur I, alors $f(I) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} f(J_k)$ où les $f(J_k)$ forment bien une suite croissante de parties finies : donc $f(I)$ est dénombrable. □

1.2 Espaces vectoriels normés

1.2.1 Définitions

DÉFINITION

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle **norme** sur E une application notée $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant :

1. $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ (homogénéité) ;
2. $\forall x, y \in E,\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire) ;
3. $\|x\| = 0 \iff x = 0$.

Si seulement les propriétés 1.) et 2.) sont vérifiées, mais pas 3.), on parle de **semi-norme**.
Un $\mathbb{K}$**-espace vectoriel normé** est un couple $(E, \|\cdot\|)$ où $\|\cdot\|$ est une norme sur E.

On peut écrire l'inégalité triangulaire de façon équivalente sous la forme suivante, appelée **seconde inégalité triangulaire** :

$$\forall x, y \in E,\ |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

DÉFINITION

Une **algèbre normée unitaire** est un quadruplet $(E, +, \times, \|\cdot\|)$ où :

1. $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé ;
2. $(E, +, \times)$ est une algèbre ;
3. $\forall x, y \in E,\ \|x \times y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Exemple : l'ensemble des fonctions bornées de I dans $\mathbb{K}$, muni de N_∞ où $N_\infty(f) = \operatorname{Sup}_{x\in I} |f(x)|$.

1.2.2 Normes provenant d'un produit scalaire

Rappelons qu'un **produit scalaire** est une application $\langle\cdot|\cdot\rangle : E \times E \to \mathbb{K}$, qui est

– linéaire par rapport à la seconde variable ;

– *symétrique* si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle$
  hermitienne si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $\langle x|y\rangle = \overline{\langle y|x\rangle}$ (donc $\langle \lambda x|y\rangle = \overline{\lambda}\langle x|y\rangle$) ;

– définie positive : $\forall x \neq 0,\ \langle x|x\rangle > 0$.
Exemple : sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, $\langle x|y\rangle = \sum_1^n \overline{x_k} y_k$.

THÉORÈME 1.1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\langle\cdot|\cdot\rangle$ un produit scalaire sur E. On a :

- *l'inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$\forall x, y \in E,\ |\langle x|y\rangle| \leq \sqrt{\langle x|x\rangle}\,\sqrt{\langle y|y\rangle}$$

avec égalité ssi les vecteurs x et y sont colinéaires.

- *l'inégalité de Minkowski : en posant $\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$,*

$$\forall x, y \in E,\ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

avec égalité ssi x et y sont colinéaires de même sens *(i.e. le coefficient de proportionnalité est dans $\mathbb{R}^+$).*

En particulier, $\|\cdot\|$ est une norme sur E, et on a

$$\forall x, y \in E,\ |\langle x|y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|.$$

ATTENTION : deux vecteurs $x, y \in E$ sont colinéaires ssi ou bien $\exists \lambda \in \mathbb{K} \mid y = \lambda x$, ou bien $x = 0$.

DÉMONSTRATION:

• Commençons par montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On se donne $x, y \in E$. Si $x = 0$ ou $y = 0$ on a bien sûr l'inégalité voulue. On suppose donc $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\langle x|e^{i\theta}y\rangle \in \mathbb{R}.$$

Par exemple, puisque $\langle x|e^{i\theta}y\rangle = e^{i\theta}\langle x|y\rangle$, on peut prendre $\theta = -\mathrm{Arg}\langle x|y\rangle$ si $\langle x|y\rangle \in \mathbb{C}^*$, et $\theta = 0$ si $\langle x|y\rangle = 0$. En particulier, puisque $e^{i\theta}\langle x|y\rangle \in \mathbb{R}$:

$$|\langle x|y\rangle|^2 = |e^{i\theta}\langle x|y\rangle|^2 = (e^{i\theta}\langle x|y\rangle)^2.$$

Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $f(t) = \langle x + te^{i\theta}y | x + te^{i\theta}y\rangle$. Le produit scalaire étant défini positif, on a $f(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. De plus :

$$\begin{aligned}
f(t) &= \langle x|x\rangle + \langle x|te^{i\theta}y\rangle + \langle te^{i\theta}y|x\rangle + \langle te^{i\theta}y|te^{i\theta}y\rangle \quad \text{[bilinéaire]}\\
&= \langle x|x\rangle + \langle x|te^{i\theta}y\rangle + \overline{\langle x|te^{i\theta}y\rangle} + \overline{te^{i\theta}}\langle y|te^{i\theta}y\rangle \quad \text{[hermitienne]}\\
&= \langle x|x\rangle + 2\Re e\left(\langle x|te^{i\theta}y\rangle\right) + \overline{te^{i\theta}}\,te^{i\theta}\langle y|y\rangle\\
&= \langle x|x\rangle + 2\Re e\left(te^{i\theta}\langle x|y\rangle\right) + t^2\langle y|y\rangle\\
&= \langle x|x\rangle + 2te^{i\theta}\langle x|y\rangle + t^2\langle y|y\rangle
\end{aligned}$$

car $e^{i\theta}\langle x|y\rangle \in \mathbb{R}$. De plus, comme on a supposé $y \neq 0$, le coefficient de t^2 est non nul, donc f est une fonction polynomiale de degré 2 en t, qui reste de signe constant : son discriminant Δ est négatif ou nul, et il est nul ssi le polynôme a une racine (double). Donc

$$0 \geq 4\left(e^{i\theta}\langle x|y\rangle\right)^2 - 4\langle x|x\rangle\langle y|y\rangle = 4(|\langle x|y\rangle|^2 - \langle x|x\rangle\langle y|y\rangle)$$

c'est-à-dire l'inégalité de Cauchy-Schwarz. De plus il y a égalité ssi il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(t_0) = 0$. Par définition de f et d'après les propriétés du produit scalaire, cela signifie que $x + t_0e^{i\theta}y = 0$. Donc il y a égalité ssi il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ ($\lambda = -t_0e^{i\theta}$) tel que $x = \lambda y$.

• Pour l'inégalité de Minkowski :

$$\langle x+y|x+y\rangle = \langle x|x\rangle + \langle x|y\rangle + \langle y|x\rangle + \langle y|y\rangle = \|x\|^2 + 2\Re e\langle x|y\rangle + \|y\|^2.$$

Or $\Re e\langle x|y\rangle \leq |\langle x|y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, donc

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2,$$

avec égalité ssi il y a égalité à chaque étape c'est-à-dire, égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz et $\Re e\langle x|y\rangle = |\langle x|y\rangle|$.
Or il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz ssi x et y sont colinéaires, *i.e.* ssi ou bien $\exists \lambda \in \mathbb{C} /\ x = \lambda y$ ou bien $y = 0$. Comme $\Re e\langle \lambda y|y\rangle = \Re e(\lambda \|y\|^2) = \Re e(\lambda)\|y\|^2$ et $|\langle \lambda y|y\rangle| = |\lambda|\,\|y\|^2$, on obtient comme condition

- ou bien $y = 0$,
- ou bien $x = \lambda y$ et $\Re e(\lambda) = |\lambda|$ *i.e.* $\lambda \in \mathbb{R}^+$,

ce qu'on peut résumer par x et y colinéaires de même signe. □

1.2.3 Exemples fondamentaux

On note $\ell^1(\mathbb{K}) = \{(u_k) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum |u_k| \text{ converge}\}$, $\ell^2(\mathbb{K}) = \{(u_k) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum |u_k|^2 \text{ converge}\}$ et $\ell^\infty(\mathbb{K})$ l'ensemble des suites bornées.

version	espace	N_1	N_2	N_∞
finie	$\mathbb{K}^n$ $x = (x_1, \ldots, x_n)$	$\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|$	$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2}$	$\underset{1\leq k\leq n}{\text{Max}} \|x_k\|$
discrète	espace des suites $(u_k) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que le terme suivant ait un sens	$\sum_{k=0}^{+\infty} \|u_k\|$	$\sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} \|u_k\|^2}$	$\underset{k\in\mathbb{N}}{\text{Sup}} \|u_k\|$
continue	$\mathcal{C}^0([a;b], \mathbb{K})$	$\int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$	$\sqrt{\int_a^b \|f(t)\|^2\,\mathrm{d}t}$	$\underset{x\in[a;b]}{\text{Max}} \|f(x)\|$

Justifications :
- pour N_∞ sur $\mathcal{C}^0([a;b], \mathbb{K})$: une fonction continue sur un segment est bornée (et atteint ses bornes) ;
- pour N_2 : dans chacun des cas, c'est une norme provenant d'un produit scalaire :
  - $\langle x|y\rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{x_k}\, y_k$ sur $\mathbb{K}^n$;
  - $\langle (u_k)|(v_k)\rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} \overline{u_k}\, v_k$ sur $\ell^2(\mathbb{K})$;
  - $\langle f|g\rangle = \int_a^b \overline{f(t)}\, g(t)\,\mathrm{d}t$ sur $\mathcal{C}^0([a;b], \mathbb{K})$.

1.2.4 Comparaison de normes

PROPOSITION 1.3

Soit N et N' deux normes sur le même $\mathbb{K}$-espace vectoriel E :

$$\exists k > 0 \mid \forall x \in E,\ N'(x) \leq kN(x)$$
$$\Updownarrow$$

toute suite (u_n) qui converge vers 0 dans (E, N) (i.e. $N(u_n) \to 0$) converge vers 0 dans (E, N') (i.e. $N'(u_n) \to 0$)

DÉMONSTRATION:

- ($\Rightarrow$) si $\exists k > 0 \mid \forall x \in E,\ N'(x) \leq kN(x)$: pour toute suite $(u_n)_n$ d'éléments de E telle que $N(u_n) \to 0$, on a alors $0 \leq N'(u_n) \leq kN(u_n)$ et donc $N'(u_n) \to 0$.

• ($\Leftarrow$) par l'absurde, supposons qu'il n'existe pas de $k > 0$ tel que $\forall x \in E,\ N'(x) \leq kN(x)$:

cela signifie que pour tout $k > 0$, en particulier pour tout $k = n \in \mathbb{N}^*$, il existe un $x \in E$ qu'on notera x_n tel que $N'(x_n) > nN(x_n)$. En particulier $N'(x_n) > 0$ et

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{N'(x_n)} N(x_n) = N\left(\frac{1}{N'(x_n)}\, x_n\right).$$

En posant $y_n = \frac{1}{N'(x_n)}\, x_n$, on a $0 \leq N(y_n) < \frac{1}{n}$: donc $N(y_n) \to 0$ mais $N'(y_n) = 1$, contradiction. $\square$

DÉFINITION

Deux normes N et N' sur le même $\mathbb{K}$-espace vectoriel E sont dites **équivalentes**
$\Longleftrightarrow \exists k_1,\ k_2 > 0 \mid \forall x \in E,\ k_1 N(x) \leq N'(x) \leq k_2 N(x)$;
$\Longleftrightarrow$ les suites qui convergent vers 0 pour N ou N' sont les mêmes.

Exemple : sur $\mathbb{K}^n$, les normes N_1, N_2 et N_∞ sont équivalentes. Plus précisément, on a :

$$N_\infty(x) \leq N_2(x) \leq \sqrt{n} N_\infty(x) \quad \text{et} \quad N_\infty(x) \leq N_1(x) \leq n N_\infty(x).$$

1.3 Espaces métriques

1.3.1 Définition

Pour définir une norme on avait besoin d'une structure d'espace vectoriel sur E ; pour une distance ce n'est pas nécessaire.

DÉFINITION

Soit E un *ensemble*. Une **distance** sur E est une application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant pour tous $x, y, z \in E$:

1. $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (*symétrie*) ;
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (*inégalité triangulaire*).

Un **espace métrique** est un couple (E, d) où E est un ensemble et d une distance sur E.

Si $A \subset E$, alors d induit une distance sur A (la distance entre $x, y \in A$ est $d(x, y)$), appelée **distance induite**.

PROPOSITION 1.4

Si d est une distance sur E :

$$\forall x, y, z \in E,\ |d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

DÉMONSTRATION:

L'inégalité de droite est l'inégalité triangulaire. On l'applique de nouveau pour obtenir l'inégalité de gauche :

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \text{ et donc } d(x, z) - d(y, z) \leq d(x, y).$$

De même, en échangeant les variables x et y, on obtient $d(y, z) - d(x, z) \leq d(x, y)$, d'où la majoration $|d(y, z) - d(x, z)| \leq d(x, y)$. $\square$

Exemples :
- sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: $d(x, y) = |x - y|$. Plus généralement :

PROPOSITION 1.5

Sur un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, $d(x, y) = \|x - y\|$ définit une distance.

- sur $\mathbb{Z}$: $d(x,y) = |x-y|$, c'est la distance induite sur $\mathbb{Z}$ par $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ($d(x,y) < 1 \iff x = y$).
- sur E quelconque : $d(x,y) = 1$ si $x \neq y$, $d(x,x) = 0$ définit bien une distance, appelée **distance discrète**.

PROPOSITION 1.6

Si $(E_1, d_1), \ldots, (E_s, d_s)$ sont des espaces métriques, on munit le produit $E_1 \times \ldots \times E_s$ d'une distance de la façon suivante :

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_s),\ y = (y_1, \ldots, y_s),\ d_{\max}(x,y) = \underset{1 \leq i \leq s}{\operatorname{Max}} d_i(x_i, y_i)$$

Sur $(\mathbb{R}, |\cdot|) \times \ldots \times (\mathbb{R}, |\cdot|)$, on obtient : $\forall x, y \in \mathbb{R}^s,\ d_{\max}(x,y) = \underset{1 \leq i \leq s}{\operatorname{Max}} |x_i - y_i| = N_\infty(x-y)$.

DÉMONSTRATION:

Vérifions que $d_{\max}$ est une distance sur $E = E_1 \times \ldots \times E_s$:

- $d_{\max}(x,y) = 0 \iff \forall i,\ d_i(x_i, y_i) = 0 \iff \forall i,\ x_i = y_i \iff x = y$.
- $d_{\max}(x,y) = d_{\max}(y,x)$ par symétrie des d_i.
- si $z \in E$: $d_{\max}(x,y) = \underset{1 \leq i \leq s}{\operatorname{Max}} d_i(x_i, y_i) \leq \underset{1 \leq i \leq s}{\operatorname{Max}} [d_i(x_i, z_i) + d_i(z_i, y_i)]$ d'après l'inégalité

triangulaire pour les d_i. Or pour tout i, $d_i(x_i, z_i) \leq d_{\max}(x,z)$ et $d_i(z_i, y_i) \leq d_{\max}(z,y)$, donc $d_i(x_i, z_i) + d_i(z_i, y_i) \leq d_{\max}(x,z) + d_{\max}(z,y)$, d'où l'inégalité voulue. □

1.3.2 Boules

DÉFINITION

Soit (E,d) un espace métrique, $x \in E$ et $r > 0$. On définit :
– la **boule ouverte** de centre x et de rayon r : $B(x,r) = \{y \in E \mid d(x,y) < r\}$;
– la **boule fermée** de centre x et de rayon r : $BF(x,r) = \{y \in E \mid d(x,y) \leq r\}$;
– la **sphère** de centre x et de rayon r : $S(x,r) = \{y \in E \mid d(x,y) = r\}$.

On a les inclusions

$$\text{pour } 0 < r < r' :\ B(x,r) \subset BF(x,r) \subset B(x,r')$$

mais attention, ces inclusions ne sont pas toujours strictes. Ainsi, dans $(\mathbb{Z}, |\cdot|)$,

$$B(0, \frac{1}{3}) = BF(0, \frac{1}{3}) = B(0, \frac{1}{2}) = \{0\}.$$

Exemples :

- dans $\mathbb{R}^2$, la boule unité est un disque si l'on choisit la distance induite par la norme euclidienne N_2, et un carré $]-1;1[\times]-1;1[$ si l'on choisit la distance induite par la norme N_∞.
- si $(E_1, d_1), \ldots, (E_n, d_n)$ sont des espaces métriques et $E = E_1 \times \ldots \times E_n$ est muni de la distance $d_{\max}$,

$$\begin{aligned}
B_E(x,r) &= \{y \in E \mid d_{\max}(x,y) < r\} \\
&= \{y = (y_1, \ldots, y_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n \mid \max_j (d_j(x_j, y_j)) < r\} \\
&= \{y = (y_1, \ldots, y_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n \mid \forall j = 1, \ldots, n,\ d_j(x_j, y_j) < r\} \\
&= \{y = (y_1, \ldots, y_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n \mid \forall j = 1, \ldots, n,\ y_j \in B_{E_j}(x_j, r)\} \\
&= B_{E_1}(x_1, r) \times \ldots \times B_{E_n}(x_n, r)
\end{aligned}$$

et bien sûr ce n'est plus forcément vrai si l'on munit E d'une autre distance.
- dans $E = \mathcal{C}^0([a;b], \mathbb{R})$, on prend la distance induite par N_∞ :

$$d(f,g) = N_\infty(f-g) = \underset{t \in [a;b]}{\operatorname{Max}} |f(t) - g(t)|$$

et la boule ouverte de centre f et de rayon r est l'ensemble des fonctions g continues de $[a;b]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall t \in [a;b],\ g(t) \in]f(t)-r; f(t)+r[$) (*i.e.* dont le graphe est situé dans un "tube" de hauteur $2r$ centré autour du graphe de f).

DÉFINITION

Deux distances d et d' sur le même espace E sont **topologiquement équivalentes** si pour tout $x \in E$, toute boule (ouverte) pour d *centrée en* x contient une boule (ouverte) pour d' *centrée en* x, et réciproquement.

PROPOSITION 1.7

- *l'équivalence topologique est une relation d'équivalence ;*
- *si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et N, N' sont deux normes équivalentes sur E, alors les distances induites sont topologiquement équivalentes.*

DÉMONSTRATION:

Une relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence si elle est
- réflexive ($d\mathcal{R}d$),
- symétrique ($d\mathcal{R}d' \Longrightarrow d'\mathcal{R}d$)
- transitive ($d\mathcal{R}d'$ et $d'\mathcal{R}d'' \Longrightarrow d\mathcal{R}d''$),

et ces propriétés sont ici toutes vérifiées.

Si d est la distance induite par la norme N, et d' la distance induite par la norme N' : par définition $d(x,y) = N(x-y)$ et $d'(x,y) = N'(x-y)$. Or les normes N et N' sont équivalentes : $\exists k_-, k_+ > 0 \mid \forall x \in E,\ k_- N(x) \leq N'(x) \leq k_+ N(x)$. En particulier,

$$\forall x, y \in E,\ k_- d(x,y) \leq d'(x,y) \leq k_+ d(x,y).$$

Ainsi, si $r > 0$ et $y \in B_{d'}(x, rk_-)$ i.e. $d'(x,y) < rk_-$, alors $d(x,y) < r$ et donc $y \in B_d(x,r)$. Autrement dit, $B_{d'}(x, rk_-) \subset B_d(x,r)$. De même, en échangeant les rôles des deux distances, on montre que toute boule pour d' centrée en x contient une boule pour d centrée en x. $\square$

DÉFINITION

On dit qu'une partie A d'un espace métrique (E,d) est **bornée** s'il existe une boule fermée $BF(x_0, r)$ contenant A, *i.e.* :

$$\exists x_0 \in E,\ \exists r > 0 \mid \forall x \in A,\ d(x_0, x) \leq r$$

Une **fonction** $f : I \to E$ **est bornée** si $f(I)$ est une partie bornée de E.

Le caractère borné ne dépend pas du choix de x_0, car si $\exists r > 0 \mid A \subset B(x_0, r)$, alors $\forall x_1 \in E$,

$$\forall x \in A,\ d(x_1, x) \leq d(x_1, x_0) + d(x_0, x) \leq d(x_1, x_0) + r$$

et donc $A \subset B(x_1, r_1)$ où $r_1 = d(x_1, x_0) + r$.

1.3.3 Distance entre deux parties, diamètre

DÉFINITION

Soit (E,d) un espace métrique et A, B deux parties non vides de E. On définit :
– la **distance entre** A **et** B : $d(A,B) = \inf\{d(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$;
– le **diamètre de** A : $\mathrm{diam}(A) = \mathrm{Sup}\{d(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in A\}$.

On a toujours $d(A,A) = 0$, $d(A,E) = 0$.

Exemples :

- dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $A = \{0\}$, $B = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$: $d(A,B) = 0$ (mais $A \neq B$!), $\mathrm{diam}(A) = 0$, $\mathrm{diam}(B) = 1$.
- dans $(\mathbb{R}^2, N_2)$, $A = B(0,2)$, $B = \{(3,0)\}$: $d(A,B) = 1$, $\mathrm{diam}(A) = 4$, $\mathrm{diam}(B) = 0$.

2 VOCABULAIRE DES ESPACES TOPOLOGIQUES

But : dégager, à partir de l'étude des espaces métriques, les structures permettant de parler de limite et de continuité. L'exemple fondamental est $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^n$) : la théorie générale englobe bien sûr cet exemple, mais conduit parfois à des situations moins intuitives.

2.1 Espaces topologiques

2.1.1 Définition, ouverts

DÉFINITION

Soit X un ensemble. Une **topologie sur** X est la donnée d'une famille $\mathcal{O}$ de parties de X, appelées **ouverts**, vérifiant :

1. $\emptyset$ et X sont des ouverts ;
2. toute réunion d'ouverts est un ouvert ;
3. une intersection *finie* d'ouverts est un ouvert.

Autrement dit, $\mathcal{O}$ est stable par union quelconque, intersection finie, et contient $\emptyset$ et X. On dit alors que X muni de cette topologie est un **espace topologique**.

REMARQUE : pour vérifier que $\mathcal{O}$ est stable par intersection finie, il suffit de vérifier que si $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$, alors $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$.

Exemples immédiats, sur tout ensemble X :
- $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$: **topologie grossière** ;
- $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X : **topologie discrète**.

Exemple fondamental : sur $\mathbb{R}$, on définit une topologie par

$$O \in \mathcal{O} \Longleftrightarrow \forall x \in O,\ \exists r_x > 0 \mid]x - r_x; x + r_x[\subset O,$$

appelée **topologie usuelle de** $\mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION:

- $\emptyset \in \mathcal{O}$, et $\mathbb{R} \in \mathcal{O}$ (par exemple, si $x \in \mathbb{R}$, alors $]x-1; x+1[\subset \mathbb{R}$) ;
- $\mathcal{O}$ est stable par réunion quelconque : si les O_α sont des ouverts de $\mathbb{R}$, et si $x \in \bigcup_\alpha O_\alpha$, alors il existe α_0 tel que $x \in O_{\alpha_0}$. Comme O_{α_0} est un ouvert de $\mathbb{R}$, il existe $r > 0$ tel que $]x - r; x + r[\subset O_{\alpha_0}$ et donc $]x - r; x + r[\subset \bigcup_\alpha O_\alpha$;
- $\mathcal{O}$ est stable par intersection finie : soit O_1, O_2 des ouverts et $x \in O_1 \cap O_2$. Par définition, pour $i = 1, 2$, il existe $r_i > 0$ tel que $]x - r_i; x + r_i[\subset O_i$. En posant $r = \min(r_1, r_2)$, on a bien $r > 0$ et $]x - r; x + r[\subset O_1 \cap O_2$. Donc $O_1 \cap O_2$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. $\square$

En particulier, on vérifie qu'un "intervalle ouvert" (qui est de la forme $]a; b[$, $]-\infty; b[$, $]a; +\infty[$ ou $]-\infty; +\infty[$) est effectivement un ouvert de $\mathbb{R}$!

D'autre part, si O est un ouvert de $\mathbb{R}$, on a donc $\left(\bigcup_{x \in O}]x - r_x; x + r_x[\right) \subset O$, et l'autre inclusion est aussi vraie car si $y \in O$, alors $y \in]y - r_y; y + r_y[\subset \bigcup_{x \in O}]x - r_x; x + r_x[$. Donc tout ouvert O de $\mathbb{R}$ s'écrit comme une réunion d'intervalles ouverts : $O = \bigcup_{x \in O}]x - r_x; x + r_x[$.

2.1.2 Topologie des espaces métriques

PROPOSITION 2.1 *Soit (E, d) un espace métrique. La famille*

$$\mathcal{O} = \{O \subset E \mid \forall x \in O,\ \exists r_x > 0,\ B(x, r_x) \subset O\}$$

définit une topologie sur E. Pour cette topologie, les "boules ouvertes" sont des ouverts.

DÉMONSTRATION:

• $\emptyset \in \mathcal{O}$, et $E \in \mathcal{O}$ (par exemple, pour $x \in E$, $B(x,1) := \{y \in E \mid d(x,y) < 1\} \subset E$) ;

• $\mathcal{O}$ est stable par réunion quelconque : si les O_α sont des ouverts de E, et si $x \in \bigcup_\alpha O_\alpha$, alors il existe α_0 tel que $x \in O_{\alpha_0}$. Comme O_{α_0} est un ouvert de E, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset O_{\alpha_0}$ et donc $B(x,r) \subset \bigcup_\alpha O_\alpha$;

• $\mathcal{O}$ est stable par intersection finie : soit O_1, O_2 des ouverts et $x \in O_1 \cap O_2$. Par définition des ouverts, pour $i = 1,2$, il existe $r_i > 0$ tel que $B(x,r_i) \subset O_i$. En posant $r = \min(r_1,r_2)$, on a bien $r > 0$ et $B(x,r) \subset B(x,r_i) \subset O_i$, donc $B(x,r) \subset O_1 \cap O_2$. Ainsi $O_1 \cap O_2$ est un ouvert de E.

• Vérifions que toute boule ouverte est un ouvert : soit $x_0 \in E$ et $\rho > 0$, et $x \in B(x_0,\rho)$. Posons $r_x = \rho - d(x_0,x)$: alors $r_x > 0$ puisque $x \in B(x_0,\rho)$, et $B(x,r_x) \subset B(x_0,\rho)$ (en effet, si $y \in B(x,r_x)$, on a $d(x_0,y) \leq d(x_0,x) + d(x,y) < d(x_0,x) + \rho - d(x_0,x) = \rho$ i.e. $y \in B(x_0,\rho)$). □

Ainsi une distance sur E induit une topologie sur E. Quand on parlera d'un espace métrique (E,d), il sera toujours implicitement muni de cette topologie. Idem pour $(E,\|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé : la topologie est celle induite par la distance $d(x,y) = \|x-y\|$.

ATTENTION : une distance induit une topologie. Mais deux distances différentes peuvent induire la même topologie : par exemple, si d est une distance, alors $d'(x,y) = 2d(x,y)$ définit encore une distance, qui induit la même topologie que d (car toute boule pour d est une boule pour d' et réciproquement, donc les ouverts sont les mêmes).

2.1.3 Fermés

DÉFINITION

Dans un espace topologique X, on dit que $F \subset X$ est **fermé** si et seulement si son complémentaire est un ouvert.

On a donc les propriétés suivantes, par passage au complémentaire :

1. $\emptyset$ et X sont des fermés ;
2. toute intersection de fermés est un fermé ;
3. une union *finie* de fermés est un fermé.

REMARQUE : $\emptyset$ et X sont à la fois ouverts et fermés.

Dans $\mathbb{R}$:

– les "intervalles fermés" $[a;b]$ (où $-\infty < a < b < +\infty$) sont des fermés : en effet, ${}^c[a;b] =]-\infty;a[\cup]b;+\infty[$ est une union d'intervalles ouverts donc un ouvert.
– les intervalles $[a;+\infty[$ et $]-\infty;b]$ (où $a,b \in \mathbb{R}$) sont des fermés : en effet, ${}^c[a;+\infty[=]-\infty;a[$ et ${}^c]-\infty;b] =]b;+\infty[$ sont des ouverts.
– $[0;1[$ n'est ni ouvert ni fermé.
– $\mathbb{Z}$ est fermé car ${}^c\mathbb{Z} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]k;k+1[$ est une réunion d'intervalles ouverts, donc un ouvert.

PROPOSITION 2.2 *Soit (E,d) un espace métrique. Toute "boule fermée" $BF(x,r)$ est un fermé, toute sphère est un fermé.*

DÉMONSTRATION:

Il suffit de montrer que toute boule fermée est un fermé : en effet, on aura alors $S(x,r) = \{y \in E \mid d(x,y) = r\} = BF(x,r) \cup {}^cB(x,r)$ qui sera l'intersection de deux fermés (puisque la boule ouverte $B(x,r)$ est un ouvert).

On va donc montrer que $\Omega := {}^cBF(x,r) = \{y \in E \mid d(x,y) > r\}$ est un ouvert. Si Ω est vide, c'est vrai. Sinon, soit $y \in \Omega$: alors $d(x,y) - r > 0$ et $B(y, d(x,y)-r) \subset \Omega$ (en effet, si $z \in B(y,d(x,y)-r)$ i.e. $d(y,z) < d(x,y) - r$, alors $d(z,x) \geq d(x,y) - d(y,z) > r$ i.e. $z \notin BF(x,r)$). Donc Ω est bien un ouvert de E. □

REMARQUE : pour $E = \{0\}\cup[1;+\infty[$ muni de la topologie donnée par $|\cdot|$, on a $BF(0,\frac{1}{2}) = B(0,1)$ qui est donc à la fois un ouvert et un fermé.

2.1.4 Voisinages

DÉFINITION

Soit X un espace topologique et $x \in X$: une partie $V \subset X$ est un **voisinage de** x s'il existe un ouvert O tel que $x \in O \subset V$. On note $\mathcal{V}_X(x)$ l'ensemble des voisinages de x dans X :

$$\text{“}V \in \mathcal{V}_X(x)\text{” signifie “}V \text{ est un voisinage de } x \text{ dans } X\text{”.}$$

En particulier :
- X est un voisinage de x ;
- un voisinage de x contient x ;
- si $V \in \mathcal{V}(x)$ et $V \subset W$, alors $W \in \mathcal{V}(x)$;
- une union quelconque (resp. une intersection finie) de voisinages de x est encore un voisinage de x.

PROPOSITION 2.3 *Une partie O est un ouvert*
$\iff$ *i) O est un voisinage de chacun de ses points : $\forall x \in O,\ O \in \mathcal{V}(x)$;*
$\iff$ *ii)* $\left[\begin{smallmatrix}\textbf{Espace}\\ \textbf{métrique}\end{smallmatrix}\right]$ *$\forall x \in O,\ \exists r > 0 \mid B(x,r) \subset O$.*

DÉMONSTRATION:

• *i)* Soit O un ouvert : si $x \in O$, alors O contient un ouvert (lui-même) contenant x donc O est un voisinage de x. Réciproquement, si O est un voisinage de chacun de ses points : pour tout $x \in O$, il existe un ouvert O_x tel que $x \in O_x \subset O$. Alors $\cup_{x \in O} O_x \subset O$ et il y a égalité, donc O est une réunion d'ouverts donc un ouvert.

• *ii)* est vrai, par définition de la topologie d'un espace métrique. □

REMARQUE : on a vu que tout ouvert O de $\mathbb{R}$ s'écrit comme une réunion d'intervalles ouverts : $O = \bigcup_{x \in O}]x - r_x ; x + r_x[$. Comme les intervalles ouverts sont des ouverts de $\mathbb{R}$ et qu'une réunion d'ouverts est un ouvert, on a ainsi montré que les ouverts de $\mathbb{R}$ sont exactement les réunions d'intervalles ouverts. De même, on montre que dans un espace métrique, tout ouvert O s'écrit sous la forme

$$O = \bigcup_{x \in O} B(x, r_x).$$

Comme les boules ouvertes sont des ouverts de E et qu'une réunion d'ouverts est un ouvert, on a ainsi montré que les ouverts de E sont exactement les *réunions* de boules ouvertes.

Exercice : dans l'espace $E = \mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$ muni de la norme N_∞, montrer que

$$A = \{f \in E \mid \forall t \in [0;1],\ f(t) > 0\}$$

est un ouvert.

2.1.5 Base d'ouverts

On vient de voir que, dans un espace métrique, les boules ouvertes sont des ouverts particuliers, des sortes de “briques élémentaires” permettant de reconstruire tous les ouverts (et donc la topologie).

DÉFINITION-PROPRIÉTÉ

Soit X un espace topologique. On dit qu'une famille $\mathcal{B}$ d'ouverts est une **base d'ouverts de** X
$\iff$ tout ouvert non vide est une réunion d'éléments de $\mathcal{B}$;
$\iff$ pour tout ouvert O et tout $x \in O$, il existe $B = B_x \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B_x \subset O$.

DÉMONSTRATION:

($\Longrightarrow$) Soit O un ouvert : s'il est réunion d'éléments de $\mathcal{B}$, il s'écrit $O = \cup_{\alpha \in A} B_\alpha$ (où les $B_\alpha \in \mathcal{B}$. Donc pour tout $x \in O$, $\exists \alpha \mid x \in\ B_\alpha \subset O$.
($\Longleftarrow$) Soit O un ouvert non vide, tel que $\forall x \in O$, $\exists B_x \in \mathcal{B} \mid x \in B_x \subset O$. Alors $O = \cup_{x \in O} B_x$ est réunion d'éléments de $\mathcal{B}$. □

2.1.6 Topologie induite

Si (E, d) est un espace métrique et $A \subset E$, alors d induit une distance sur A (définie par $d(x, y)$ pour tous $x, y \in A$). Ainsi A devient un espace métrique, dans lequel

$$\forall a \in A,\ \forall r > 0,\ B_A(a, r) = \{x \in A \mid d(a, x) < r\} = A \cap B_E(a, r).$$

Par exemple, si $E = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ et $A = \mathbb{Z}$: $B_{\mathbb{Z}}(0, 2) = \{-1; 0; 1\} = \mathbb{Z} \cap B_{\mathbb{R}}(0, 2)$. On généralise cette observation au cas des espaces topologiques :

DÉFINITION-PROPRIÉTÉ

Soit X un espace topologique et $A \subset X$. On définit la **topologie induite sur A par X** de la façon suivante :

$$O \text{ est un ouvert de } A \iff \text{il existe } O' \text{ ouvert de } X \text{ tel que } O = A \cap O'.$$

Cela définit bien une topologie sur A, pour laquelle :
- $F \subset A$ est un fermé de $A \iff$ il existe F' fermé de X tel que $F = A \cap F'$;
- si $a \in A$: V est un voisinage de a dans A ssi il existe un voisinage V' de a dans X tel que $V = A \cap V'$.

D'après la remarque précédente, si A est une partie de l'espace métrique (E, d), la topologie induite par E sur A est celle donnée par la distance induite.

DÉMONSTRATION:

• Vérifions que c'est bien une topologie : notons $\mathcal{O}_A$ (resp. $\mathcal{O}_X$) l'ensemble des ouverts de A (resp. de X). Alors $\emptyset = A \cap \emptyset$ et $A = A \cap X$ sont dans $\mathcal{O}_A$ puisque $\emptyset$ et X sont dans $\mathcal{O}_X$.

De plus, si $(O_\alpha)_\alpha$ est une famille d'ouverts de A : pour tout α, il existe O'_α ouvert de X tel que $O_\alpha = A \cap O'_\alpha$ et donc $\cup_\alpha O_\alpha = \cup_\alpha (A \cap O'_\alpha) = A \cap (\cup_\alpha O'_\alpha)$, où $\cup_\alpha O'_\alpha$ est une réunion d'ouverts de X donc un ouvert de X. Ainsi $\cup_\alpha O_\alpha$ est un ouvert de A.

Enfin, si O_1 et O_2 sont deux ouverts de A : il existe O'_1, O'_2 ouverts de X tels que $O_i = A \cap O'_i$ $(i = 1, 2)$, et $O'_1 \cap O'_2 = (A \cap O'_1) \cap (A \cap O'_2) = A \cap (O'_1 \cap O'_2)$ où $O_1 \cap O_2$ est un ouvert de X. Ainsi $\mathcal{O}_A$ est stable par intersection finie.

• Soit F une partie de A : c'est un fermé de A ssi son complémentaire *dans* A est un ouvert de A, *i.e.* ssi $A \setminus F \in \mathcal{O}_A$ c'est-à-dire $\exists O' \in \mathcal{O}_X \mid A \setminus F = A \cap O'$. Ce qu'on peut réécrire : il existe F' (le complémentaire de O' dans X) tel que $F = A \cap F'$, autrement dit F est l'intersection de A avec un fermé de X.

• V est un voisinage de a dans A ssi il existe $O \in \mathcal{O}_A$ tel que $a \in O \subset V$, ssi il existe $O' \in \mathcal{O}_X$ tel que $a \in (A \cap O') \subset V$, ce que l'on peut réécrire : il existe V' $(= O' \cup V)$, qui est donc un voisinage de a dans X, tel que $V = V' \cap A$. □

Exemple : dans $\mathbb{R}$, avec $A =]0; 2]$, la partie $F =]0; 1]$ est un fermé de A (car $]0; 1] = A \cap F'$ est l'intersection de A et d'un fermé F' de $\mathbb{R}$, où l'on peut choisir par exemple $F' = [0; 1]$ ou $F' =]-\infty; 1]$).

2.1.7 Particularités des espaces métriques

Dans la suite, on va s'intéresser principalement aux espaces métriques. D'une part, la distance rend les choses plus explicites (boules,...) mais surtout, parmi tous les espaces topologiques, les espaces métriques bénéficient de propriétés particulièrement intéressantes. En effet, un espace métrique (E, d) est :
- "**localement à base dénombrable**" :
  pour tout $x \in E$, il existe une famille dénombrable $\mathcal{B}_x = \{B_1, B_2, \ldots, B_k, \ldots\}$ de voisinages de x tels que $\forall V \in \mathcal{V}(x),\ \exists k \mid x \in B_k \subset V$
  (dans (E, d), il suffit de prendre $B_k = B(x, \frac{1}{k})$ pour $k \in \mathbb{N}^*$).
- "**séparé**" :
  pour tous $x \neq y \in E$, il existe des ouverts disjoints U et V tels que $x \in U$ et $y \in V$
  (dans (E, d), $x \neq y \implies d(x, y) > 0$ et $U = B(x, r)$, $V = B(y, r)$ conviennent dès que $0 < r \leq \frac{d(x,y)}{2}$).

REMARQUE : si X est un espace topologique non séparé, alors la topologie de X ne peut pas provenir d'une distance (on dit que X est "**non métrisable**").

2.2 Adhérence, intérieur, frontière

2.2.1 Convergence de suites

On dit qu'une suite (x_n) converge vers l si les termes de la suite se trouvent aussi proches de l qu'on veut (*i.e.*, dans un voisinage "aussi petit qu'on veut") à partir d'un rang assez grand. Ce qui se traduit par :

DÉFINITION

Soit $(x_n)_n$ une suite dans un espace topologique X. On dit que $(x_n)_n$ **converge vers** $l \in X$ (noté $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$) ssi :

$$\forall V \in \mathcal{V}(l),\ \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N,\ x_n \in V$$

ATTENTION : dans un espace topologique quelconque, il n'y a *pas toujours unicité de la limite.* Par exemple, sur $X = \mathcal{C}_{\mathrm{pm}}([0;1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[0;1]$, N_1 n'est plus une norme mais seulement une semi-norme, ce qui permet encore de définir une topologie à partir des boules. En posant $f_n : t \mapsto \frac{t}{n}$, on obtient une suite $(f_n)_n$ d'éléments de X. On a alors $N_1(f_n) \to 0$ et $N_1(f_n - 1\!\!1_{1/2}) \to 0$: en effet, N_1 ne distingue pas $1\!\!1_{1/2}$ de la fonction nulle !

PROPOSITION 2.4 *Soit (E,d) un* **espace métrique**, *et $(x_n)_n$ une suite d'éléments de E : alors*

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{dans } E} l \quad\Longleftrightarrow\quad d(x_n,l) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{dans } \mathbb{R}} 0\,.$$

En particulier, la limite (si elle existe) est unique : si $x_n \to l \in E$ et $x_n \to l' \in E$, alors $l = l'$.

DÉMONSTRATION:

Par définition,

$$\begin{aligned} x_n \to l &\iff \forall V \in \mathcal{V}(l),\ \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N,\ x_n \in V \\ &\iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N,\ x_n \in B(l,\varepsilon) \\ &\iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N,\ d(l,x_n) < \varepsilon \end{aligned}$$

(en utilisant que $B(l,\varepsilon) \in \mathcal{V}(l)$, et que tout voisinage de l contient une telle boule).

En particulier, on obtient qu'une suite de réels $(t_n)_n$ converge vers $t \in \mathbb{R}$ ssi $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N,\ |t_n - t| < \varepsilon$: on retrouve bien la définition usuelle. Donc :

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{convergence dans } (E,d)} l \quad\Longleftrightarrow\quad d(x_n,l) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{convergence dans } (\mathbb{R},|\cdot|)} 0\,.$$

Si $x_n \to l$ et $x_n \to l'$, alors $0 \leq d(l,l') \leq d(l,x_n) + d(x_n,l') \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, d'où $d(l,l') = 0$ et donc $l = l'$ d'après les propriétés des distances. □

COROLLAIRE 2.1 *Soit $(E_1,d_1),\ldots,(E_s,d_s)$ des espaces métriques, et $E = E_1 \times \ldots \times E_s$ muni de la distance $d_{\max}$: $d_{\max}((x_1,\ldots,x_s),(y_1,\ldots,y_s)) = \max_{1\leq j\leq s} d_j(x_j,y_j)$.*

Alors une suite dans E converge vers $l = (l_1,\ldots,l_s) \in E$ ssi pour tout $j = 1,\ldots,s$, sa composante numéro j converge vers l_j.

Exemple : $\begin{pmatrix} \lambda_1 + \frac{1}{n} & \frac{\alpha}{n} \\ 0 & \lambda_2 + \frac{1}{n} \end{pmatrix} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{C}), N_\infty)$. C'est encore vrai dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ muni de toute norme équivalente à N_∞, puisque la convergence des suites est la même pour deux normes équivalentes.

2.2.2 Adhérence

DÉFINITION

Soit X un espace topologique, et $A \subset X$. On dit que $x \in X$ est un **point adhérent à** A ssi tout voisinage de x dans X rencontre A : $\forall V \in \mathcal{V}(x),\ V \cap A \neq \emptyset$.

REMARQUES :

- tout point de A est adhérent à A (car si $a \in A$, $\forall V \in \mathcal{V}(a),\ V \cap A \ni a$).
- si $(a_n)_n$ est une suite d'éléments de A avec $a_n \to x$, alors x est adhérent à A (car par définition de la convergence, $\forall V \in \mathcal{V}(x),\ \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N,\ a_n \in V$: en particulier $a_N \in V \cap A$).

Exemples :

- 1 est un point adhérent à $[0;1[$ dans $\mathbb{R}$;
- la matrice nulle est un point adhérent à $GL_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni de N_∞ (ou de n'importe quelle norme équivalente) :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{k} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{k} \end{pmatrix} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

- dans ℓ^∞ muni de N_∞, l'élément $u = (\frac{1}{n+1})_n \in \ell^\infty$ est un point adhérent à l'ensemble $A \subset \ell^\infty$ des suites stationnaires.

DÉFINITION-PROPRIÉTÉ

Soit (E,d) un espace métrique et $A \subset E$: on définit $\overline{A}$ comme l'intersection de tous les fermés contenant A.
- c'est un fermé, le plus petit contenant A.
- $x \in \overline{A} \iff x$ est adhérent à A

$\qquad \underset{\text{[esp. métr.]}}{\overset{\Longleftarrow}{\Longrightarrow}}$ x est limite d'une suite d'éléments de A
- A est fermé $\iff A = \overline{A}$

On appelle $\overline{A}$ l'**adhérence de** A **dans** (E,d) (aussi notée $\mathrm{adh}_E(A)$).

DÉMONSTRATION:

• $\overline{A}$ est fermé comme intersection (quelconque) de fermés, $A \subset \overline{A}$, et tout fermé contenant A contient $\overline{A}$ par construction.

• $x \notin \overline{A} \iff$ il existe un fermé F contenant A tel que $x \notin F$

$\iff$ il existe un ouvert O $(= {}^cF)$ tel que $O \cap A = \emptyset$ et $x \in O$

$\iff$ il existe V voisinage de x tel que $V \cap A = \emptyset$

• On a vu que si x est limite d'une suite d'éléments de A, il est adhérent à A donc dans $\overline{A}$.
La réciproque est fausse en général, mais vraie dans le cas métrique : si x est adhérent à A, alors tout voisinage de x rencontre A. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut donc trouver $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$; alors, on a bien $(x_n)_n$ suite d'éléments de A et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ d(x,x_n) < \frac{1}{n}$ donc $d(x,x_n) \to 0$, i.e. $x_n \to x$.

• Si $A = \overline{A}$, il est fermé. Réciproquement, si A est fermé, c'est le plus petit fermé contenant A, donc $\overline{A} = A$. □

COROLLAIRE 2.2 *Soit* (E,d) *un* **espace métrique** *:*

$$F \text{ est fermé dans } (E,d) \ \underset{\text{[esp. métr.]}}{\overset{\Longrightarrow}{\Longleftarrow}}\ \text{toute limite de suite d'éléments de } F \text{ est dans } F.$$

DÉMONSTRATION:

F est fermé$\iff F = \overline{F} \iff \overline{F} \subset F \iff$ tout point adhérent à F est dans F, c'est-à-dire (on est dans un espace métrique) toute limite de suite d'éléments de F est dans F. □

ATTENTION : si l'on n'est pas dans un espace métrique, on ne peut pas utiliser cette caractérisation séquentielle des fermés. Par exemple, on munit $\mathbb{R}$ de la topologie dont les ouverts sont $\emptyset$ et les complémentaires des ensembles (finis ou) dénombrables : on vérifie que cela définit bien une topologie, et on montre que, *pour cette topologie*, les suites convergentes sont exactement les suites stationnaires. En particulier, si la caractérisation séquentielle des fermés s'appliquait, toute partie serait fermée, ce qui est faux...

REMARQUE : on en tire une méthode pour montrer que F est fermé dans (E, d). Pour tout $l \in E$, il s'agit de montrer que *si* il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de F qui converge vers l, *alors* nécessairement $l \in F$.

COROLLAIRE 2.3 *Soit $(E_1, d_1), \ldots, (E_s, d_s)$ des espaces métriques, on suppose que pour tout j, F_j est un fermé de (E_j, d_j). Alors $F = F_1 \times \ldots \times F_s$ est un fermé de $E = E_1 \times \ldots \times E_s$ muni de la distance $d_{\max}$.*

DÉMONSTRATION:

Il s'agit de montrer qu'un produit (fini) de fermés est un fermé dans l'espace produit. Pour cela, il suffit de traiter le cas $s = 2$: $E = E_1 \times E_2$ et $F = F_1 \times F_2$. Puisque $(E, d_{\max})$ est un espace métrique, on peut utiliser la caractérisation séquentielle des fermés.
Soit donc $l \in E$ la limite d'une suite d'éléments de F : notons $\left(x^{(n)}\right)_n$ cette suite, on a

$$\begin{cases} l = (l_1, l_2) \text{ avec } l_1 \in E_1 \text{ et } l_2 \in E_2 \\ \forall n,\ x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) \text{ avec } x_1^{(n)} \in E_1 \text{ et } x_2^{(n)} \in E_2 \end{cases}$$

et dire que $x^{(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{(E, d_{\max})} l$ signifie que

$$x_1^{(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{(E_1, d_1)} l_1 \text{ et } x_2^{(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{(E_2, d_2)} l$$

Ainsi, pour $j = 1, 2$, l_j est la limite dans (E_j, d_j) de la suite $\left(x_j^{(n)}\right)_n$ d'éléments de F_j. Or par hypothèse, F_j est un fermé de (E_j, d_j), donc $l_j \in F_j$ et $l = (l_1, l_2) \in F_1 \times F_2$. $\square$

COROLLAIRE 2.4 *Un produit fini d'ouverts d'espaces métriques est un ouvert dans l'espace produit.*

DÉMONSTRATION:

ATTENTION : le complémentaire d'un produit n'est pas le produit des complémentaires !
Soit $O = O_1 \times O_2$ où O_j est un ouvert de (E_j, d_j), alors

$$\begin{aligned} {}^cO &= \{x = (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \mid (x_1, x_2) \notin O_1 \times O_2\} \\ &= \{x = (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \mid x_1 \notin O_1 \text{ ou } x_2 \notin O_2\} \\ &= \{x = (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \mid x_1 \in {}^cO_1 \text{ ou } x_2 \in {}^cO_2\} \\ &= \{x = (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \mid (x_1 \in {}^cO_1 \text{ et } x_2 \in E_2) \text{ ou } (x_1 \in E_1 \text{ et } x_2 \in {}^cO_2)\} \\ &= ({}^cO_1 \times E_2) \cup (E_1 \times {}^cO_2) \end{aligned}$$

Or ${}^cO_1$ est un fermé de (E_1, d_1) et donc $({}^cO_1 \times E_2)$ est un produit de fermés donc un fermé dans $(E, d_{\max})$; de même $(E_1 \times {}^cO_2)$ est un fermé dans $(E, d_{\max})$. Ainsi ${}^cO$ est un fermé, donc O est un ouvert, dans $(E, d_{\max})$. $\square$

2.2.3 Intérieur

DÉFINITION-PROPRIÉTÉ

Soit (E,d) un espace métrique et $A \subset E$: on définit $\overset{\circ}{A}$ comme la réunion de tous les ouverts inclus dans A.
- c'est un ouvert, le plus grand inclus dans A.
- $x \in \overset{\circ}{A} \iff A$ est un voisinage de x
  $\iff \begin{bmatrix}\textbf{Espace}\\ \textbf{métrique}\end{bmatrix} \exists r > 0 \mid B(x,r) \subset A$
- A est ouvert $\iff A = \overset{\circ}{A}$

On appelle $\overset{\circ}{A}$ l'**intérieur de** A **dans** (E,d) (aussi notée $\mathrm{int}_E(A)$).

DÉMONSTRATION:

- $\overset{\circ}{A}$ est une réunion d'ouverts donc un ouvert, et $\overset{\circ}{A} \subset A$. Par construction, si O est un ouvert inclus dans A, alors $O \subset \overset{\circ}{A}$.
- si $x \in \overset{\circ}{A}$, alors $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert contenant x et $x \in \overset{\circ}{A} \subset A$, donc A est un voisinage de x. Réciproquement, si $A \in \mathcal{V}(x)$, alors il existe un ouvert O tel que $x \in O \subset A$: donc $O \subset \overset{\circ}{A}$ et donc $x \in \overset{\circ}{A}$.
- si $A = \overset{\circ}{A}$, alors A est ouvert. Réciproquement, si A est ouvert, c'est le plus grand ouvert inclus dans A donc $A = \overset{\circ}{A}$. □

PROPOSITION 2.5

$$\overline{E \setminus A} = E \setminus \overset{\circ}{A} \qquad \overset{\circ}{\overbrace{E \setminus A}} = E \setminus \overline{A}$$

$$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B} \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \qquad \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}} \supset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$$

ATTENTION : les inclusions sont strictes en général (comparer $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$ pour $E = \mathbb{R}$, $A =]0;1[$, $B =]1;2[$).

REMARQUE : on a aussi $\overline{\overset{\circ}{A}} \subset \overline{A}$ et $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{\overline{A}}$, et là aussi les inclusions peuvent être strictes.

2.2.4 Frontière

DÉFINITION-PROPRIÉTÉ

Soit (E,d) un espace métrique et $A \subset E$: on définit $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ (ce qui a un sens car $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A}$).
- c'est un fermé.
- $x \in \partial A \iff$ tout voisinage de x rencontre à la fois A et son complémentaire.

On appelle ∂A la **frontière de** A **dans** (E,d) (aussi notée $\mathrm{fr}_E(A)$).

DÉMONSTRATION:

$\partial A = \overline{A} \cap {}^c(\overset{\circ}{A})$ est l'intersection de deux fermés, donc est fermé. On a également $\partial A = \overline{A} \cap \overline{{}^cA}$ qui est donc l'ensemble des points qui sont à la fois adhérents à A et à ${}^cA$. □

Exemples :

– dans E : E est à la fois ouvert et fermé dans lui-même, donc $\overset{\circ}{E} = E = \overline{E}$ et $\partial E = \emptyset$.
– dans $E = \mathbb{R}^2$, pour A un disque ouvert : $\overset{\circ}{A} = A$, $\overline{A}$ est le disque fermé, et ∂A est le cercle.

ATTENTION : les notions d'adhérence, d'intérieur, de frontière dépendent de l'espace dans lequel on se place. Ainsi, on ne "voit" pas l'intervalle $[a;b[$ de la même façon selon qu'on est dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{R}^2$:
– dans $E = \mathbb{R}$, pour $A = [a;b[$: $\mathrm{int}_{\mathbb{R}}(A) =]a;b[$, $\mathrm{adh}_{\mathbb{R}}(A) = [a;b]$, $\mathrm{fr}_{\mathbb{R}}(A) = \{a;b\}$;
– dans $E = \mathbb{R}^2$, pour $A = [a;b[$: $\mathrm{int}_{\mathbb{R}^2}(A) = \emptyset$, $\mathrm{adh}_{\mathbb{R}^2}(A) = [a;b]$, $\mathrm{fr}_{\mathbb{R}^2}(A) = [a;b]$.

2.2.5 Densité

a) Définition

DÉFINITION-PROPRIÉTÉ

Soit (E, d) un espace métrique, et $A \subset B$ des parties de E. On dit que A **est dense dans** B
$\iff$ tout élément de B est un point adhérent à A ;
$\iff \forall b \in B,\ \forall V \in \mathcal{V}(b),\ V \cap A \neq \emptyset$
$\iff B \subset \overline{A}$
$\iff \left[\begin{smallmatrix}\textbf{Espace}\\ \textbf{métrique}\end{smallmatrix}\right]$ tout élément de B est limite d'une suite d'éléments de A

DÉMONSTRATION:

Les équivalences proviennent de la définition de point adhérent et de la caractérisation des éléments de $\overline{A}$. □

b) Exemples dans $\mathbb{R}$

Exemples fondamentaux : $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

PROPOSITION 2.6 *Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$: ou bien $\exists a \in \mathbb{R} \mid H = a\mathbb{Z}$, ou bien H est dense dans $\mathbb{R}$.*

DÉMONSTRATION:

• Premier cas : si $\text{Inf}(H \cap \mathbb{R}^{+*}) = a > 0$, on va montrer que $H = a\mathbb{Z}$.
Montrons que $a \in H$, *ie* que $H \cap \mathbb{R}^{+*}$ a un plus petit élément. Par l'absurde, supposons $a \notin H$. Puisque $a = \text{Inf}(H \cap \mathbb{R}^{+*})$, on a

$$\begin{cases} \forall x \in H \cap \mathbb{R}^{+*},\ a < x \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in H \cap \mathbb{R}^{+*} /\ a < x < a + \varepsilon \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{l} \text{avec } \varepsilon = a > 0 :\ \exists x \in H \cap \mathbb{R}^{+*} /\ a < x < 2a \\ \text{avec } \varepsilon = x - a > 0 :\ \exists y \in H \cap \mathbb{R}^{+*} /\ a < y < x \end{array}$$

Or x et y sont deux éléments du groupe H, donc $x - y \in H$, et $x > y$ donc $(x - y) \in H \cap \mathbb{R}^{+*}$; or $x - y < 2a - a = a$, ce qui contredit la définition de a. Donc $a \in H$, et le groupe $a\mathbb{Z}$ engendré par a est inclus dans H.

Montrons que $H \subset a\mathbb{Z}$: soit $x \in H$, la division euclidienne de x par a donne $x = pa + y$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq y < a$. De plus $y = 0$ car sinon, $y = x - pa \in H \cap \mathbb{R}^{+*}$ et $y < a$, ce qui est impossible par définition de a. Donc $y = 0$: $x = pa \in a\mathbb{Z}$.

Finalement $H = a\mathbb{Z}$.

• Deuxième cas : si $\text{Inf}(H \cap \mathbb{R}^{+*}) = 0$, on va montrer que H est dense dans $\mathbb{R}$.
Il s'agit de montrer que si $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x < y$, alors il existe $z \in H$ tel que $x < z < y$. Puisque $\text{Inf}(H \cap \mathbb{R}^{+*}) = 0$:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists h \in H \cap \mathbb{R}^{+*} /\ h < \varepsilon$$

Avec $\varepsilon = y - x$, on obtient $h \in H \cap \mathbb{R}^{+*}$ tel que $h < y - x$. On note n la partie entière de x/h : $n \in \mathbb{Z}$ vérifie $n \leq x/h < n + 1$. Alors

$$nh \leq x < (n+1)h = nh + h \leq x + h < x + (y - x) = y$$

donc $x < (n+1)h < y$. De plus $z = (n+1)h \in H$ puisque $h \in H$ et H est un groupe. □

COROLLAIRE 2.5 *Soit H un sous-groupe* fermé *de $(\mathbb{R}, +)$: si $H \neq \mathbb{R}$, alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $H = a\mathbb{Z}$.*

c) Exemple matriciel

PROPOSITION 2.7 *L'ensemble $GL_n(\mathbb{K})$ des matrices inversibles est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni de N_∞ (ou de n'importe quelle norme équivalente).*

Rappelons qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible ssi $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid AB = BA = I_n$, ce qui équivaut à $\det A \neq 0$.

DÉMONSTRATION:

Il s'agit de montrer que toute matrice est limite (pour N_∞, c'est-à-dire coefficient par coefficient) d'une suite de matrices inversibles. Soit donc $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, posons $A_k = A + \frac{1}{k} I_n$ pour $k \in \mathbb{N}^*$: alors $A_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} A$. Il reste à vérifier que les matrices A_k sont inversibles, *i.e.* que $\det(A_k) \neq 0$, au moins pour k assez grand.

Posons $P(t) = \det(A + tI_n)$: par définition du déterminant, c'est une fonction polynomiale (de degré n) en t. Ainsi P ne s'annule qu'en un nombre fini de racines $z_1, \ldots, z_n$ (complexes, et pas nécessairement distinctes). Posons $r := \min\{|z_i| \mid z_i \text{ racine non nulle de } P\}$: alors $r > 0$ et par construction, $P(t) \neq 0$ pour tout $t \in]0; r[$. Or pour k assez grand ($k > \frac{1}{r}$), on a $\frac{1}{k} \in]0; r[$ et donc $\det(A_k) = P(1/k) \neq 0$. On a donc bien construit une suite (A_k) de matrices inversibles qui converge vers A. □

2.2.6 Points isolés

DÉFINITION

Soit X un espace topologique, et $A \subset X$:
- a est un **point isolé de** A ssi $\exists V \in \mathcal{V}(a),\ V \cap A = \{a\}$;
- A est une **partie dicrète de** X ssi tous ses éléments sont isolés.

REMARQUES :
- a est isolé dans A ssi $a \notin \overline{A \setminus \{a\}}$;
- x est un point isolé de X ssi $\{x\}$ est un voisinage de x, ssi $\{x\}$ est un ouvert ;
- X est discret ssi $\forall x \in X$, $\{x\}$ est ouvert, ssi toute partie de X est ouverte (et fermée).

Exemples :
- $a\mathbb{Z}$ est discret dans $\mathbb{R}$; donc, *tout sous-groupe de* $(\mathbb{R}, +)$ *est soit discret, soit dense dans* $\mathbb{R}$;
- $\mathbb{Q}$ n'est *pas* discret dans $\mathbb{R}$;
- $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ est discret dans $\mathbb{R}$, mais pas $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

ATTENTION : toutes les définitions et propriétés concernant l'adhérence,... restent valables pour un espace topologique, SAUF les caractérisations séquentielles.

2.2.7 Valeurs d'adhérence d'une suite

DÉFINITION

Une **suite extraite** ou **sous-suite** d'une suite $(x_n)_n$ est une suite du type $(x_{\varphi(n)})_n$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.

Si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante, alors on montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \geq n$, en particulier $\varphi(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

DÉFINITION-PROPRIÉTÉ

Soit (E, d) un espace métrique, (x_n) une suite d'éléments de E. On dit que $b \in E$ est une **valeur d'adhérence de** (x_n)

$\iff$ *i)* tout voisinage de b contient une infinité de termes de la suite ;

$\iff$ *ii)* $\forall V \in \mathcal{V}(b)$, $\{n \mid x_n \in V\}$ est infini ;

$\iff$ *iii)* $b \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{x_k \mid k \geq n\}}$;

$\overset{\Longleftarrow}{\underset{\text{[esp. métr.]}}{\Longrightarrow}}$ *iv)* il existe une sous-suite de (x_n) qui converge vers b.

DÉMONSTRATION:

• $i)$ et $ii)$ sont bien sûr équivalents.
• $i)$ b est une valeur d'adhérence de (x_n)

$\iff$ $\forall V \in \mathcal{V}(b),\ V \cap \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est infini
$\iff$ $\forall V \in \mathcal{V}(b),\ \forall n,\ V$ rencontre $\{x_k \mid k \geq n\}$
$\iff$ $\forall n,\ \forall V \in \mathcal{V}(b),\ V \cap \{x_k \mid k \geq n\} \neq \emptyset$
$\iff$ $\forall n,\ b \in \overline{\{x_k \mid k \geq n\}}$
$\iff$ $iii)$

• $iv) \Longrightarrow i)$: supposons qu'il existe une sous-suite $x_{\varphi(n)} \to b$. Soit V un voisinage de b, alors

$$\exists N \mid \forall n \geq N,\ x_{\varphi(n)} \in V,$$

a fortiori $\{n \mid x_n \in V\}$ contient $\{\varphi(N), \varphi(N+1), \ldots\}$ qui contient une infinité de termes (distincts puisque φ est strictement croissante). D'où $i)$.
• $i) \Longrightarrow iv)$: *faux en général, mais vrai dans le cas métrique.* Dans ce cas, si b est une valeur d'adhérence de la suite (x_n), on construit la sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ par récurrence de telle sorte que $\forall n,\ d(b, x_{\varphi(n)}) < 1/n$. Pour cela,

– posons $\varphi(0) = 0$.
– supposons qu'on a construit $\varphi(0) < \ldots < \varphi(k)$ avec $\forall j \leq k,\ d(b, x_{\varphi(j)}) < 1/j$: comme on sait que l'ensemble $\{n \mid x_n \in B(b, \frac{1}{k+1})\}$ est infini, en particulier il contient un élément (qu'on notera $\varphi(k+1)$) qui est strictement plus grand que $\varphi(k)$. On a donc bien $\varphi(k+1) > \varphi(k)$ et $d(b, x_{\varphi(k+1)}) < \frac{1}{k+1}$.

On a ainsi construit une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ de (x_n), et pour tout n on a $d(b, x_{\varphi(n)}) < 1/n$ donc $x_{\varphi(n)} \to b$. □

Exemples :

- la suite $u_n = (-1)^n$ a deux valeurs d'adhérence, -1 et 1 ;
- la suite $u_n = n^2$ n'a pas de valeur d'adhérence dans $\mathbb{R}$;
- si $u_n \to l$, alors toute sous-suite de (u_n) converge vers l et donc la suite a une unique valeur d'adhérence, l ;
- si (u_n) est à valeurs dans $[-1; 1]$ et dense dans cet intervalle (par exemple : $u_n = \cos(n\sqrt{2})$), alors ses valeurs d'adhérence sont exactement les points de $[-1; 1]$.

3 CONTINUITE

Lorsqu'on travaille sur un espace muni d'une structure spéciale, les applications qui préservent cette structure sont toujours particulièrement intéressantes (par exemple, dans le cadre des espaces vectoriels, on étudie les applications linéaires *i.e.* qui sont compatibles avec les lois des espaces vectoriels). Dans le cadre des espaces topologiques, on étudie les applications qui sont compatibles avec la notion de voisinage :

$$x \text{ suffisamment proche de } x_0 \Longrightarrow f(x) \text{ proche de } f(x_0),$$

c'est la notion de continuité en x_0.

3.1 Fonctions continues

3.1.1 Définitions

DÉFINITION-PROPRIÉTÉ

Soit $f : X \to Y$ une application entre espaces topologiques. On dit que f est **continue en $x_0 \in X$**
$\Longleftrightarrow$ l'image réciproque par f de tout voisinage de $f(x_0)$ est un voisinage de x_0
$\Longleftrightarrow \forall W \in \mathcal{V}(f(x_0)),\ \exists V \in \mathcal{V}(x_0) \mid f(V) \subset W$
$\Longleftrightarrow \left[\begin{smallmatrix}\textbf{Espace}\\ \textbf{métrique}\end{smallmatrix}\right] \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \mid (d(x_0, x) < \eta \implies d(f(x_0), f(x)) < \varepsilon)$
On dit que f est **continue sur $A \subset X$** si elle est continue en tout point de A.

REMARQUE : pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on retrouve la définition connue

$$\begin{array}{lll} f \text{ est continue en } x_0 & \Longleftrightarrow & \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \mid (|x - x_0| < \eta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon) \\ & \Longleftrightarrow & \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \mid (|h| < \eta \implies |f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon) \end{array}$$

DÉMONSTRATION:

• Soit $W \in \mathcal{V}_Y(f(x_0))$: si $f^{-1}(W) \in \mathcal{V}_X(x_0)$, alors $V = f^{-1}(W)$ convient. Réciproquement, si $\exists V \in \mathcal{V}_X(x_0) \mid f(V) \subset W$: alors $V \subset f^{-1}(W)$ et donc $f^{-1}(W) \in \mathcal{V}_X(x_0)$.

• Traduction dans le cas d'un espace métrique :

($\Longrightarrow$) Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $V \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $f(V) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$ puisque $B(f(x_0), \varepsilon)$ est un voisinage de $f(x_0)$. Comme V est un voisinage de x_0, il existe $\eta > 0$ tel que $B(x_0, \eta) \subset V$, et donc $f(B(x_0, \eta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$. Autrement dit, si $x \in B(x_0, \eta)$, alors $f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$.

($\Longleftarrow$) Soit $W \in \mathcal{V}(f(x_0))$: alors $\exists \varepsilon > 0$ tel que $B(f(x_0), \varepsilon) \subset W$. Pour cet ε, il existe donc $\eta > 0 \mid (x \in B(x_0, \eta) \Longrightarrow f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon))$. Autrement dit, $f(B(x_0, \eta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon) \subset W$ et $V = B(x_0, \eta)$ convient. □

3.1.2 Caractérisation de la continuité globale

PROPOSITION 3.1

Soit $A \subset X$. L'application $f : A \to Y$ est continue sur A entier
$\Longleftrightarrow \forall O$ *ouvert de Y, $f^{-1}(O)$ est un ouvert de A*
$\Longleftrightarrow \forall F$ *fermé de Y, $f^{-1}(F)$ est un fermé de A*

Rappelons que les ouverts (resp. fermés) de A sont les intersections d'ouverts (resp. de fermés) de X avec A.

DÉMONSTRATION:

Remarquons que les propositions "pour tout fermé F de Y, $f^{-1}(F)$ est un fermé de A" et "pour tout ouvert O de Y, $f^{-1}(O)$ est un ouvert de A" sont équivalentes : en prenant $O = Y \setminus F$, on a $A \setminus f^{-1}(O) = \{x \in A \mid f(x) \notin O\} = \{x \in A \mid f(x) \in F\} = f^{-1}(F)$. On va montrer la propriété concernant les ouverts.

Si f est continue sur A : soit O un ouvert de Y, alors O est un voisinage de tous ses points. Si $f^{-1}(O) = \emptyset$, c'est bien un ouvert de A. Sinon, soit $x \in f^{-1}(O)$: $f(x) \in O$ donc $O \in \mathcal{V}_Y(f(x))$ et puisque par hypothèse f est continue, $f^{-1}(O) \in \mathcal{V}_A(x)$. Ainsi $f^{-1}(O)$ est un voisinage de tous ses points, c'est-à-dire un ouvert de A.

Réciproquement, si la préimage de tout ouvert est un ouvert de A : soit $x_0 \in A$ et $W \in \mathcal{V}(f(x_0))$, alors il existe O ouvert de Y tel que $f(x_0) \in O \subset W$ et donc $x_0 \in f^{-1}(O) \subset f^{-1}(W)$. Comme $f^{-1}(O)$ est un ouvert de A, $f^{-1}(W) \in \mathcal{V}_A(x_0)$. □

COROLLAIRE 3.1 *La composée de deux applications continues (définies sur les bons espaces) est continue.*

DÉMONSTRATION:

On utilise que $(f \circ g)^{-1}(O) = g^{-1}(f^{-1}(O))$ avec la caractérisation précédente de la continuité globale. □

3.1.3 Exemples

a) Injection canonique

PROPOSITION 3.2

Soit X un espace topologique et $A \subset X$: l'application $\iota : A \ni x \mapsto x \in X$ est continue sur A.

DÉMONSTRATION:

Pour tout O ouvert de X : $\iota^{-1}(O) = O \cap A$ est par définition un ouvert de A. □

REMARQUE : la topologie induite est exactement faite pour rendre ι continue, de la façon la moins "bête" possible. Comme la topologie discrète sur A (pour laquelle toute partie de A est à la fois ouverte et fermée) rendrait ι continue sur A, la topologie la moins "bête" est celle avec le moins d'ouverts possible.

COROLLAIRE 3.2 *La restriction d'une application continue est continue.*

DÉMONSTRATION:

Si $B \subset A$, et $\iota : B \hookrightarrow A$ est l'injection canonique, alors $f_{|B} = f \circ \iota$ est continue comme composée d'applications continues. □

b) Projections canoniques

PROPOSITION 3.3

Soit $(E_1, d_1), \ldots, (E_n, d_n)$ des espaces métriques, et $E = E_1 \times \ldots \times E_n$ l'espace produit muni de la distance $d_{\max}$. Alors les projections canoniques

$$\pi_j : \begin{array}{ccc} E_1 \times \ldots \times E_n & \to & E_j \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & x_j \end{array}$$

sont continues.

REMARQUE : autrement dit, l'image réciproque de tout ouvert (resp. fermé) par une projection est un ouvert (resp. fermé).

DÉMONSTRATION:

Soit O_j un ouvert de E_j : alors

$$\begin{aligned} \pi_j^{-1}(O_j) &= \{(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n \mid x_j \in O_j\} \\ &= E_1 \times \ldots \times E_{j-1} \times O_j \times E_{j+1} \times \ldots \times E_n \end{aligned}$$

est un produit fini d'ouverts donc un ouvert. □

COROLLAIRE 3.3 *Sur $\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} = (\mathbb{R}^n, N_\infty)$, les projections canoniques sont continues ; c'est encore vrai sur $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme équivalente à N_∞ (par exemple, la norme euclidienne N_2).*

REMARQUE : le changement d'une norme en une norme *équivalente* ne change pas la topologie (les ouverts restent les mêmes) donc la notion de continuité.

COROLLAIRE 3.4 *Soit A une partie de l'espace topologique X :*

$$\begin{array}{llll} f: & A & \to & E_1 \times \ldots \times E_n \\ & x & \mapsto & (f_1(x), \ldots, f_n(x)) \end{array} \quad \textit{est continue sur } A \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} \textit{ses fonctions composantes} \\ f_j : A \to E_j \ (j = 1, \ldots, n) \textit{ le sont.} \end{array}$$

DÉMONSTRATION:

Si f est continue, alors $f_j = \pi_j \circ f$ est une composée d'applications continues. Réciproquement, supposons que pour tout j, $f_j : A \to E_j$ est continue. Soit O un ouvert de $E = E_1 \times \ldots \times E_n$, il s'agit de montrer que $f^{-1}(O)$ est un ouvert de A. Si $f^{-1}(O)$ est vide, c'est vrai. Sinon, montrons que c'est un voisinage (dans A) de chacun de ses points. Soit donc $x \in f^{-1}(O)$: alors $f(x) \in O$ qui est un ouvert, donc

$$\exists r > 0 \mid f(x) \in B_E(f(x), r) \subset O$$

et par définition de $d_{\max}$, $B_E(f(x), r) = B_{E_1}(f_1(x), r) \times \ldots \times B_{E_n}(f_n(x), r)$. Posons $O_j = B_{E_j}(f_j(x), r)$: c'est bien un ouvert de (E_j, d_j) et

$$f(x) \in O_1 \times \ldots \times O_n \subset O \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \bigcap_{j=1}^{n} f_j^{-1}(O_j) \subset f^{-1}(O)$$

Par continuité de $f_j : A \to E_j$, pour tout j, $f_j^{-1}(O_j)$ est un ouvert de A. Ainsi $\bigcap_{j=1}^{n} f^{-1}(O_j)$ est une intersection finie d'ouverts donc un ouvert de A, et $f^{-1}(O)$ est donc bien un voisinage de x. □

c) Opérations élémentaires dans un espace vectoriel normé

PROPOSITION 3.4

Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, les applications

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \xrightarrow{s} & E \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array} \quad \textit{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \xrightarrow{m} & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda \cdot x \end{array}$$

sont continues.

COROLLAIRE 3.5 *Lorsqu'elles sont bien définies, la somme et le produit de deux fonctions continues sont des fonctions continues.*

DÉMONSTRATION:

• Soit $(x_0, y_0) \in E \times E$: $\|(x+y) - (x_0+y_0)\| \leq \|x - x_0\| + \|y - y_0\|$ donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ ((x,y) \in B_{E\times E}((x_0,y_0),\varepsilon/2) \implies s(x,y) \in B_E(x_0+y_0,\varepsilon))$$

ce qui prouve la continuité de s en (x_0, y_0).
• Soit $(\lambda_0, x_0) \in \mathbb{K} \times E$:

$$\begin{aligned}\|m(\lambda_0+h, x_0+k) - m(\lambda_0, x_0)\| &= \|(\lambda_0+h)\cdot(x_0+k) - \lambda_0 \cdot x_0\| \\ &\leq |h|\,\|x_0\| + |\lambda_0|\,\|k\| + |h|\,\|k\| \\ &\leq M(\|x_0\| + |\lambda_0| + M)\end{aligned}$$

si $M = \max(|h|, \|k\|) = d_{\max}((\lambda_0, x_0), (\lambda_0+h, x_0+k))$.

Supposons $M < \eta \leq 1$: alors $\|m(\lambda_0+h, x_0+k) - m(\lambda_0, x_0)\| < \eta(\|x_0\| + |\lambda_0| + 1)$. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, en choisissant $\eta = \min(1, \varepsilon/(\|x_0\| + |\lambda_0| + 1))$, on a donc

$$d_{\max}((\lambda_0, x_0), (\lambda, x)) < \eta \implies \|m(\lambda, x) - m(\lambda_0, x_0)\| < \varepsilon$$

ce qui montre que m est continue au point (λ_0, x_0). $\square$

PROPOSITION 3.5

‖ *Dans un espace préhilbertien $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$, le produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle : E \times E \to \mathbb{K}$ est continu.*

DÉMONSTRATION:

Soit $(x_0, y_0) \in E \times E$, la bilinéarité du produit scalaire donne :

$$\begin{aligned}|\langle x_0+h|y_0+k\rangle - \langle x_0|y_0\rangle| &= |\langle h|y_0\rangle + \langle x_0|k\rangle + \langle h|k\rangle| \\ &\leq |\langle h|y_0\rangle| + |\langle x_0|k\rangle| + |\langle h|k\rangle| \\ &\leq \|h\|\,\|y_0\| + \|x_0\|\,\|k\| + \|h\|\,\|k\|\end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
Donc pour $\varepsilon > 0$ fixé, en posant $\eta = \min(1, \varepsilon/(\|y_0\| + \|x_0\| + 1))$, on a

$$\max(\|x - x_0\|, \|y - y_0\|) < \eta \implies |\langle x|y\rangle - \langle x_0|y_0\rangle| < \varepsilon$$

ce qui prouve la continuité en (x_0, y_0). $\square$

PROPOSITION 3.6

‖ *L'application $x \mapsto 1/x$ est continue sur $\mathbb{K}^*$.*

DÉMONSTRATION:

Soit $x_0 \in \mathbb{K}^*$ et $x \in \mathbb{K}$ tel que $|x - x_0| < |x_0|$: alors $x \neq 0$ (puisque $|x| \geq |x_0| - |x - x_0|$) et

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \frac{|x_0 - x|}{|x_0 x|} \leq \frac{|x_0 - x|}{|x_0|(|x_0| - |x - x_0|)} \leq \frac{|x_0 - x|}{|x_0|^2/2}$$

dès que $|x - x_0| < |x_0|/2$. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, posons $\eta = \max\left(|x_0|, \frac{|x_0|}{2}, \varepsilon|x_0|^2/2\right)$:

$$|x - x_0| < \eta \implies \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon$$

$\square$

Exemples dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni de N_∞ (ou d'une norme équivalente) :

- en notant $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in E$, les applications $M \mapsto m_{i,j}$ sont continues (ce sont les projections canoniques).

- l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ M & \mapsto & \det(M) \end{array}$$

est continue car $f(M) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) m_{\sigma(1),1} \dots m_{\sigma(n),n}$ et f est donc somme de produits d'applications continues.

- l'application

$$g: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ M & \mapsto & {}^t\mathrm{com}(M) \end{array}$$

est continue car les coefficients de ${}^t\mathrm{com}(M)$ sont des déterminants extraits de M, c'est-à-dire des sommes de produits des coefficients de M.

- l'ensemble $GL_n(\mathbb{K})$ des matrices inversibles n'est pas un espace vectoriel, mais c'est une partie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; l'application

$$h: \begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & M^{-1} \end{array}$$

est continue car $h(M) = \frac{1}{\det(M)} {}^t\mathrm{com}(M)$, où $M \mapsto \frac{1}{\det(M)}$ est continue (c'est la composée $i \circ f$ où $i : \mathbb{K}^* \ni x \mapsto \frac{1}{x}$) et $M \mapsto {}^t\mathrm{com}(M)$ aussi.

3.1.4 Propriétés plus fortes que la continuité

Les notions suivantes sont *propres aux espaces métriques.*

DÉFINITION

Soit (E, d) et (F, δ) des espaces métriques, A une partie de E. Une application $f : A \to F$ est

- **uniformément continue** ssi :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\eta > 0 \mid \forall x, y \in A,\ (d(x, y) < \eta \Longrightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon)$$

- ***k*-lipschitzienne** (où $k \in \mathbb{R}^+$) ssi :

$$\forall x, y \in A,\ \delta(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$$

  et une telle constante k est alors **UN rapport de Lipschitz** de f ;
- **strictement contractante** ssi elle est k-lipschitzienne pour un $k < 1$;
- ***α*-hölderienne** (où $\alpha \in \mathbb{R}^+$) ssi :

$$\exists C > 0 \mid \forall x, y \in A,\ \delta(f(x), f(y)) \leq C\, d(x, y)^\alpha$$

PROPOSITION 3.7

Lipschitzienne $\Longrightarrow$ uniformément continue $\Longrightarrow$ continue, et les deux réciproques sont fausses.

DÉMONSTRATION:

- Si f est k-lipschitzienne : soit $\varepsilon > 0$ fixé, et $\eta = \varepsilon/k$, alors

$$d(x, y) < \eta \implies d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y) < \varepsilon$$

  donc f est uniformément continue.
- **ATTENTION :** sur $[0; 1]$, $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue mais pas lipschitzienne.

– par l'absurde, si elle n'était pas uniformément continue, il existerait $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, par exemple $\eta = 1/n$,

$$\exists x = x_n,\ y = y_n \in [0;1] \mid \left\{ \begin{array}{c} |x_n - y_n| < 1/n \\ \text{et} \\ |\sqrt{x_n} - \sqrt{y_n}| \geq \varepsilon_0 \end{array} \right.$$

En multipliant par la quantité conjuguée, on obtient alors $\frac{|x_n - y_n|}{\sqrt{x_n}+\sqrt{y_n}} \geq \varepsilon_0$ et donc $\sqrt{x_n} + \sqrt{y_n} < \frac{1}{n\varepsilon_0}$, et par conséquent $\sqrt{x_n} \to 0$ et $\sqrt{y_n} \to 0$. Cela contredit l'inégalité $\forall n,\ |\sqrt{x_n} - \sqrt{y_n}| \geq \varepsilon_0$.

REMARQUE : on verra qu'une fonction continue *sur un segment*, ou plus généralement sur un compact, est toujours uniformément continue, d'après le théorème de Heine (dans le chapitre "Compacité").

– elle n'est pas lipschitzienne : par l'absurde, sinon, il existerait $k > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [0;1],\ |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq k|x - y|$$

et donc pour $(x, y) \neq (0, 0)$, $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq k$, ce qui est absurde (avec $x, y \to 0^+$).

• Si f est uniformément continue : soit x_0 fixé, et $\varepsilon > 0$, alors

$$\exists \eta > 0 \mid \forall x, y,\ (d(x, y) < \eta \implies d(f(x), f(y)) < \varepsilon)$$

En particulier $(d(x_0, y) < \eta \implies d(f(x_0), f(y)) < \varepsilon)$, donc f est continue en x_0.

• **ATTENTION :** sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ est continue (comme produit de fonctions continues) mais pas uniformément continue. En effet, par l'absurde, si elle était uniformément continue, avec $\varepsilon = 1$ on aurait $\exists \eta > 0 \mid (|x - y| < \eta \implies |x^2 - y^2| < 1)$. En particulier, $\forall x \in \mathbb{R}$, avec $y = x + \eta/2$, on devrait avoir $|\eta^2/4 + \eta x| < 1$, ce qui est absurde (avec $x \to +\infty$). □

Exemples importants :

- sur $\mathbb{R}$, $|\cdot|$ est 1-lipschitzienne (car $||x| - |y|| \leq |x - y|$) donc continue. Plus généralement, la deuxième inégalité triangulaire montre la

PROPOSITION 3.8

Sur un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, l'application $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ est 1-lipschitzienne, donc continue.

- on a également la

PROPOSITION 3.9

Soit (E, d) un espace métrique : l'application $d : (E \times E, d_{\max}) \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne, donc continue.

DÉMONSTRATION:

Soit (x_1, x_2) et $(y_1, y_2) \in E \times E$: $d(x_1, x_2) \leq d(x_1, y_1) + d(y_1, y_2) + d(y_2, x_2)$ donc

$$d(x_1, x_2) - d(y_1, y_2) \leq d(x_1, y_1) + d(x_2, y_2)$$

et de même on obtient $d(y_1, y_2) - d(x_1, x_2) \leq d(x_1, y_1) + d(x_2, y_2)$, ainsi

$$|d(x_1, x_2) - d(y_1, y_2)| \leq d(x_1, y_1) + d(x_2, y_2) \leq 2d_{\max}((x_1, x_2), (y_1, y_2))$$

□

- sur $E_1 \times E_2$ produit d'espaces métriques, muni de $d_{\max}$, les projections canoniques sont 1-lipschitziennes donc continues.

3.1.5 Homéomorphismes

DÉFINITION

Une application $f : X \to Y$ entre espaces topologiques est un **homéomorphisme de X sur Y** ssi f est bijective de X sur Y et f et f^{-1} sont continues.

ATTENTION : "bijective et continue" n'implique pas que la réciproque est continue ! Par exemple, en notant S^1 le cercle (la sphère) unité du plan :

$$f: \begin{array}{ccc} [0;2\pi[& \to & S^1 \\ \theta & \mapsto & e^{i\theta} \end{array}$$

est continue, bijective, mais $f^{-1} : S^1 \to [0;2\pi[$ n'est pas continue en 1. En effet, si $0 < \varepsilon < 2\pi$:
- $[0;\varepsilon[=]-\varepsilon;\varepsilon[\cap [0;2\pi[$ est un voisinage de 0 dans $[0;2\pi[$;
- $\left(f^{-1}\right)^{-1}([0;\varepsilon[) = f([0;\varepsilon[)$ (car f est bijective), c'est l'arc de cercle $\{e^{i\theta} \mid 0 \leq \theta < \varepsilon\}$, qui n'est pas un voisinage de 1 dans S^1.

PROPOSITION 3.10

Soit f un homéomorphisme de X sur Y. Alors l'image et la préimage par f de tout ouvert sont des ouverts.

Dans ce cas, on dit que X et Y sont **homéomorphes** : comme f échange les ouverts de X et de Y, les deux espaces auront les mêmes propriétés topologiques.

Exemples :

- $\mathbb{R}$ est homéomorphe à $]-1;1[$ *via* $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ ou $\mathrm{th}(x)$;
- $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ et $(\mathbb{R}, \text{distance discrète})$ ne sont pas homéomorphes puisque les ouverts ne sont pas les mêmes.

3.2 Utilisation de la continuité dans les espaces métriques

3.2.1 Continuité et limite

a) Définition

DÉFINITION

Soit X et Y des espaces topologiques, $A \subset X$ et $f : A \to Y$. On dit que f a pour limite l au point $a \in \overline{A}$ ssi

$$\forall W \in \mathcal{V}_Y(l),\ \exists V \in \mathcal{V}_X(a) \mid f(V \cap A) \subset W$$

On note alors $f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \to a} l$.

Cela signifie : dès que x est suffisamment proche de a, $f(x)$ est assez proche de l. Dans le cas d'une application entre espaces métriques $f : A \to (F, d_F)$, où $A \subset (E, d_E)$, cela devient

$$\begin{aligned} f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \to a} l &\iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \mid \forall x \in A,\ (d_E(a,x) < \eta \implies d_F(l, f(x)) < \varepsilon) \\ &\iff d_F(l, f(x)) \xrightarrow[x \in A]{x \to a} 0 \end{aligned}$$

et en particulier, la limite (si elle existe) est unique.

ATTENTION : avec cette définition,

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left| \begin{array}{l} 0 \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

n'a pas de limite en 0, mais $f_{|\mathbb{R}^*}$ oui (car $f(x) \xrightarrow[\neq]{x \to 0} 0$).

PROPOSITION 3.11

Si $a \in A$, f est continue en a ssi $f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \to a} f(a)$.

b) Critères séquentiels

PROPOSITION 3.12

Soit (E, d_E) et (F, d_F) deux **espaces métriques**, *et $f : A \to F$ où A est une partie de E. Soit $a \in \overline{A}$, on suppose que, pour toute suite $a_n \to a$, la suite $(f(a_n))_n$ est convergente. Alors*
- *la limite est indépendante du choix de (a_n), notons-la l ;*
- *$f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \longrightarrow a} l$.*

DÉMONSTRATION:

• Supposons par l'absurde qu'il existe des suites $a_n \to a$ et $b_n \to a$, telles que $f(a_n) \to l$ et $f(b_n) \to l'$ avec $l \neq l'$. Alors la suite définie par $c_n = \left| \begin{array}{l} a_n \text{ si } n \text{ est pair} \\ b_n \text{ si } n \text{ est impair} \end{array} \right.$ converge vers a, mais $(f(c_n))_n$ a deux valeurs d'adhérence distinctes donc (c'est là qu'on utilise que l'espace est séparé) diverge : contradiction.

• Supposons par l'absurde que $f(x)$ ne tend pas vers l quand x tend vers a : il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, en particulier $\eta = 1/n$, il existe $x = x_n$ vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{l} d_E(x_n, a) < \frac{1}{n} \\ d_F(f(x_n), l) \geq \varepsilon_0 \end{array} \right. \quad \text{et donc} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_n \to a \\ f(x_n))_n \text{ ne converge pas vers } l \end{array} \right. ,$$

contradiction. □

COROLLAIRE 3.6 *Sous les mêmes hypothèses :*

$$f \text{ est continue en } a \in A \iff \begin{array}{l} \text{pour toute suite } (a_n)_n \text{ d'éléments de } A \text{ qui converge vers } a, \\ f(a_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(a) \end{array}$$

APPLICATION : soit (E, d) un espace métrique, $x_n \to x$, $y_n \to y$: alors $d(x_n, y_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} d(x, y)$.

3.2.2 Continuité et densité

PROPOSITION 3.13

Soit f une application entre espaces métriques. Si A est dense dans B et si f est continue sur $A \cup B$, alors $f(A)$ est dense dans $f(B)$.

REMARQUE : c'est encore vrai pour une application entre espaces topologiques.

DÉMONSTRATION:

Il s'agit de montrer que tout élément de $f(B)$ peut être approché par une suite d'éléments de $f(A)$. Soit donc $y \in f(B)$: $\exists b \in B \mid y = f(b)$. Or A est dense dans B, donc il existe une suite $(a_n)_n$ d'éléments de A qui converge vers b. Par continuité de f sur $A \cup B$, on a alors $f(a_n) \to f(b)$, autrement dit la suite $(f(a_n))_n$ d'éléments de $f(A)$ converge vers y. □

PROPOSITION 3.14

Soit (E, d_E) et (F, d_F) deux **espaces métriques**. *Deux applications f et g continues de E dans F qui coïncident sur une partie dense coïncident sur E entier.*

DÉMONSTRATION:

Il suffit de montrer que $A := \{x \in E \mid f(x) = g(x)\}$ est fermé : car alors, puisqu'il contient une partie dense, il contient l'adhérence de cette partie qui est E lui-même.
• si F est un espace vectoriel normé : alors l'application $f - g$ est bien définie, continue, et $A = (f-g)^{-1}(\{0\})$ est un fermé ;
• si E et F sont deux espaces métriques quelconques : soit $l \in E$ qui est limite d'une suite $(x_n)_n$ d'éléments de A, par continuité de f et g on obtient $f(x_n) \to f(l)$ et $g(x_n) \to g(l)$, où pour tout n, $f(x_n) = g(x_n)$. Par unicité de la limite, $f(l) = g(l)$ *i.e.* $l \in A$. □

REMARQUE : cette propriété reste vraie pour $f, g : X \to Y$ où X est un espace topologique quelconque et Y un espace topologique *séparé*. Dans ce cas, la preuve utilisant la caractérisation séquentielle des fermés n'est plus valable et l'on doit montrer directement que ${}^cA$ est ouvert.

Exercice : déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y)$$

(indication : montrer que l'égalité $f(x) = xf(1)$ est vraie pour x d'abord dans $\mathbb{N}$, puis $\mathbb{Z}$, puis $\mathbb{Q}$).

3.3 Le cas des applications linéaires entre espaces vectoriels normés

3.3.1 Applications linéaires continues

THÉORÈME 3.1

Soit E, F des espaces vectoriels normés et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors les affirmations suivantes sont équivalentes :
$\iff$ *i) u est continue sur E entier ;*
$\iff$ *ii) u est continue en au moins un point ;*
$\iff$ *iii) u est bornée sur au moins une boule ;*
$\iff$ *iv) $\exists k \geq 0 \mid \forall x \in E,\ \|u(x)\|_F \leq k\|x\|_E$;*
$\iff$ *v) u est lipschitzienne.*

En pratique, pour montrer que $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est continue, on utilise souvent le critère *iv)*.

DÉMONSTRATION:

• *v)* $\Longrightarrow$ *i)* et *i)* $\Longrightarrow$ *ii)* sont toujours vraies,
• *ii)* $\Longrightarrow$ *iii)* est toujours vraie sur des espaces vectoriel normés : en effet, la définition de la continuité en un point x_0 écrite avec $\varepsilon = 1$ donne

$$\exists \eta > 0 \mid (\|x - x_0\| < \eta \Longrightarrow \|u(x) - u(x_0)\| < 1)$$

et donc $\forall x \in B(x_0, \eta)$, $\|u(x)\| \leq \|u(x_0)\| + 1$.
• *iii)* $\Longrightarrow$ *iv)* : supposons que u est bornée par M sur $B(a,r)$ avec $r > 0$. Alors u est bornée par $M' := M + \|u(a)\|_F$ sur $B(0,r)$ car $x \in B(0,r) \iff (x+a) \in B(a,r)$, et donc par linéarité de u,

$$\|u(x)\|_F = \|u(x+a) - u(a)\|_F \leq \|u(x+a)\|_F + \|u(a)\|_F \leq M + \|u(a)\|_F$$

Soit $x \in E$: si $x \neq 0_E$, alors $y = \frac{r}{2}\frac{x}{\|x\|_E} \in B(0,r)$ (en fait $\|y\|_E = \frac{r}{2}$) donc $\|u(y)\|_F \leq M'$ et d'après la propriété d'homogénéité des normes,

$$\frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} = \frac{\|u(y)\|_F}{\|y\|_E} \leq \frac{M'}{r/2}$$

En posant $k = \frac{M'}{r/2}$, on a donc $\|u(x)\|_F \leq k\|x\|_E$. Si $x = 0_E$, alors $u(x) = 0_F$ puisque u est linéaire, donc cette inégalité est encore vérifiée.
• *iv)* $\Longrightarrow$ *v)* car $\forall x, y \in E$, $\|u(x) - u(y)\|_F = \|u(x-y)\|_F \leq k\|x-y\|_E$ puisque u est linéaire. □

ATTENTION : il existe des applications linéaires qui ne sont pas continues. Par exemple, si $E = \mathcal{C}^\infty([0;1],\mathbb{R})$ est muni de N_∞, alors $u : f \mapsto f'$ est une application linéaire de E dans E, mais elle n'est pas continue. En effet, par l'absurde, si u était continue, il existerait $k \geq 0$ tel que $\forall f \in E,\ N_\infty(f') \leq kN_\infty(f)$: avec $f(t) = t^n$, on aurait donc $n \leq k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui est impossible.

3.3.2 Cas des applications multilinéaires

PROPOSITION 3.15

Soit $E_1, \ldots, E_p$ des $\mathbb{K}$-evn, et $\Phi : (E_1 \times \ldots \times E_p, N_{max}) \to (F, \|.\|_F)$ une application p-linéaire. Alors Φ est continue si et seulement si

$$\exists k > 0/\ \forall (x_1, \ldots, x_p) \in E_1 \times \ldots \times E_p,\ \|\Phi(x_1, \ldots, x_p)\|_F \leq k\, \|x_1\|_{E_1} \ldots \|x_p\|_{E_p}$$

DÉMONSTRATION:

- ($\Rightarrow$) Si Φ est continue, elle est continue en $(0, \ldots, 0)$, en particulier :

$$\exists \eta > 0/\ \big(\max(\|x_1\|_{E_1}, \ldots, \|x_p\|_{E_p}) < \eta \implies \|\Phi(x_1, \ldots, x_p)\|_F < 1\big)$$

Donc

$$\|x_1\|_{E_1} = \ldots = \|x_p\|_{E_p} = \eta/2 \implies \frac{\|\Phi(x_1, \ldots, x_p)\|_F}{\|x_1\|_{E_1} \ldots \|x_p\|_{E_p}} < \frac{1}{(\eta/2)^p} \qquad (1)$$

Posons $k = \frac{1}{(\eta/2)^p}$. Puisque $\Phi(\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_p x_p) = \lambda_1 \ldots \lambda_p \Phi(x_1, \ldots, x_p)$, le même argument d'homogénéité que pour les applications linéaires montre que (1) est vraie pour tout $(x_1, \ldots, x_p)$ dès que les x_j sont tous non nuls. D'autre part l'inégalité voulue est immédiatement vraie si l'un des x_j est nul.

- ($\Leftarrow$) Soit $a = (a_1, \ldots, a_p) \in E_1 \times \ldots \times E_p$, montrons que l'application Φ est continue en a, c'est-à-dire que $\Phi(a_1 + h_1, \ldots, a_p + h_p) \xrightarrow[(h_1,\ldots,h_p)\to(0,\ldots,0)]{} \Phi(a_1, \ldots, a_p)$.
  - si $a_1 = 0$:
    alors $\Phi(a_1, \ldots, a_p) = \Phi(0, a_2, \ldots, a_p) = 0_F$ car Φ est multilinéaire, donc

$$\begin{aligned} \|\Phi(a_1 + h_1, \ldots, a_p + h_p) - \Phi(a_1, \ldots, a_p)\| &= \|\Phi(h_1, a_2 + h_2, \ldots, a_p + h_p)\| \\ &\leq k\ \underbrace{\|h_1\|.\|a_2 + h_2\| \ldots \|a_p + h_p\|}_{\xrightarrow[(h_1,\ldots,h_p)\to(0,\ldots,0)]{} 0} \end{aligned}$$

  - de même, si $\exists j_0/\ a_{j_0} = 0$, Φ est continue en a.
  - dans le cas général, par multilinéarité :
    $\Phi(a_1+h_1, \ldots, a_p+h_p) = \Phi(a_1, \ldots, a_p)+S$ où $S = \Phi(h_1, a_2, \ldots, a_p)+\cdots$ est une somme de $2^p - 1$ termes ayant chacun au moins un h_j isolé, donc tendant vers 0 d'après le raisonnement précédent. Ainsi $\Phi(a_1 + h_1, \ldots, a_p + h_p) \xrightarrow[(h_1,\ldots,h_p)\to(0,\ldots,0)]{} \Phi(a_1, \ldots, a_p)$.

□

Exemples :

- $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ muni d'une norme sous-multiplicative, $\Phi : (A, B) \mapsto AB$ est bilinéaire continue de $E \times E$ dans E. Conséquence : $A \mapsto A^2$ est continue comme composée d'applications continues.
- $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien, $\Phi : (x, y) \mapsto \langle x|y\rangle$ est bilinéaire continue de $E \times E$ dans $\mathbb{K}$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

3.3.3 Espace $\mathcal{L}_c(E, F)$

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, on note $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires *continues* de E dans F. C'est un ensemble non vide (il contient l'application linéaire nulle), c'est même une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E, F)$.

DÉFINITION-PROPRIÉTÉ

Soit $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$, on pose $\|u\|_{op} := \inf\{\text{rapports de Lipschitz de } u\}$. Alors :
• $\|u\|_{op}$ est bien défini, c'est un rapport de Lipschitz de u, et

$$\|u\|_{op} = \operatorname*{Sup}_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} = \operatorname*{Sup}_{x\in E,\ \|x\|_E\leq 1} \|u(x)\|_F = \operatorname*{Sup}_{x\in E,\ \|x\|_E=1} \|u(x)\|_F$$

• $\|\cdot\|_{op}$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$, appelée **norme d'opérateur** ou **norme subordonnée** (parfois notée $|||\cdot|||$, ou $\|\cdot\|$ quand il n'y a pas d'ambiguïté).

DÉMONSTRATION:

• On sait qu'une application *linéaire* est continue ssi elle est lipschitzienne, donc pour tout $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$, $\|u\|_{op} < \infty$. De plus :

$$\begin{aligned} k \text{ est un rapport de Lipschitz de } u &\iff \forall x \neq y,\ \frac{\|u(x)-u(y)\|_F}{\|x-y\|_E} \leq k \\ &\iff \operatorname*{Sup}_{x\neq y} \frac{\|u(x-y)\|_F}{\|x-y\|_E} \leq k \\ &\iff \operatorname*{Sup}_{z\neq 0} \frac{\|u(z)\|_F}{\|z\|_E} \leq k \end{aligned}$$

et donc $\|u\|_{op} = \operatorname*{Sup}_{z\in E\setminus\{0\}} \frac{\|u(z)\|_F}{\|z\|_E}$ (et u est $\|u\|_{op}$-lipschitzienne).

Comme le quotient est invariant par homothétie, il ne prend pas plus de valeurs sur $E \setminus \{0\}$ que sur la sphère unité, donc

$$\|u\|_{op} = \operatorname*{Sup}_{\|z\|=1} \frac{\|u(z)\|_F}{1}$$

Enfin, $\operatorname*{Sup}_{\|x\|=1} \|u(x)\|_F \leq \operatorname*{Sup}_{\|x\|\leq 1} \|u(x)\|_F$ car $S(0,1) \subset BF(0,1)$, et si $\|x\| \leq 1$, il existe $\lambda \in [0;1]$ et $y \in S(0,1)$ tels que $x = \lambda y$, d'où

$$\|u(x)\| = \lambda\|u(y)\| \leq \|u(y)\| \leq \operatorname*{Sup}_{\|y\|=1} \|u(y)\|$$

et $\operatorname*{Sup}_{x\in BF(0,1)} \|u(x)\| \leq \operatorname*{Sup}_{y\in S(0,1)} \|u(y)\|$.

• Pour tout x, $\|\lambda u(x)\|_F = |\lambda| \cdot \|u(x)\|_F$ et $\|u(x)+v(x)\|_F \leq \|u(x)\|_F + \|v(x)\|_F$ et on passe au $\operatorname*{Sup}_{BF(0,1)}$ par exemple. Enfin, $\|u\|_{op} = 0$ ssi u est 0-lipschitzienne, ssi u est constante, et cette constante est égale à $u(0) = 0$ (car u est linéaire). □

A RETENIR :

1. une majoration du type "$\forall x,\ \|u(x)\| \leq M\|x\|$" montre que $\left\{ \begin{array}{l} u \text{ est continue} \\ \textit{et} \text{ que } \|u\|_{op} \leq M \end{array} \right.$;
2. par définition, le M optimal est $\|u\|_{op}$, on a alors

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\| \leq \|u\|_{op}\|x\|$$

REMARQUE : si dans E et F, on remplace les normes par des normes équivalentes, la topologie (et donc la notion de continuité) reste la même, et la norme d'opérateur sur $\mathcal{L}_c(E,F)$ est remplacée par une norme équivalente.

PROPOSITION 3.16

$\mathcal{L}_c(E)$ est une algèbre normée : $\forall u,v \in \mathcal{L}_c(E)$, $\|u\circ v\|_{op} \leq \|u\|_{op}\|v\|_{op}$.

DÉMONSTRATION:

Pour tout $x \in E$,

$$\|u \circ v(x)\|_E = \|u(v(x))\|_E \leq \|u\|_{op}\|v(x)\|_E \leq \|u\|_{op}\|v\|_{op}\|x\|_E$$

donc $\|u\|_{op}\|v\|_{op}$ est un rapport de Lipschitz pour l'application linéaire $u \circ v$, donc ($u \circ v$ est continue et) $\|u \circ v\|_{op} \leq \|u\|_{op}\|v\|_{op}$. □

REMARQUE : id : $E \to E$ est continue et $\|\mathrm{id}\|_{op} = 1$, car pour tout $x \in E$, $\|\mathrm{id}(x)\|_E = \|x\|_E$.

ATTENTION : si u est un isomorphisme avec $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$, u bijective *et* $u^{-1} \in \mathcal{L}_c(F, E)$ (attention, ce n'est pas automatique !), alors

$$1 = \|\mathrm{id}\|_{op} = \|u \circ u^{-1}\|_{op} \leq \|u\|_{op}\|u^{-1}\|_{op}$$

donc $\|u^{-1}\|_{op} \geq \frac{1}{\|u\|_{op}}$, mais en général il n'y a pas égalité.

4 ESPACES MÉTRIQUES COMPLETS

La complétude n'est pas à proprement parler une propriété topologique (elle n'est pas invariante par homéomorphisme), mais une propriété métrique.

4.1 Complétude d'un espace métrique

4.1.1 Suites de Cauchy

DÉFINITION

Soit (E, d) un espace métrique. On dit qu'une suite $(x_n)_n$ d'éléments de E est **de Cauchy**
$\iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \mid \forall p \geq q \geq N,\ d(x_p, x_q) < \varepsilon$
$\iff d(x_p, x_q) \xrightarrow[p,q \to +\infty]{} 0$

PROPOSITION 4.1

• *Dans un espace métrique, toute suite convergente est de Cauchy.*
• *Toute suite de Cauchy est bornée, a au plus une valeur d'adhérence, et si elle a une valeur d'adhérence, elle converge.*

DÉMONSTRATION:

• Si $x_n \to l : 0 \leq d(x_p, x_q) \leq d(x_p, l) + d(l, x_q) \xrightarrow[p,q \to +\infty]{} 0$ donc $(x_n)_n$ est de Cauchy.

• Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans (E, d) :

- la définition appliquée avec $\varepsilon = 1$ donne un rang N tel que $\forall p \geq q \geq N,\ \mid d(x_p, x_q) < 1$. En particulier, $\forall p \geq N,\ d(x_p, x_N) < 1$. Posons $M = \max(1, d(x_0, x_N), \ldots, d(x_{N-1}, x_N))$: $\forall p \in \mathbb{N},\ d(x_p, x_N) \leq M$ *i.e.* $x_p \in BF(x_N, M)$. Donc la suite est bornée.

- si l et l' sont des valeurs d'adhérence de $(x_n)_n$, ce sont des limites de sous-suites : $x_{\varphi(n)} \to l$ et $x_{\psi(n)} \to l'$. Alors

$$0 \leq d(l, l') \leq d(l, x_{\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)}, x_{\psi(n)}) + d(x_{\psi(n)}, l') \to 0$$

et donc $d(l, l') = 0$, *i.e.* $l = l'$.

- si $(x_n)_n$ possède une valeur d'adhérence l, il existe une sous-suite $x_{\varphi(n)} \to l$. Alors

$$0 \leq d(l, x_n) \leq d(l, x_{\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)}, x_n) \to 0$$

et donc $x_n \to l$. □

Exemples :
- $x_n = (-1)^n$ n'est pas de Cauchy dans $E = \mathbb{R}$ car elle a deux valeurs d'adhérence ;
- $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ est de Cauchy dans $E = [0; 1[$ mais n'a pas de valeur d'adhérence (dans E).

4.1.2 Espaces complets

DÉFINITION

Un espace métrique (E, d) est **complet** ssi toute suite de Cauchy dans E est convergente *dans E*. Un **espace de Banach** est un espace vectoriel normé complet.

DÉFINITION

Une algèbre normée $(E, \|\cdot\|)$ est dite **algèbre de Banach** si l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est de Banach.

REMARQUE : si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni de deux *normes* équivalentes N et N' :

$$\exists k_1,\ k_2 > 0 \mid \forall x \in E,\ k_1 N(x) \leq N'(x) \leq k_2 N(x)$$

alors

- *une suite est de Cauchy dans (E, N) ssi elle est de Cauchy dans (E, N').*
  En effet, $(x_n)_n$ est de Cauchy dans (E, N) ssi $N(x_p - x_q) \xrightarrow[p,q\to+\infty]{} 0$. C'est équivalent à $N'(x_p - x_q) \xrightarrow[p,q\to+\infty]{} 0$, *i.e.* $(x_n)_n$ est de Cauchy dans (E, N').
- *(E, N) est un espace de Banach ssi (E, N') est un espace de Banach.*
  En effet, si (E, N) est complet : soit (x_n) une suite de Cauchy dans (E, N'). Alors elle est de Cauchy dans (E, N) et donc converge dans cet espace : $\exists\, l \in E \mid N(x_n - l) \to 0$ et cela implique $N'(x_n - l) \to 0$. Donc $(x_n)_n$ converge dans (E, N').

mais **ATTENTION**, (E, d) complet n'entraîne PAS (E, d') complet même si d et d' sont topologiquement équivalentes : *la complétude n'est pas une notion topologique.*

Exemple fondamental :

THÉORÈME 4.1

$(\mathbb{R}, |\cdot|)$ *est complet.*

DÉMONSTRATION:

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, toute suite réelle bornée admet au moins une sous-suite convergente et donc une valeur d'adhérence. Donc, si $(x_n)_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, comme elle est bornée, elle admet au moins une valeur d'adhérence donc elle converge. $\square$

COROLLAIRE 4.1

Avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont complets pour N_∞ ou toute autre norme équivalente.

DÉMONSTRATION:

Tous ces espaces sont en fait des $\mathbb{R}^d$ avec N_∞ ou une norme équivalente. Or, une suite $(x^{(n)})_n$ est de Cauchy dans $(\mathbb{R}^d, N_\infty)$

$\iff N_\infty(x^{(p)} - x^{(q)}) \xrightarrow[p,q\to+\infty]{} 0$

$\iff \forall j = 1, \ldots, d,\ |x_j^{(p)} - x_j^{(q)}| \xrightarrow[p,q\to+\infty]{} 0$

$\iff$ les composantes $(x_1^{(n)})_n, \ldots, (x_d^{(n)})_n$ sont de Cauchy dans $\mathbb{R}$

donc $\forall j,\ x_j^{(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_j \in \mathbb{R}$ et $x^{(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} (l_1, \ldots, l_d) \in \mathbb{R}^d$. $\square$

PROPOSITION 4.2

Soit (E, d) un espace métrique, et $A \subset E$:
- *A complet $\Longrightarrow$ A fermé* dans *E ;*
- *E complet et A fermé dans E $\Longrightarrow$ A complet.*

DÉMONSTRATION:

• Si A est complet (pour la distance induite par d), on va montrer que A est fermé en utilisant la caractérisation séquentielle : soit $x \in E$ limite d'une suite $(a_n)_n$ d'éléments de A, *i.e.* $d(a_n, x) \to 0$. Alors

$$d(a_p, a_q) \leq d(a_p, x) + d(x, a_q) \xrightarrow[p,q\to+\infty]{} 0$$

donc $(a_n)_n$ est de Cauchy dans A complet, donc elle converge dans A : $a_n \to a \in A$. Par unicité de la limite, $x = a$ et donc $x \in A$.

• Si E est complet, et A fermé dans E : soit $(a_n)_n$ une suite de Cauchy dans A, *i.e.* $d(a_p, a_q) \xrightarrow[p,q\to+\infty]{} 0$. En particulier $(a_n)_n$ est une suite d'éléments de (E, d) qui est de Cauchy, et comme (E, d) est complet, elle converge dans E : $a_n \to x \in E$. Alors $x \in \overline{A}$, or $\overline{A} = A$ car A est fermé, donc $x \in A$. Ainsi $(a_n)_n$ converge dans A. □

REMARQUE : on en déduit que $(]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[, |\cdot|)$ n'est pas complet car sinon, $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ serait fermé dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Pourtant, $(]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[, |\cdot|)$ est homéomorphe via la fonction tan à $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, qui est complet : la complétude n'est pas préservée par homéomorphisme.

4.1.3 Exemples et méthodes

PROPOSITION 4.3

Soit I un ensemble quelconque, F un espace de Banach : l'espace $\ell^\infty(I, F)$ des fonctions bornées de I dans F est complet pour N_∞.

DÉMONSTRATION:

Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans l'espace $(\ell^\infty(I, F), N_\infty)$:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \mid \forall p \geq q \geq N,\ N_\infty(f_p - f_q) \leq \varepsilon \tag{2}$$

$$\text{i.e. } \forall t \in I,\ \|f_p(t) - f_q(t)\| \leq \varepsilon \tag{3}$$

ce qui implique que pour tout $t \in I$, la suite $(f_n(t))_n$ est de Cauchy dans F complet, donc convergente. Ainsi, il existe un élément de F, noté $f(t)$, tel que $f_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{t\ fixé} f(t)$.

On cherche à montrer que $(f_n)_n$ converge dans $(l^\infty(I, F), N_\infty)$, et on vient de trouver un candidat pour la limite : f. Il reste à vérifier que :
- $f \in \ell^\infty(I, F)$;
- $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{(l^\infty(I,F),N_\infty)} f$, c'est-à-dire $N_\infty(f_n - f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Validation :
- dans (3) (*et surtout pas dans (2)*), à q fixé, avec $p \to +\infty$: $\forall t \in I,\ \|f(t) - f_q(t)\|_F \leq \varepsilon$ donc
$$\forall q \geq N,\ f - f_q \in \ell^\infty(I, F) \text{ et } N_\infty(f - f_q) \leq \varepsilon$$
donc $N_\infty(f - f_q) \xrightarrow[q\to+\infty]{} 0$.
- on en déduit *directement* (sans revenir à la façon dont on a défini f) que
$$f = (f - f_q) + f_q \in \ell^\infty(I, F)$$
car $\ell^\infty(I, F)$ est un espace vectoriel. □

PROPOSITION 4.4

Soit F un espace de Banach : $\mathcal{C}([a; b], F)$ est complet pour N_∞.

DÉMONSTRATION:

On utilise la propriété “fermé dans un complet $\Longrightarrow$ complet” : une fonction continue sur un segment est bornée, donc $\mathcal{C}([a; b], F) \subset \ell^\infty([a; b], F)$, or $\ell^\infty([a; b], F)$ est complet pour N_∞. De plus, $\mathcal{C}([a; b], F)$ est fermé dans $\ell^\infty([a; b], F)$ puisqu'une limite uniforme de fonctions continues est continue. □

4.2 Application à des problèmes de limites

4.2.1 Théorème du point fixe de Picard

THÉORÈME 4.2

Soit (E,d) un espace métrique **complet** *et $f : E \to E$ une application strictement contractante :*

$$\exists k \in [0;1[\mid \forall x,y,\ d(f(x),f(y)) \leq kd(x,y)$$

Alors f a un unique point fixe $c \in E$. De plus, pour tout $x_0 \in E$, la suite des itérées définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers c et

$$\forall n,\ d(x_n,c) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1,x_0)$$

DÉMONSTRATION:

• Pour l'unicité : si $f(c) = c$ et $f(c') = c'$, alors $d(c,c') = d(f(c),f(c')) \leq kd(c,c')$ où $0 \leq k < 1$, donc $d(c,c') = 0$ *i.e.* $c = c'$.
• Pour l'existence : soit $x_0 \in E$, on va montrer que la suite définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ converge et que sa limite est un point fixe de f. On a pour tout n,

$$d(x_{n+1},x_n) = d(f(x_n),f(x_{n-1}) \leq kd(x_n,x_{n-1}) \leq \ldots \leq k^n d(x_1,x_0)$$

Donc pour $p \geq q$,

$$d(x_p,x_q) \leq d(x_p,x_{p-1}) + d(x_{p-1},x_{p-2}) + \ldots + d(x_{q+1},x_q) \leq (k^{p-1} + k^{p-2} + \ldots + k^q)d(x_1,x_0)$$

donc $0 \leq d(x_p,x_q) \leq \dfrac{k^q - k^p}{1-k} d(x_1,x_0) \leq \dfrac{k^q}{1-k} d(x_1,x_0) \xrightarrow[p,q\to+\infty]{} 0$ car $0 \leq k < 1$. Ainsi la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy dans (E,d) complet : elle converge vers $c \in E$, et avec $p \to +\infty$ dans l'inégalité ci-dessus on obtient $d(c,x_q) \leq \frac{k^q}{1-k} d(x_1,x_0)$.
• Vérifions que $f(c) = c$: pour tout n, $x_{n+1} = f(x_n)$, or $x_n \to c$ donc $f(x_n) \to f(c)$ car f est lipschitzienne donc continue, et $x_{n+1} \to c$. Par unicité de la limite, on obtient bien $c = f(c)$. □

ATTENTION : toutes les hypothèses sont indispensables. Notamment, ne pas oublier de vérifier que $f(E) \subset E$: par exemple, $E = [0;1]$ est complet car fermé dans $\mathbb{R}$ qui est complet, $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est strictement contractante d'après l'inégalité des accroissements finis, mais f n'a pas de point fixe dans E (et le théorème ne s'applique pas car $f(E)$ n'est pas inclus dans E).

4.2.2 Critère de Cauchy

PROPOSITION 4.5

Soit (E,d_E) et (F,d_F) deux espaces métriques, on suppose que F est **complet**. *Soit $f : A \to F$, où A est une partie (non vide) de E, et $b \in \overline{A}$.*
Alors $f(x)$ a une limite quand $x \to b$ ssi le **critère de Cauchy** *au voisinage de b est satisfait :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \mid \forall x,y \in A,\ \left(\begin{array}{l} d_E(x,b) < \eta \\ \text{et } d_E(y,b) < \eta \end{array} \implies d_F(f(x),f(y)) < \varepsilon \right)$$

REMARQUE : f satisfait le critère de Cauchy au voisinage de $b \iff d_F(f(x),f(y)) \xrightarrow[x,y\to b]{} 0$. Ce critère permet de montrer que f a une limite sans connaître cette limite.

DÉMONSTRATION:

$(\Longrightarrow)$ Si $f(x) \xrightarrow[x\to b]{} l$: alors $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall x \in A,\ (d_E(x,b) < \eta \implies d_F(f(x),l) < \varepsilon/2)$ donc si $d_E(x,b) < \eta$ et $d_E(y,b) < \eta$, alors $d_F(f(x),f(y)) \leq d_F(f(x),l) + d_F(l,f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$.

($\Longleftarrow$) Si f satisfait le critère de Cauchy au voisinage de b : soit $(a_n)_n$ une suite d'éléments de A qui converge vers b (une telle suite existe puisque $b \in \overline{A}$), alors $d_F(f(a_p), f(a_q)) \xrightarrow[p,q\to+\infty]{} 0$ *i.e.* la suite $(f(a_n))_n$ est de Cauchy dans F complet. Donc $(f(a_n))_n$ converge, et d'après le critère séquentiel pour les limites, $\lim_{x\to b} f(x)$ existe. □

Corollaire : théorème de prolongement

THÉORÈME 4.3

Soit (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques, on suppose que F est **complet**. *Soit $f : A \to F$, où A est une partie (non vide) de E, on suppose que f est k-lipschitzienne sur A. Alors*
- *f a une limite en tout point de $\overline{A}$;*
- *son prolongement par continuité $\tilde{f} : \overline{A} \to F$ est une application k-lipschitzienne sur $\overline{A}$.*

DÉMONSTRATION:

• Soit $b \in \overline{A}$: pour tous $x, y \in A$, $d_F(f(x), f(y)) \leq k d_E(x, y)$ et le second membre tend vers 0 quand $x \to b$ et $y \to b$ (par continuité de la fonction d_E sur $E \times E$). Donc f vérifie le critère de Cauchy au voisinage de b, elle admet donc une limite en b d'après la proposition précédente. Posons

$$\tilde{f}(b) := \lim_{\substack{x\to b \\ x\in A}} f(x),$$

ce qui est la seule possibilité pour obtenir un prolongement de f par continuité.

• Puisque f est continue sur A (car lipschitzienne), on a $\forall a \in A,\ f(x) \xrightarrow[\substack{x\to a \\ x\in A}]{} f(a)$ et donc $\tilde{f}(a) = f(a)$. Ainsi $\tilde{f}_{|A} = f$. De plus, pour tous $b, b' \in \overline{A}$, il existe des suites $(a_n)_n$ et $(a'_n)_n$ d'éléments de A telles que $a_n \to b$ et $a'_n \to b'$. Comme $\forall n,\ d_F(f(a_n), f(a'_n)) \leq k d_E(a_n, a'_n)$, en passant à la limite, on obtient $d_F(\tilde{f}(b), \tilde{f}(b')) \leq k d_E(b, b')$. Ainsi $\tilde{f}$ est k-lipschitzienne sur $\overline{A}$. En particulier c'est bien un prolongement continu de f. □

5 COMPACITE

5.1 Partie compacte dans un espace métrique

5.1.1 Théorème et définition

DÉFINITION-PROPRIÉTÉ

Soit (E, d) un espace métrique, $K \subset E$. On dit que K est **compact**

$\Longleftrightarrow$ *i)* de tout recouvrement de K par des ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini ;

$\underset{[\text{esp. métr.}]}{\overset{\Longrightarrow}{\Longleftarrow}}$ *ii)* toute suite d'éléments de K admet une valeur d'adhérence dans K ;

$\underset{[\text{esp. métr.}]}{\Longleftrightarrow}$ *iii)* de toute suite d'éléments de K on peut extraire une sous-suite qui converge *dans* K.

La propriété *i)* est appelée **axiome de Borel-Lebesgue**.

REMARQUE : dans le cadre général, la définition est le *i)*, mais on exige parfois que K soit séparé en plus de satisfaire l'axiome de Borel-Lebesgue. Dans le cadre métrique, ce n'est pas nécessaire : un espace métrique est automatiquement séparé.

L'axiome de Borel-Lebesgue signifie :

- si $(O_\alpha)_\alpha$ est une famille d'ouverts de (E, d) telle que $K \subset \bigcup_\alpha O_\alpha$, alors il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels que $K \subset \bigcup_{j=1}^n O_{\alpha_j}$;
- de façon équivalente, puisque par définition de la topologie induite les ouverts de K sont exactement les intersections des ouverts de E avec K :
  si $(O'_\alpha)_\alpha$ est une famille d'ouverts *de* K telle que $K = \bigcup_\alpha O'_\alpha$, alors il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels que $K = \bigcup_{j=1}^n O'_{\alpha_j}$;
- ou encore, en passant au complémentaire : de toute famille de fermés *de* K d'intersection vide, on peut extraire une sous-famille finie qui est encore d'intersection vide.

DÉMONSTRATION:

- *i)* $\Longleftrightarrow$ *iii)* vient des propriétés équivalentes pour les valeurs d'adhérence.
- *i)* $\Longrightarrow$ *ii)* : soit (x_n) une suite déléments de K. L'ensemble de ses valeurs d'adhérence dans K est

$$\mathcal{A} := K \cap \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\{x_n / \ n \geq N\}},$$

on veut montrer qu'il est non vide. Or $\mathcal{A} = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} F_N$ où $F_N = K \cap \overline{\{x_n / \ n \geq N\}}$: donc $\mathcal{A}$ est une intersection de fermés de K, non vides. Par l'absurde, si $\mathcal{A} = \emptyset$, alors par hypothèse il existe $N_1, \ldots, N_s$ tels que

$$\emptyset = \bigcap_{j=1}^{s} F_{N_j} = F_{\max(N_1, \ldots, N_s)}$$

puisque la suite (F_N) est décroissante pour l'inclusion. Or les F_N sont tous non vides : contradiction.

- *ii)* $\Longrightarrow$ *i)*
  - On aura besoin du lemme suivant : si *ii)* est vérifiée, alors pour tout $\varepsilon > 0$, K peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon ε.
    En effet, par l'absurde, supposons qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que K ne soit pas recouvert par un nombre fini de boules de rayon ε_0. Soit $x_1 \in K$. Alors K n'est pas inclus dans $B(x_1, \varepsilon_0)$, donc il existe $x_2 \in K$ tel que $d(x_1, x_2) \geq \varepsilon_0$. Puisque K n'est pas inclus

dans $B(x_1,\varepsilon_0)\cup B(x_2,\varepsilon_0)$, il existe $x_3\in K$ tel que $d(x_1,x_3)\geq\varepsilon_0$ et $d(x_2,x_3)\geq\varepsilon_0$. En itérant, on construit une suite (x_n) dans K telle que pour tous $i\neq j$, $d(x_i,x_j)\geq\varepsilon_0$. Par conséquent (x_n) ne possède pas de sous-suite convergente : contradiction.

- Soit $(O_\alpha)_\alpha$ un recouvrement ouvert de K : $K\subset\bigcup_\alpha O_\alpha$. Montrons qu'il existe $\varepsilon_0>0$ tel que pour tout $x\in K$, la boule $B(x,\varepsilon_0)$ soit contenue dans l'un des O_α.
  Par l'absurde, sinon, pour tout $\varepsilon>0$ en particulier $\varepsilon=1/n$, il existe $x=x_n$ tel que $B(x_n,1/n)$ ne soit contenue dans aucun des O_α. Or par hypothèse, la suite (x_n) admet une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers $l\in K\subset\bigcup_\alpha O_\alpha$: soit α_0 tel que $l\in O_{\alpha_0}$. Comme O_{α_0} est ouvert, il contient une petite boule $B(l,2r)$. Or $x_{\varphi(n)}\to l$, donc il existe N (qu'on peut supposer $>\frac{1}{r}$) tel que $\forall n\geq N,\ x_{\varphi(n)}\in B(l,r)$. Cela implique $\forall n\geq N,\ B\left(x_{\varphi(n)},\frac{1}{\varphi(n)}\right)\subset B(l,2r)$: en effet, si $y\in B(x_{\varphi(n)},\frac{1}{\varphi(n)})$, alors
  $$d(l,y)\leq d(l,x_{\varphi(n)})+d(x_{\varphi(n)},y)<r+\frac{1}{\varphi(n)}\leq r+\frac{1}{n}\leq r+\frac{1}{N}<2r.$$
  Contradiction puisqu'on a donc $B(x_n,1/n)\subset O_{\alpha_0}$ pour tout n assez grand, or par construction les $B(x_n,1/n)$ ne sont contenues dans aucun des O_α.
- Pour le ε_0 ainsi trouvé, on peut extraire un recouvrement fini de K par des boules de rayon ε_0 vu le lemme précédent : $K\subset\bigcup_{j=1}^s B(x_j,\varepsilon_0)\subset\bigcup_{j=1}^s O_{\alpha_j}$ pour α_j tel que $B(x_j,\varepsilon_0)\subset O_{\alpha_j}$.

$\square$

Propriété des fermés emboîtés

PROPOSITION 5.1

Soit $K\subset(E,d)$ un compact, et $(F_n)_n$ une suite décroissante de fermés non vides de K *: alors* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n\neq\emptyset$.

DÉMONSTRATION:

Par l'absurde, si $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}F_n=\emptyset$, alors il existe $n_1,\ldots,n_s$ tels que $\bigcap_{j=1}^s F_{n_j}=\emptyset$. Or on a supposé $F_0\supset\ldots\supset F_n\supset\ldots$, donc $\bigcap_{j=1}^s F_{n_j}=F_N$ où $N=\max(n_1,\ldots,n_s)$, ce qui contredit l'hypothèse $F_N\neq\emptyset$. $\square$

5.1.2 Propriétés

PROPOSITION 5.2

Un produit fini de compacts est compact.

DÉMONSTRATION:

Il suffit de faire la preuve pour le produit de deux compacts K_1 et K_2. Soit $(x_n)_n$ une suite dans $K_1\times K_2$: $\forall n,\ x_n=(x_{n,1},x_{n,2})\in K_1\times K_2$. Alors $(x_{n,1})_n$ est une suite dans K_1 compact, donc elle admet une sous-suite qui converge dans K_1 : $x_{\varphi_1(n),1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}l_1\in K_1$.

Puisque $(x_{\varphi_1(n),2})_n$ est alors une suite dans K_2 compact, elle admet une sous-suite qui converge dans K_2 : $x_{\varphi_1(\varphi_2(n)),2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}l_2\in K_2$.

ATTENTION : une sous-suite de $b_n=a_{\varphi(n)}$ est de la forme $b_{\psi(n)}=a_{\varphi(\psi(n))}$ (on remplace n par $\psi(n)$ dans $a_{\varphi(n)}$) et non $a_{\psi(\varphi(n))}$.

Posons $\psi=\varphi_1\circ\varphi_2$: c'est la composée de deux applications strictement croissantes, donc elle est strictement croissante, donc $(x_{\psi(n)})_n$ est une sous-suite de $(x_n)_n$. De plus $x_{\psi(n),1}\to l_1$ (car c'est une sous-suite de $(x_{\varphi_1(n),1})_n$) et $x_{\psi(n),2}\to l_2$. Donc $x_{\psi(n)}\to(l_1,l_2)\in K_1\times K_2$. $\square$

PROPOSITION 5.3

Si $K \subset (E, d)$ est compact : il est borné, complet et fermé dans E.

DÉMONSTRATION:

• K est borné, sinon il existerait une suite $(x_n)_n$ dans K telle que $d(x_0, x_n) \to +\infty$ et en particulier $(x_n)_n$ n'aurait aucune valeur d'adhérence.

• Montrons que K est complet (ce qui entraînera qu'il est fermé dans E) : soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans K. Puisque K est compact, elle a une valeur d'adhérence dans K, or une suite de Cauchy qui a une valeur d'adhérence converge. □

PROPOSITION 5.4

Un fermé dans un compact est compact.

DÉMONSTRATION:

Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de F : c'est aussi une suite dans K qui est compact, donc il existe une sous-suite $x_{\varphi(n)} \to l \in K$. Ainsi $l \in \overline{F}$, or $\overline{F} = F$ puisque F est fermé, d'où $x_{\varphi(n)} \to l \in F$. □

PROPOSITION 5.5

Contrairement au cas général : *dans un compact, une suite qui a une seule valeur d'adhérence est convergente.*

DÉMONSTRATION:

Soit K un compact et $(x_n)_n$ une suite d'éléments de K ayant une seule valeur d'adhérence $\lambda \in K$: montrons que $x_n \to \lambda$. Par l'absurde, sinon :

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \mid \forall n,\ \exists k > n,\ d(\lambda, x_k) \geq \varepsilon_0$$

On construit alors une sous-suite de la façon suivante :

- avec $n = 0$, on note $k = \varphi(0)$: alors $d(\lambda, x_{\varphi(0)}) \geq \varepsilon_0$;
- avec $n = \varphi(0)$, on note $k = \varphi(1)$: alors $d(\lambda, x_{\varphi(1)}) \geq \varepsilon_0$;
- ...
- si on a construit $\varphi(j)$: pour $n = \varphi(j)$, on btient $k = \varphi(j+1)$; alors $d(\lambda, x_{\varphi(j+1)}) \geq \varepsilon_0$.

Par construction, $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante et on obtient ainsi par itération une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ vérifiant $\forall n,\ d(\lambda, x_{\varphi(n)}) \geq \varepsilon_0$. Puisque $(x_{\varphi(n)})_n$ est une suite dans K compact, elle admet une valeur d'adhérence μ qui est aussi une valeur d'adhérence de $(x_n)_n$. De plus, avec $n \to +\infty$ on obtient $d(\lambda, \mu) \geq \varepsilon_0 > 0$ et donc $\lambda \neq \mu$, ce qui contredit l'hypothèse. □

5.1.3 Compacts dans $\mathbb{K}^n$

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, toute suite réelle bornée admet une sous-suite convergente, ce qui prouve :

THÉORÈME 5.1

Dans $\mathbb{R}$, les segments sont compacts.

COROLLAIRE 5.1 *Dans $(\mathbb{K}^n, N_\infty)$, les compacts sont exactement les fermés bornés.*

DÉMONSTRATION:

Un compact est toujours fermé et borné. Réciproquement, si K est fermé et borné dans $(\mathbb{K}^n, N_\infty)$: $\exists R > 0 \mid K \subset BF_{N_\infty}(0, R)$ où $BF_{N_\infty}(0, R) = [-R; R] \times \ldots \times [-R; R]$. Or le segment $[-R; R]$ est compact, et un produit de compacts est compact, donc $BF_{N_\infty}(0, R)$ est compact. Ainsi K est inclus dans un compact et fermé, donc compact. □

Exemple : dans $(\mathbb{K}^n, N_\infty)$, les boules fermées et les sphères sont compactes.

ATTENTION : ce n'est plus vrai en dimension infinie. Par exemple, dans l'espace (ℓ^∞, N_∞) des suites bornées, la boule $BF(0, 1)$ est fermée et bornée, mais n'est pas compacte : en effet, en posant $u^{(k)} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ où le 1 est à la $k$ième place (autrement dit, $u_n^{(k)} = \delta_{k,n}$), on a bien $\forall k,\ u^{(k)} \in \ell^\infty$ et $N_\infty(u^{(k)}) = \mathrm{Sup}_n |u_n^{(k)}| = 1$, donc $(u^{(k)})_k$ est une suite d'éléments de $BF(0, 1)$. Mais elle n'a pas de valeur d'adhérence car $\forall k \neq l,\ N_\infty(u^{(k)} - u^{(l)}) = 1$ (et si $u^{(\varphi(k))} \to l$, alors $N_\infty(u^{(\varphi(k+1))} - u^{(\varphi(k))}) \to 0$, contradiction).

5.2 Applications

5.2.1 Compacité et continuité

PROPOSITION 5.6

L'image continue d'un compact est un compact. En particulier, une application continue sur un compact est bornée et, si elle est à valeurs réelles, elle atteint ses bornes.

DÉMONSTRATION:

- Preuve numéro 1 (séquentielle) : soit $K \subset (E, d_E)$ un compact et $f : K \to (F, d_F)$ continue. Soit $(y_n)_n$ une suite d'éléments de $f(K)$: $\forall n,\ \exists x_n \in K \mid y_n = f(x_n)$. Ainsi $(x_n)_n$ est une suite dans K compact, donc elle possède une sous-suite convergente $x_{\varphi(n)} \to a \in K$. Par continuité de f, $y_{\varphi(n)} = f(x_{\varphi(n)}) \to f(a) \in f(K)$ et donc $(y_n)_n$ admet une valeur d'adhérence dans K.

- Preuve numéro 2 (à l'aide de l'axiome de Borel-Lebesgue) : si $f(K) \subset \bigcup_\alpha O_\alpha$ où les O_α sont des ouverts, alors $K \subset \bigcup_\alpha f^{-1}(O_\alpha)$ où les $f^{-1}(O_\alpha)$ sont des ouverts par continuité de f. Comme K est compact, on peut extraire un sous-recouvrement fini : il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels que $K \subset \bigcup_{j=1}^n f^{-1}(O_{\alpha_j})$ et donc $f(K) \subset \bigcup_{j=1}^n O_{\alpha_j}$. □

PROPOSITION 5.7

Contrairement au cas général : *toute bijection continue qui part d'un compact est un homéomorphisme.*

DÉMONSTRATION:

Soit $f : K \to f(K)$ une bijection continue : il reste à montrer que $f^{-1} : f(K) \to K$ est continue. Soit F un fermé de K, en particulier F est compact puisque K est compact. Alors $\left(f^{-1}\right)^{-1}(F) = f(F)$ est compact (comme image par f continue d'un compact), en particulier est fermé. Ainsi, l'image réciproque par f^{-1} de tout fermé est un fermé, *i.e.* f^{-1} est continue. □

Théorème de Heine

THÉORÈME 5.2

Soit $K \subset (E, d_E)$ un compact et $f : K \to (F, d_F)$ continue : alors f est uniformément continue sur K.

DÉMONSTRATION:

Supposons par l'absurde que f n'est pas uniformément continue sur K : il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, en particulier $\eta = \frac{1}{n}$,

$$\exists (x_n, y_n) \in K \times K \mid \begin{cases} d_E(x_n, y_n) < 1/n \\ d_F(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0 \end{cases}$$

Comme $((x_n, y_n))_n$ est une suite dans le compact $K \times K$, elle admet une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) \to (a, b) \in K \times K$, autrement dit $x_{\varphi(n)} \to a$ et $y_{\varphi(n)} \to b$.

Or $0 \leq d_E(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \to 0$ donc $d_E(x_n, y_n) \to 0$ et en passant à la limite il vient $d_E(a, b) = 0$ *i.e.* $a = b$. Puisque f est continue en $a \in K$, on obtient $f(x_{\varphi(n)}) \to f(a)$ et $f(y_{\varphi(n)}) \to f(a)$, d'où $d_F(f(x_{\varphi(n)}), f(y_{\varphi(n)})) \to 0$: contradiction vu la minoration par $\varepsilon_0 > 0$. □

5.2.2 Particularités des espaces vectoriels normés de dimension finie

THÉORÈME 5.3

Sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie*, toutes les normes sont deux-à-deux équivalentes.*

DÉMONSTRATION:

On fixe $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, et pour $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ on pose

$$N(x) := \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$$

(ce qui définit bien une norme sur E). L'application $\phi : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ est une isométrie bijective de $(\mathbb{K}^n, N_\infty)$ dans (E, N) : elle est donc continue (car 1-lipschitzienne) et

$$S := \{x \in E \mid N(x) = 1\} = \phi(S_{N_\infty}(0, 1))$$

est l'image par une application continue d'un compact. Ainsi S est compacte.

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E :

$$\forall x,\ \|x\| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j| \cdot \|e_j\| \leq \sum_{j=1}^{n} N(x) \cdot \|e_j\| = N(x) \sum_{j=1}^{n} \|e_j\|$$

donc en posant $\mu := \sum_{j=1}^{n} \|e_j\|$, on obtient $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \leq \mu N(x - y)$. Autrement dit l'application $\|\cdot\| : x \mapsto \|x\|$ est μ-lipschitzienne (*a fortiori* continue) de (E, N) dans $\mathbb{R}$. Par conséquent $\|\cdot\|$ est bornée sur S et atteint ses bornes :

$$\alpha := \operatorname*{Inf}_{x \in S} \|x\| \quad \text{et} \quad \beta := \operatorname*{Sup}_{x \in S} \|x\|$$

sont bien définis, et il existe $x_0 \in S$ tel que $\alpha = \|x_0\|$. Puisque $x_0 \in S$ *i.e.* $N(x_0) = 1$, nécessairement $x_0 \neq 0$ et donc $\|x_0\| \neq 0$ (car N et $\|\cdot\|$ sont des normes sur E). On a ainsi $0 < \alpha \leq \beta$. Par conséquent,

$$\exists \alpha, \beta > 0 \mid \forall x \in E,\ (N(x) = 1 \Longrightarrow \alpha \leq \|x\| \leq \beta)$$

Or si $y \in E \setminus \{0\}$, alors en posant $x = \frac{1}{N(y)} y$ on a $N(x) = 1$, et donc $\alpha \leq \left\| \frac{y}{N(y)} \right\| \leq \beta$, autrement dit

$$\alpha N(y) \leq \|y\| \leq \beta N(y)$$

Cette inégalité est encore vérifiée pour $y = 0$, ce qui montre que les normes N et $\|\cdot\|$ sont équivalentes. □

Ainsi toutes les normes possibles sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E *de dimension finie* donnent la même topologie, appelée **topologie usuelle** de E. Les propriétés de E muni de la topologie usuelle sont celles de $\mathbb{K}^n$ muni de N_∞ :

- E est complet
- les compacts de E sont exactement les fermés bornés dans E ; en particulier, les boules fermées et les sphères sont compactes.

PROPOSITION 5.8

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Alors F est fermé dans E.

DÉMONSTRATION:

F est de dimension finie, donc complet. Comme $F \subset E$, il est fermé dans E. □

PROPOSITION 5.9

Toute application linéaire (ou multilinéaire) entre espaces vectoriels normés est automatiquement continue dès que l'espace de départ *est de dimension finie.*

DÉMONSTRATION:

Soit $\Phi : E_1 \times \ldots \times E_p \to F$ une application p-linéaire, on suppose que les E_j sont de dimension finie. Puisque les E_j sont de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes et il suffit de montrer la continuité de Φ pour des normes bien choisies sur les E_j.

Soit $\mathcal{B}_j = (e_1^{(j)}, \ldots, e_{n_j}^{(j)})$ une base de E_j : $v_j \in E_j$ s'écrit $v_j = \sum_{i_j=1}^{n_j} x_{i_j}^{(j)} e_{i_j}^{(j)}$ et on pose

$$N_\infty^{\mathcal{B}_j}(v_j) := \underset{1 \leq i_j \leq n_j}{\mathrm{Max}} \left| x_{i_j}^{(j)} \right|$$

C'est bien une norme sur E_j : elle dépend du choix de la base, si on change de base, les coordonnées de v_j changent et cela définit une autre norme (équivalente...). Alors

$$\begin{aligned} \Phi(v_1, \ldots, v_p) &= \Phi\left(\sum_{i_1=1}^{n_1} x_{i_1}^{(1)} e_{i_1}^{(1)}, \ldots, \sum_{i_p=1}^{n_p} x_{i_p}^{(p)} e_{i_p}^{(p)}\right) \\ &= \sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_p=1}^{n_p} x_{i_1}^{(1)} \ldots x_{i_p}^{(p)} \Phi(e_{i_1}^{(1)}, \ldots, e_{i_p}^{(p)}) \end{aligned}$$

où $\forall j,\ \forall i_j,\ \left| x_{i_j}^{(j)} \right| \leq N_\infty^{\mathcal{B}_j}(v_j)$. Donc

$$\|\Phi(v_1, \ldots, v_p)\|_F \leq N_\infty^{\mathcal{B}_1}(v_1) \ldots N_\infty^{\mathcal{B}_p}(v_p) \times \sum_{i_1, \ldots i_p} \|\Phi(e_{i_1}^{(1)}, \ldots, e_{i_p}^{(p)})\|_F$$

C'est exactement la condition de continuité pour une application multilinéaire en posant $k := \sum_{i_1, \ldots i_p} \|\Phi(e_{i_1}^{(1)}, \ldots, e_{i_p}^{(p)})\|_F$. □

Théorème de Riesz

THÉORÈME 5.4

Soit E un espace vectoriel normé :

$$BF(0,1) \text{ est compacte} \Longleftrightarrow E \text{ est de dimension finie}$$

DÉMONSTRATION:

- ($\Longleftarrow$) $BF(0,1)$ est un fermé borné. Si E est de dimension finie, $BF(0,1)$ est donc un compact.
- ($\Longrightarrow$) On suppose que $K := BF(0,1) = \{x \in E \mid \|x\|_E \leq 1\}$ est compact. Puisque $K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, \frac{1}{2})$, il existe $x_1, \ldots, x_n \in K$ tels que $K \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \frac{1}{2})$. Soit

$$F = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$$

Montrons que $K \subset F$. Soit $x \in K$: il est à distance $< \frac{1}{2}$ de l'un des x_j, on note y_0 ce x_j : alors $y_0 \in F$ et $\|x - y_0\| < \frac{1}{2}$. Supposons qu'on ait construit $y_0, \ldots, y_k \in F$ tels que $\forall s = 1, \ldots, k,\ \|x - y_s\| < \frac{1}{2^{s+1}}$:

$$\|2^{k+1}(x - y_k)\| < 1$$

donc $2^{k+1}(x - y_k) \in K$ et il existe un indice j tel que $2^{k+1}(x - y_k) \in B(x_j, \frac{1}{2})$ ce qui donne $\|2^{k+1}(x - y_k) - x_j\| < \frac{1}{2}$ et donc $\|x - y_{k+1}\| < \frac{1}{2^{k+2}}$, où $y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2^{k+1}} x_j$. Alors $y_{k+1} \in F$ puisque $y_k,\ x_j \in F$ et que F est un espace vectoriel.

On construit ainsi une suite $(y_k)_k$ d'éléments de F telle que $y_k \to x$. Comme F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, il est fermé dans E, et donc $x \in \overline{F} = F$. Finalement $K = BF(0, 1) \subset F$. Or si $x \in E$, ou bien $x = 0 \in F$, ou bien $x \neq 0$ et $\frac{1}{\|x\|} x \in BF(0, 1) \subset F$ et donc $x \in F$ (puisque F est un espace vectoriel). Finalement $E = F$ est de dimension finie. □

5.3 Exemple : $\overline{\mathbb{R}}$, application aux limsup, liminf pour les suites réelles

5.3.1 Construction de $\overline{\mathbb{R}}$

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle : elle n'a pas forcément de limite, ni même de valeur d'adhérence (dans $\mathbb{R}$), par exemple si $u_n \to +\infty$. On va "ajouter" deux points supplémentaires à $\mathbb{R}$ notés $-\infty$ et $+\infty$, où $\{-\infty; +\infty\} \cap \mathbb{R} = \emptyset$ et $-\infty \neq +\infty$, et ainsi définir

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$$

On munit $\overline{\mathbb{R}}$ d'une relation d'ordre total, prolongeant l'ordre connu sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\},\ -\infty < x$$

$$\forall y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\},\ y < +\infty$$

On pose

$$\forall x, y \in \overline{\mathbb{R}},\ d(x, y) = |\mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(y)|$$

où par convention $\mathrm{Arctan}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$ et $\mathrm{Arctan}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$.

REMARQUE : prolongée ainsi, la fonction Arctan est injective sur $\overline{\mathbb{R}}$.

PROPOSITION 5.10

d est une distance sur $\overline{\mathbb{R}}$, et la topologie induite par d sur $\mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{R}}$ est la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION:

- d est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$; elle est symétrique ($\forall x, y \in \overline{\mathbb{R}},\ d(x, y) = d(y, x)$). De plus $d(x, y) = d(y, x) \iff \mathrm{Arctan} x = \mathrm{Arctan} y \iff x = y$ puisque Arctan est injective. Enfin, si $x, y, z \in \overline{\mathbb{R}}$:

$$d(x, y) \leq |\mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(z)| + |\mathrm{Arctan}(z) - \mathrm{Arctan}(y)| = d(x, z) + d(z, y)$$

Donc d est une distance sur $\overline{\mathbb{R}}$; en particulier, elle induit une distance sur $\mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{R}}$.

- Arctan : $(\mathbb{R}, d) \to (]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[, |\cdot|)$ est un homéomorphisme : en effet, Arctan : $\mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ est bijective, et

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ |\mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(y)| = d(x, y)$$

Ainsi Arctan : $(\mathbb{R}, d) \to (]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[, |\cdot|)$ et sa réciproque tan : $(]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[, |\cdot|) \to (\mathbb{R}, d)$ sont 1-lipschitziennes donc continues. Il reste à vérifier que $(]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[, |\cdot|)$ et $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ sont homéomorphes : or tan : $(]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[, |\cdot|) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ est bijective, et on sait que tan et Arctan sont continues pour la topologie usuelle. Finalement, $(\mathbb{R}, d)$ est homéomorphe à $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. □

REMARQUE : en particulier, dire qu'une suite réelle $(u_n)_n$ converge vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$ signifie selon les cas qu'elle converge vers un réel, que $u_n \to +\infty$, ou que $u_n \to -\infty$ (au sens usuel).

PROPOSITION 5.11

$\overline{\mathbb{R}}$ *est compact.*

DÉMONSTRATION:

Puisque c'est un espace métrique, il s'agit de montrer que toute suite $(u_n)_n$ d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une sous-suite qui converge dans $\overline{\mathbb{R}}$.

• premier cas : si les termes de la suite sont réels à partir d'un certain rang

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,\ u_n \in \mathbb{R}$$

Alors ou bien $(u_n)_{n \geq n_0}$ est bornée dans $\mathbb{R}$ et donc admet une sous-suite qui converge vers $l \in \mathbb{R}$, ou bien $(u_n)_{n \geq n_0}$ est non bornée dans $\mathbb{R}$ et dans ce cas soit elle admet une sous-suite qui converge vers $+\infty$ soit elle admet une sous-suite qui converge vers $-\infty$. Dans tous les cas, on a trouvé une sous-suite $u_{\varphi(n)} \to l \in \overline{\mathbb{R}}$.

• deuxième cas : sinon

$$\forall n,\ \exists k \geq n \mid u_k \in \{-\infty; +\infty\}$$

i.e $\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in \{-\infty; +\infty\}\}$ est infini. Donc l'un des deux ensembles $\{k \in \mathbb{N} \mid u_k = +\infty\}$ ou $\{k \in \mathbb{N} \mid u_k = -\infty\}$ est infini, ce qui permet de construire une sous-suite $u_{\varphi(n)}$ constante égale à $+\infty$ ou constante égale à $-\infty$: en particulier $u_{\varphi(n)} \to l \in \overline{\mathbb{R}}$. □

5.3.2 limsup, liminf

DÉFINITION

Soit $(u_n)_n$ une suite dans $\overline{\mathbb{R}}$. On pose :

$$\limsup_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{Sup}\mathcal{A} \in \overline{\mathbb{R}} \text{ (ou } \overline{\lim}\, u_n) \qquad \text{et} \qquad \liminf_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{Inf}\mathcal{A} \in \overline{\mathbb{R}} \text{ (ou } \underline{\lim}\, u_n)$$

où $\mathcal{A}$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_n$ *dans* $\overline{\mathbb{R}}$ (on sait que $\mathcal{A} \neq \emptyset$).

Par construction, on a alors $\liminf u_n \leq \limsup u_n$ mais attention, les termes de la suite ne sont en général pas compris entre les deux !

Exemples :

$u_n = (-1)^n$: $\liminf u_n = -1$, $\limsup u_n = 1$
$u_n = -n$: $\liminf u_n = -\infty$, $\limsup u_n = -\infty$
$u_n = (-2)^n$: $\liminf u_n = -\infty$, $\limsup u_n = +\infty$
$u_n = \sin(1/n)$: $\liminf u_n = 0$, $\limsup u_n = 0$

PROPOSITION 5.12

Soit $(u_n)_n$ *une suite dans* $\overline{\mathbb{R}}$ *:*

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \overline{\mathbb{R}} \iff \liminf u_n = \limsup u_n = l$$

DÉMONSTRATION:

$\liminf u_n = \limsup u_n = l$ signifie $\mathrm{Inf}\mathcal{A} = \mathrm{Sup}\mathcal{A} = l$, *i.e.* $\mathcal{A} = \{l\}$, où $\mathcal{A}$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_n$ dans $\overline{\mathbb{R}}$.

• si $u_n \to l$, alors elle a une seule valeur d'adhérence et donc $\mathcal{A} = \{l\}$.

• si $\mathcal{A} = \{l\}$, alors $(u_n)_n$ est une suite *dans un compact* avec une seule valeur d'adhérence, donc elle converge (vers cette valeur d'adhérence). □

PROPOSITION 5.13

> *Soit $(u_n)_n$ une suite dans $\overline{\mathbb{R}}$: alors* $\liminf u_n$ *et* $\limsup u_n$ *sont des valeurs d'adhérence de $(u_n)_n$, autrement dit il existe des sous-suites $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \liminf u_n$ et $u_{\psi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \limsup u_n$.*

DÉMONSTRATION:

Avec les notations précédentes, il s'agit de montrer que $\text{Inf}\mathcal{A} \in \mathcal{A}$ et $\text{Sup}\mathcal{A} \in \mathcal{A}$. Or par définition des valeurs d'adhérence :

$$\mathcal{A} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{u_k \mid k \geq n\}}$$

qui est donc fermé (comme intersection de fermés) dans $\overline{\mathbb{R}}$ compact. Ainsi $\mathcal{A}$ est compact, d'où la conclusion. $\square$

PROPOSITION 5.14

> $$\limsup_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\operatorname*{Sup}_{p\geq n} u_p\right) \quad \textit{et} \quad \liminf_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\operatorname*{Inf}_{p\geq n} u_p\right)$$

DÉMONSTRATION:

Puisque $\text{Inf}(u_n) = -\text{Sup}(-u_n)$ et $\liminf u_n = -\limsup(-u_n)$, il suffit de montrer l'une des deux égalités, par exemple la première. Posons $v_n = \operatorname*{Sup}_{p\geq n} u_p$.

- La suite $(v_n)_n$ est décroissante dans $\overline{\mathbb{R}}$, donc
  - ou bien $\forall n,\ v_n = +\infty$: alors $v_n \to +\infty$;
  - ou bien $\exists n_0 \mid \forall n \geq n_0,\ v_n \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$: dans ce cas,
    - soit les termes de v_n sont réels (pour $n \geq n_0$) et dans ce cas $(v_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante dans $\mathbb{R}$; alors ou bien elle est minorée et donc converge vers $l \in \mathbb{R}$, ou bien $v_n \to -\infty$;
    - sinon, $\exists n_1 \geq n_0 \mid \forall n \geq n_1,\ v_n = -\infty$, et alors $v_n \to -\infty$.

On a ainsi montré que $(v_n)_n$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$, vers $l = \text{Inf}\{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

- Par construction, pour tout n, $u_n \leq v_n$: donc si $u_{\varphi(n)} \to \limsup u_n$, alors en passant à la limite on obtient $\limsup u_n \leq l$.
- Il reste à montrer que $l \leq \limsup u_n$. Par définition de v_n,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists p \geq n \mid v_n - \varepsilon \leq u_p$$

en particulier avec $\varepsilon = \frac{1}{n}$, il existe $p = p_n$ tel que $v_n - \frac{1}{n} \leq u_{p_n}$. Cela permet de construire une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_n$ de $(u_n)_n$ de la façon suivante :

- posons $\varphi(0) = 0$;
- avec $n = \varphi(0) + 1$, on obtient un indice p qu'on note $\varphi(1)$;
- ...
- si on a construit $\varphi(k)$, on prend $n = \varphi(k)+1$ et on obtient un indice qu'on note $\varphi(k+1)$.

Par construction, on a $\forall k,\ \varphi(k+1) \geq \varphi(k) + 1 > \varphi(k)$, donc $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante et $(u_{\varphi(n)})_n$ est bien une sous-suite de $(u_n)_n$. De plus,

$$\forall k, \quad v_{\varphi(k)+1} - \frac{1}{\varphi(k)+1} \leq u_{\varphi(k+1)}$$

Or la suite $(u_{\varphi(n)})_n$ est dans $\overline{\mathbb{R}}$ compact, donc elle admet une sous-suite qui converge vers un $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$: en passant à la limite, on obtient $l \leq \lambda$. Or λ est aussi une valeur d'adhérence de $(u_n)_n$ donc $\lambda \leq \limsup u_n$, d'où la conclusion. $\square$

6 CONNEXITE

6.1 Espaces connexes

6.1.1 Définitions équivalentes

DÉFINITION-PROPRIÉTÉ

Un espace topologique X est dit **connexe**

$\iff$ *i*) il n'est *pas* réunion de deux ouverts non vides disjoints ;
$\iff$ *ii*) si A et B sont des ouverts de X tels que $X = A \sqcup B$, alors $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$;
$\iff$ *iii*) les seules parties à la fois ouvertes et fermées de X sont $\emptyset$ et X ;
$\iff$ *iv*) toute fonction continue sur X à valeurs dans $\{0; 1\}$ est constante ;
$\iff$ *v*) toute fonction continue sur X à valeurs dans un discret est constante.

DÉMONSTRATION:

• *ii*) est juste une reformulation de *i*).

• *ii*) équivaut à *iii*) : par contraposée,

X n'est pas connexe
$\iff$ il existe A, B ouverts non vides disjoints tels que $X = A \sqcup B$
$\iff$ il existe un ouvert A non vide, tel que $X \setminus A$ soit ouvert non vide
$\iff$ il existe un ouvert A non vide, tel que A soit aussi fermé et différent de X.

• *iii*) $\Longrightarrow$ *v*) : par contraposée, soit $f : X \to D$ continue, où D est un espace topologique discret, on suppose que f n'est pas constante. Alors f prend au moins deux valeurs $a \neq b$: en posant $A = f^{-1}(\{a\})$, on a $A \neq \emptyset$ et $A \subsetneq X$. De plus le singleton $\{a\}$ est fermé et ouvert dans D puisque *pour la topologie discrète* toute partie est ouverte et fermée, et f est continue : donc A est à la fois ouverte et fermée dans X. Ainsi X n'est pas connexe.

• *v*) $\Longrightarrow$ *iv*) car $\{0; 1\}$ est discret.

• *iv*) $\Longrightarrow$ *i*) : par contraposée, si X n'est pas connexe, il existe A, B ouverts non vides disjoints tels que $X = A \sqcup B$. Posons $f(x) = 1$ si $x \in A$ et $f(x) = 0$ si $x \in B$, alors f est bien définie car $A \cap B = \emptyset$, et définie sur tout X car $X = A \cup B$. De plus elle est à valeurs dans $\{0; 1\}$, non constante (car A et B sont non vides). Enfin, elle est continue, car la préimage de tout ouvert de $\{0; 1\}$ par f est un ouvert de X : en effet,

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \quad , \quad f^{-1}(\{0\}) = B \quad , \quad f^{-1}(\{1\}) = A \quad , \quad f^{-1}(\{0; 1\}) = X$$

sont des ouverts de X, et $\emptyset$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{0; 1\}$ sont les seuls ouverts de $\{0; 1\}$. □

REMARQUE : un espace connexe est un espace "en un seul morceau". La non-connexité est souvent plus facile à montrer que la connexité...

6.1.2 Exemples

- tout espace réduit à un point est connexe, $\emptyset$ est connexe
- $\mathbb{Z}$ n'est pas connexe : $\mathbb{Z} = \big(\mathbb{Z} \cap]-\infty; \frac{1}{2}[\big) \sqcup \big(\mathbb{Z} \cap]\frac{1}{2}; +\infty[\big)$.
- $\mathbb{Q}$ n'est pas connexe : $\mathbb{Q} = \big(\mathbb{Q} \cap]-\infty; \sqrt{2}[\big) \sqcup \big(\mathbb{Q} \cap]\sqrt{2}; +\infty[\big)$.

THÉORÈME 6.1

Le segment $[a; b]$ *est connexe.*

DÉMONSTRATION:

Supposons $[a;b] = A \sqcup B$, avec A, B des ouverts disjoints : alors $a \in A$ par exemple. On va montrer que nécessairement $B = \emptyset$, *i.e.* $A = [a;b]$. Si $a = b$, c'est vrai. On se place donc dans le cas $a < b$, et on pose

$$E = \{x \in [a;b] \mid [a;x] \subset A\}$$

Alors E est une partie non vide (car $a \in E$), bornée, de $\mathbb{R}$: donc $s := \mathrm{Sup}E$ est bien défini.

Comme $a \in A$ et que A est ouvert (dans $[a;b]$), A est un voisinage de a dans $[a;b]$: il existe $\varepsilon_a > 0$ tel que $(]a-\varepsilon_a; a+\varepsilon_a[\cap[a;b]) \subset A$ (et on peut supposer $a + \frac{\varepsilon_a}{2} \leq b$), donc $[a; a+\frac{\varepsilon_a}{2}] \subset A$. Donc $s \geq a + \frac{\varepsilon_a}{2} > a$.

Comme $s = \mathrm{Sup}E$, il existe une suite $(x_n)_n$ de points de E qui converge vers s : on a ainsi $[a;x_n] \subset A$ pour tout n, et donc $[a;s[\subset A$. Or A est fermé dans $[a;b]$, c'est-à-dire $A = F \cap [a;b]$ où F est un fermé de $\mathbb{R}$: A est donc aussi un fermé de $\mathbb{R}$ (comme intersection de deux fermés). Puisque (x_n) est une suite de points de A qui converge vers s, on obtient $s \in A$ et donc finalement $[a;s] \subset A$.

Or A est ouvert dans $[a;b]$, donc $\exists \varepsilon_s > 0$ tel que $(]s-\varepsilon_s; s+\varepsilon_s[\cap[a;b]) \subset A$ et donc $\left([a; s+\frac{\varepsilon_s}{2}] \cap [a;b]\right) \subset A$. Soit $m = \min(s+\frac{\varepsilon_s}{2}, b)$: $[a;m] \subset A$ *i.e.* $m \in E$. Donc $m \leq \mathrm{Sup}E = s$ et la seule possibilité est $m = b$. D'où $A = [a;b]$ et $B = \emptyset$. □

6.2 Pour montrer la connexité

6.2.1 Propriétés

PROPOSITION 6.1

Soit A une partie connexe de X, alors $\overline{A}$ est connexe. Plus généralement, si $A \subset B \subset \overline{A}$, alors B est connexe.

DÉMONSTRATION:

Soit A connexe et $A \subset B \subset \overline{A}$. Par l'absurde, si B n'est pas connexe, il peut s'écrire comme réunion de deux ouverts (de B) disjoints non vides. Il existe donc U et V ouverts de X tels que $B = (U \cap B) \sqcup (V \cap B)$, tels que $(U \cap B) \neq \emptyset$ et $(V \cap B) \neq \emptyset$. Comme $B \subset \overline{A}$, on a donc $(U \cap \overline{A}) \neq \emptyset$. Par définition de l'adhérence, cela implique $(U \cap A) \neq \emptyset$, et de même $(V \cap A) \neq \emptyset$. Donc $U \cap A$ et $V \cap A$ sont deux ouverts de A, non vides, disjoints car $(U \cap A) \subset (U \cap B)$, $(V \cap A) \subset (V \cap B)$ et $(U \cap B) \cap (V \cap B) = \emptyset$. De plus $A \subset B$, donc

$$A = A \cap B = A \cap ((U \cap B) \sqcup (V \cap B)) = (U \cap A) \sqcup (V \cap A)$$

et A n'est pas connexe, contradiction. □

PROPOSITION 6.2

Si les A_α sont des parties connexes de X telles que $\bigcap_\alpha A_\alpha \neq \emptyset$: alors $\bigcup_\alpha A_\alpha$ est connexe.

DÉMONSTRATION:

Soit $f : \bigcup_\alpha A_\alpha \to \{0;1\}$ continue. Alors pour tout α, $f_{|A_\alpha}$ est continue sur A_α connexe, à valeurs dans $\{0;1\}$, donc constante : $\exists \epsilon_\alpha \in \{0;1\} \mid \forall x \in A_\alpha,\ f(x) = \epsilon_\alpha$. Comme les A_α ont au moins un point commun $x_0 \in \bigcap_\alpha A_\alpha$, on a $\forall \alpha,\ f(x_0) = \epsilon_\alpha$ et donc ϵ_α ne dépend pas de α. Ainsi f est constante. □

THÉORÈME 6.2

Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles. En particulier, $\mathbb{R}$ est connexe.

DÉMONSTRATION:

• Montrons que tout intervalle est connexe : en effet, les segments sont connexes, et tout intervalle de $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme la réunion de segments ayant un point commun (par exemple, $]0;1[=\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[\frac{1}{n};1-\frac{1}{n}\right]$, $]-\infty;2]=\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}[-n;2]$,...).
• Montrons que si A est une partie connexe de $\mathbb{R}$, alors c'est un intervalle : si A est un singleton, c'est vrai. Sinon, soit $u,v\in A$ avec $u<v$, et $u<x<v$: alors $]-\infty;x[\cap A$ et $]x;+\infty[\ \cap A$ sont deux ouverts de A, disjoints, non vides (le premier contient u, le second contient v). Leur réunion n'est pas A entier puisque A est connexe : donc $(\mathbb{R}\setminus\{x\})\cap A$ est inclus strictement dans A *i.e.* $x\in A$. Ainsi tout x compris entre deux points de A est dans A : c'est la caractérisation d'un intervalle de $\mathbb{R}$. □

PROPOSITION 6.3 *Soit $f:X\to Y$ une application continue. Si X est connexe, alors $f(X)$ est une partie connexe de Y.*

DÉMONSTRATION:

Par l'absurde, si $f(X)=A\sqcup B$ avec A, B deux ouverts disjoints non vides de $f(X)$: il existe U, V, ouverts de Y tels que $A=U\cap f(X)$, $B=V\cap f(X)$. On a donc $f^{-1}(A)=f^{-1}(U)$ et de même $f^{-1}(B)=f^{-1}(V)$. Alors $f^{-1}(A)$ et $f^{-1}(B)$ sont des ouverts de X par continuité de f, disjoints car A et B le sont, d'union X puisque $A\cup B=f(X)$, non vides puisque A,B sont non vides et $A,B\subset f(X)$. Cela contredit la connexité de X. □

Théorème des valeurs intermédiaires

COROLLAIRE 6.1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f:I\to\mathbb{R}$ une fonction continue : alors $f(I)$ est un intervalle. Autrement dit, si f prend deux valeurs $\alpha<\beta$, elle prend toute valeur γ telle que $\alpha\le\gamma\le\beta$.*

DÉMONSTRATION:

I est connexe, f est continue donc $f(I)$ est un connexe de $\mathbb{R}$ c'est-à-dire un intervalle. □

Théorème de passage des douanes

COROLLAIRE 6.2 *Soit X un espace topologique, $A\subset X$, et $\gamma:[0;1]\to X$ continue telle que $\gamma(0)\in A$ et $\gamma(1)\notin A$. Alors $\exists\, t_0\in[0;1]\mid\gamma(t_0)\in\partial A$.*

DÉMONSTRATION:

On partitionne X : $X=\overset{\circ}{A}\sqcup\partial A\sqcup{}^c\overline{A}$, donc

$$[0;1]=\gamma^{-1}(\overset{\circ}{A})\sqcup\gamma^{-1}(\partial A)\sqcup\gamma^{-1}({}^c\overline{A})$$

où $\gamma^{-1}(\overset{\circ}{A})$ et $\gamma^{-1}({}^c\overline{A})$ sont des ouverts comme images réciproques par γ d'ouverts de X.
• Si 0 ou 1 est dans $\gamma^{-1}(\partial A)$, on peut prendre $t_0=0$ ou $t_0=1$.
• Sinon, $0\in\overset{\circ}{A}$ et $1\in{}^c\overline{A}$, qui sont donc des ouverts disjoints, non vides, de $[0;1]$ connexe. Donc leur réunion ne peut pas être $[0;1]$ tout entier : *i.e.* $\gamma^{-1}(\partial A)\neq\emptyset$. □

6.2.2 Une notion plus forte : la connexité par arcs

DÉFINITION

Un espace topologique X est **connexe par arcs** si pour tous $x,y\in X$, il existe une application continue $\gamma:[0;1]\to X$ avec $\gamma(0)=x$ et $\gamma(1)=y$.
Autrement dit, étant donnés deux points quelconques de X, on peut les relier par un chemin (continu !) *en restant dans X*.

Exemples :

- tout intervalle de $\mathbb{R}$ est connexe par arcs : en effet, si $x,y\in I$, on peut les relier en restant dans I par $\gamma(t)=(1-t)x+ty$ (alors $\gamma(\frac{1}{2})$ est le milieu du segment).

- l'image continue d'un connexe par arcs est connexe par arcs : en effet, si $f : X \to Y$ est continue et que X est connexe par arcs, alors pour tous $x, y \in f(X)$, on a $x = f(x_0)$ et $y = f(y_0)$ où $x_0, y_0 \in X$. Puisque X est connexe par arcs, il existe $\gamma : [0;1] \to X$ continue telle que $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma(y_0) = y_0$. Posons alors $\tilde{\gamma}(t) = f(\gamma(t))$: $\tilde{\gamma}$ est continue sur $[0;1]$, à valeurs dans $f(X)$ et $\tilde{\gamma}(0) = f(x_0) = x$, $\tilde{\gamma}(1) = f(y_0) = y$.

DÉFINITION-PROPRIÉTÉ

Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, une partie A est dite
– **convexe** si $\forall a, b \in A,\ [a;b] \subset A$
– **étoilée par rapport à** $x_0 \in A$ si $\forall a \in A,\ [x_0;a] \subset A$
où par définition, le **segment entre $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y \in E}$** est noté

$$[\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}] := \{(1-t)x + ty \mid t \in [0;1]\}$$

On a les implications suivantes :

$$\text{convexe} \Longrightarrow \text{étoilée} \Longrightarrow \text{connexe par arcs}$$

ATTENTION : on a besoin d'être dans un espace vectoriel pour pouvoir écrire $(1-t)x + ty$.

DÉMONSTRATION:

- Une partie convexe est en particulier étoilée par rapport à n'importe lequel de ses points.
- Si A est étoilée par rapport à x_0 : soit $a, b \in A$, posons

$$\gamma(t) = \left| \begin{array}{ll} (1-2t)a + 2tx_0 & \text{si } 0 \le t \le 1/2 \\ (1-(2t-1))x_0 + (2t-1)y_0 & \text{si } 1/2 \le t \le 1 \end{array} \right.$$

(on parcourt le segment $[a;x_0]$ pour $0 \le t \le 1/2$ puis le segment $[x_0;b]$ pour $1/2 < t \le 1$). On vérifie que $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$, que γ est continue notamment en $t = 1/2$. De plus $\gamma([0;1/2]) = [a;x_0]$ et $\gamma([1/2;1]) = [x_0;b]$ sont inclus dans A par hypothèse, donc γ est à valeurs dans A. □

COROLLAIRE 6.3 *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé :*
- *toute boule (ouverte ou fermée) est convexe, donc connexe par arcs ;*
- *si E est de dimension supérieure ou égale à deux,* $\left\{ \begin{array}{l} \forall x_0 \in E,\ E \setminus \{x_0\} \textit{ est connexe par arcs;} \\ \textit{toute sphère est connexe par arcs.} \end{array} \right.$

ATTENTION : si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1 : $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ n'est pas connexe par arcs et $S(0,1) = \{-1;1\}$ non plus.

DÉMONSTRATION:

- Soit $a, b \in B(x_0, r)$ et $x \in [a;b]$: $x = (1-t)a + tb$ avec $t \in [0;1]$ donc

$$\begin{array}{rcl} \|x - x_0\| & = & \|(1-t)a + tb - x_0\| = \|(1-t)a + tb - (1-t)x_0 - tx_0\| \\ & = & \|(1-t)(a - x_0) + t(b - x_0)\| \\ & \le & |1-t|\, \|a - x_0\| + |t|\, \|b - x_0\| \\ & < & (1-t)r + tr = r \text{ car } t \ge 0,\ 1-t \ge 0 \text{ et } a, b \in B(x_0, r) \end{array}$$

i.e. $x \in B(x_0, r)$. Donc $B(x_0, r)$ est convexe, et la preuve fonctionne de la même façon pour les boules fermées.
- On suppose ici que E est de dimension supérieure ou égale à deux.

- Soit $x_0 \in E$: alors $f : x \mapsto x = x + x_0$ est un homéomorphisme qui envoie 0 sur x_0, et $f(E \setminus \{0\}) = E \setminus \{x_0\}$, $f(S(0,r)) = S(x_0, r)$. Comme le caractère connexe par arcs est préservé par homéomorphisme, il suffit de montrer que $E \setminus \{0\}$ et $S(0,r)$ sont connexes par arcs.

- Comme de plus $S(0,r) = \{x \in E \mid \|x\| = r\} = g(E \setminus \{0\})$ où

$$g: \begin{array}{ccc} E \setminus \{0\} & \mapsto & E \\ x & \mapsto & r\,\frac{x}{\|x\|} \end{array}$$

est continue, et que l'image par une application continue d'un connexe par arcs est connexe par arcs, il suffit de montrer que $E \setminus \{0\}$ est connexe par arcs.
- Commençons par montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est connexe par arcs : en écriture complexe, deux point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ s'écrivent $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ avec $r_1, r_2 > 0$. On peut les relier en parcourant le chemin suivant :

∗ le segment $[z_1; e^{i\theta_1}]$: $(1-t)z_1 + te^{i\theta_1} = ((1-t)r_1 + t)e^{i\theta_1}$;
∗ puis l'arc de cercle entre $e^{i\theta_1}$ et $e^{i\theta_2}$: $e^{i((1-t)\theta_1 + t\theta_2)}$;
∗ puis le segment $[e^{i\theta_2}; z_2]$: $(1-t)e^{i\theta_2} + tz_2 = ((1-t) + tr_2)e^{i\theta_2}$,

ce qui donne bien un chemin continu entre z_1 et z_2 qui ne passe pas par 0, donc reste dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
REMARQUE : puisqu'on est dans $\mathbb{R}^2$ de dimension finie, la continuité du chemin ne dépend pas du choix de la norme.
- Soit $x, y \in E \setminus \{0\}$, et soit P un plan contenant 0, x et y : un tel plan existe puisque E est de dimension supérieure ou égale à deux (si x et y ne sont pas colinéaires, on prend $P = \mathrm{Vect}(x,y)$; sinon, on complète avec un vecteur e non colinéaire à x et y et on prend $P = \mathrm{Vect}(x,y,e)$). Alors $P \setminus \{0\}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, donc connexe par arcs. On peut donc relier x à y par un chemin continu restant dans $P \setminus \{0\}$, *a fortiori* dans $E \setminus \{0\}$. □

PROPOSITION 6.4

‖ *Tout connexe par arcs est connexe.*

En particulier, *dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé*, toute boule (ouverte ou fermée) est connexe, et en dimension supérieure ou égale à deux toute sphère est connexe.

ATTENTION : dans un espace métrique, les boules ne sont pas forcément connexes ; par exemple, dans $(\mathbb{Z}, |\cdot|)$, $B(0,2) = \{-1; 0; 1\}$.

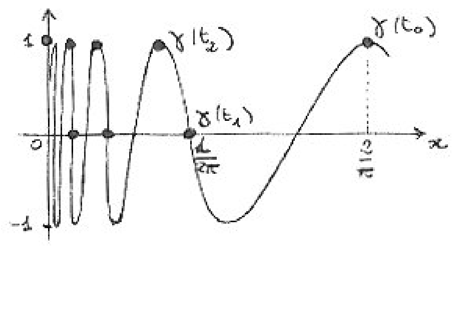
DÉMONSTRATION:

Si $X = \emptyset$, il est connexe par arcs et connexe. Si $X \neq \emptyset$ est connexe par arcs : $\exists x_0 \in X$, et puisque X est connexe par arcs,

$$X = \bigcup_{\substack{\gamma:[0;1]\to X \text{ continue} \\ \text{telle que } \gamma(0)=x_0}} \gamma([0;1])$$

(en effet, pour tout $x \in X$ il existe $\gamma : [0;1] \to X$ continue telle que $x_0 = \gamma(0)$ et $x = \gamma(1)$). Alors X est connexe comme réunion de connexes (images continues du connexe $[0;1]$) ayant un point commun (x_0). □

ATTENTION : la réciproque est fausse. Par exemple, considérons $\Gamma := \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \mid x \in]0;1]\}$ le graphe de la fonction $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$:



Alors Γ est connexe (et même connexe par arcs) comme image continue du connexe $]0;1]$ par la fonction continue $x \mapsto (x, \sin(\frac{1}{x}))$, donc $\overline{\Gamma}$ est connexe. Mais $\overline{\Gamma}$ n'est pas connexe par arcs (ce qui donne d'ailleurs un exemple de connexe par arcs dont l'adhérence n'est pas connexe par arcs) :

- $\overline{\Gamma} = \Gamma \cup I$, où $I = \{0\} \times [-1;1]$
  - Montrons que $\overline{\Gamma} \subset (\Gamma \cup I)$:
    Soit $(a,b) \in \overline{\Gamma}$: il existe donc une suite de points $(a_n, b_n) \in \Gamma$ telle que $(a_n, b_n) \to (a,b)$, *i.e.* $a_n \to a$ et $b_n \to b$. Or

    $$\begin{cases} \forall n,\ a_n > 0 \text{ donc } a = \lim a_n \geq 0 \\ \forall n,\ b_n = \sin(\frac{1}{a_n}) \in [-1;1] \text{ donc } b = \lim b_n \text{ vérifie } -1 \leq b \leq 1 \end{cases}$$

    * si $a = 0$: alors $(a,b) = (0,b)$ avec $-1 \leq b \leq 1$ donc $(a,b) \in I$
    * si $a > 0$: alors $\frac{1}{a_n} \to \frac{1}{a}$ donc $b_n = \sin(\frac{1}{a_n}) \to \sin(\frac{1}{a})$ (par continuité de $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ sur $\mathbb{R}^*$). Par unicité de la limite, $b = \sin(\frac{1}{a})$ et donc $(a,b) \in \Gamma$.

    Donc dans tous les cas, $(a,b) \in \Gamma \cup I$.
  - Montrons que $(\Gamma \cup I) \subset \overline{\Gamma}$ Puisque $\Gamma \subset \overline{\Gamma}$ par définition de l'adhérence, il reste à montrer que $I \subset \overline{\Gamma}$. Soit $(0,b) \in I$ (*i.e.* $b \in [-1;1]$). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

    $$a_n = \frac{1}{\text{Arcsin} b + 2n\pi} \quad \text{et} \quad b_n = b$$

    Alors $a_n \in]0;1]$ et $\sin(\frac{1}{a_n}) = b_n$, donc $(a_n, b_n) \in \Gamma$, et $a_n \to 0$, $b_n \to b$ donc $(a_n, b_n) \to (0,b)$. Ainsi $(0,b) \in \overline{\Gamma}$.
- $\overline{\Gamma}$ n'est pas connexe par arcs
  Comme Γ et I sont connexes par arcs, le problème vient du fait qu'on ne peut pas relier un point de Γ à un point de I. Supposons par l'absurde que $\overline{\Gamma}$ est connexe par arcs : en particulier, il existe un chemin (continu) dans $\overline{\Gamma}$ qui relie $(\frac{2}{\pi}, 1) \in \Gamma$ à $(0,1) \in I$, *i.e.* une fonction $\gamma : [0;1] \to \overline{\Gamma}$ continue telle que $\gamma(0) = (\frac{2}{\pi}, 1)$ et $\gamma(1) = (0,1)$.
  - Soit $\tau := \text{Inf}\{t \mid \gamma(t) \notin \Gamma\}$: autrement dit, $\tau := \text{Inf}\{t \mid \gamma(t) \in I\} = \text{Inf}\, \gamma^{-1}(I)$. Comme I est fermé dans $\mathbb{R}^2$ et que γ est continue, $\gamma^{-1}(I)$ est fermé, donc $\tau \in \gamma^{-1}(I)$ *i.e.* $\gamma(\tau) \in I$. De plus, $\tau > 0$ puisque $\gamma(0) \in \Gamma$.
    Avec $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, les fonctions x et y sont continues et $x(\tau) = 0$ (car $\gamma(\tau) \in I$).
  - Posons $t_0 = 0$: $x(t_0) = \frac{2}{\pi}$ et $y(t_0) = 1$. On construit ensuite par itération une suite $(t_n)_n$:
    * $t \mapsto x(t)$ est continue et $x(\tau) = 0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_1 \in]t_0; \tau[$ tel que $x(t_1) = \frac{1}{2\pi}$. Comme $t_1 < \tau$, on a $\gamma(t_1) \in \Gamma$ et par conséquent $y(t_1) = \sin\left(\frac{1}{x(t_1)}\right) = 0$.
    * de même, il existe $t_2 \in]t_1; \tau[$ tel que $x(t_2) = \frac{1}{2\pi + \pi/2}$. Comme $t_2 < \tau$, on a $\gamma(t_2) \in \Gamma$ et donc $y(t_2) = \sin\left(\frac{1}{x(t_2)}\right) = 1$.

    On construit ainsi une suite $(t_n)_n$ strictement croissante dans $[0; \tau[$, telle que

    $$x(t_{2p+1}) = \frac{1}{(2p+1)\pi} \ , \ y(t_{2p+1}) = 0$$

    $$x(t_{2p+2}) = \frac{1}{(2p+2)\pi + \pi/2} \ , \ y(t_{2p+2}) = 1$$

  - Puisque $(t_n)_n$ est croissante et majorée, elle converge vers $l \leq \tau$, et par continuité il vient $y(t_n) \to y(l)$. Or la suite $(y(t_n))_n$ a deux valeurs d'adhérence, donc elle diverge : contradiction.

6.3 Composantes connexes

6.3.1 Définition

Quand l'espace X n'est pas connexe, on peut toujours le "découper en morceaux" connexes disjoints : $X = \bigsqcup_{x \in X} \{x\}$ mais on souhaite optimiser le nombre de "morceaux" !

DÉFINITION-PROPRIÉTÉ

Soit X un espace topologique et $x \in X$:
- la **composante connexe de x dans X** est la réunion de toutes les parties connexes de X contenant x ;
- c'est la plus grande partie connexe de X contenant x ;
- c'est un fermé de X.

DÉMONSTRATION:

• La composante connexe C_x de x dans X est une réunion de connexes ayant un point commun, donc C_x est connexe (et $x \in C_x$). De plus, si $x \in C$ connexe, alors $C \subset C_x$.
• Comme C_x est connexe, $\overline{C_x}$ aussi, et $x \in \overline{C_x}$: donc $\overline{C_x} \subset C_x$. Puisque par définition $C_x \subset \overline{C_x}$, on a $C_x = \overline{C_x}$. □

Si la composante connexe C_x de x rencontre la composante connexe C_y de y, alors $C_x \cup C_y$ est connexe (c'est la réunion de deux connexes ayant un point commun) et contient x et y : donc $C_x = C_x \cup C_y = C_y$. D'autre part, tout $x \in X$ est dans une composante connexe (la sienne : C_x).

Ainsi les composantes connexes de X forment une partition de X : ce sont en fait les classes d'équivalence pour la relation d'équivalence

$$x\mathcal{R}y \iff \text{il existe une partie connexe de } X \text{ contenant } x \text{ et } y$$

PROPOSITION 6.5

Soit A une partie connexe de X, $A \neq \emptyset$: si A est à la fois ouverte et fermée dans X, c'est une composante connexe de X.

DÉMONSTRATION:

Comme A est non vide, $\exists x \in A$. Alors, puisque A est une partie connexe de X, A est inclus dans la composante connexe C_x. Or $C_x = A \sqcup (C_x \setminus A)$ où
- $A = A \cap C_x$ est un ouvert de C_x car A est un ouvert de X ;
- $C_x \setminus A = {}^cA \cap C_x$ est aussi un ouvert de C_x car ${}^cA$ est un ouvert de X.

Puisque C_x est connexe cela implique ou bien $A = \emptyset$, ce qui est exclu, ou bien $C_x \setminus A = \emptyset$ *i.e.* $A = C_x$. □

Exemples :
- un connexe (non vide) n'a qu'une seule composante connexe, lui-même.
- $\mathbb{R}^*$ a deux composantes connexes : $]-\infty, 0[$ et $]0; +\infty[$.
- la réunion des deux axes dans $\mathbb{R}^2$, privée de l'origine, a quatre composantes connexes :

$$]-\infty; 0[\times\{0\} \quad , \quad]0; +\infty[\times\{0\} \quad , \quad \{0\}\times]-\infty; 0[\quad , \quad \{0\}\times]0; +\infty[$$

- dans $\mathbb{Z}$, les composantes connexes sont les singletons.

6.3.2 Applications

PROPOSITION 6.6

Une fonction continue à valeurs dans un discret est constante sur chaque composante connexe.

DÉMONSTRATION:

Par définition, dans Y espace topologique discret, les singletons sont à la fois ouverts et fermés, et comme ils sont connexes, ce sont les composantes connexes de Y. Si $f : X \to Y$ est continue et si C est une composante connexe de X, alors $f(C)$ est un connexe de Y donc est inclus dans un singleton : ainsi $f_{|C}$ est constante. □

PROPOSITION 6.7

Soit $f : X \to Y$ un homéomorphisme entre deux espaces topologiques, alors f permute les composantes connexes de X et de Y. En particulier, deux espaces homéomorphes ont le même nombre de composantes connexes.

DÉMONSTRATION:

Soit $x \in X$, C_x sa composante connexe dans X : son image par f continue est un connexe de Y contenant $f(x)$, donc $f(C_x) \subset C'_{f(x)}$, où $C'_{f(x)}$ est la composante connexe de $f(x)$ dans Y.

De plus, $f : X \to Y$ est bijective et f^{-1} est continue, donc $f^{-1}(C'_{f(x)})$ est un connexe contenant $f^{-1}(f(x)) = x$, donc $f^{-1}(C'_{f(x)}) \subset C_x$ ce qui donne $C'_{f(x)} \subset f(C_x)$. Finalement, $f(C_x) = C'_{f(x)}$.

Enfin, comme $f : X \to Y$ est surjective : $\forall y \in Y,\ \exists x \in X \mid y = f(x)$ et donc $C'_y = f(C_x)$, ainsi aucune composante connexe n'est "oubliée" par f. $\square$

Par exemple, si $f : \mathbb{R}^* \times \{0\} \to \{0\} \times \mathbb{R}^*$, alors en notant $C_- =]-\infty; 0[\times\{0\}$, $C_+ =]0; +\infty[\times\{0\}$ et $C'_- = \{0\}\times]-\infty; 0[$, $C'_+ = \{0\}\times]0; +\infty[$:

- ou bien $f(C_-) = C'_-$ et $f(C_+) = C'_+$;
- ou bien $f(C_-) = C'_+$ et $f(C_+) = C'_-$.

ATTENTION : c'est faux si f est seulement supposée continue, même si elle est surjective (par exemple, si $X =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ et $Y = [0; +\infty[$, avec $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$).

Ce critère permet de montrer que deux espaces ne sont pas homéomorphes. Par exemple, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$ ne sont pas homéomorphes, $[0; 1[$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas homéomorphes...