Corrigé L3 Topologie Juin 2008

Responsable Patrick Delorme, Juin 2008

Durée 3 h, Documents et calculettes non autorisés. Sujet de 2 pages

NB: Dans chaque exercice on pourra admettre les résultats de questions pour continuer, en signalant les résultats admis.

I 1) Donner la définition de l'intérieur, noté ici $IntA$, d'une partie A , d'un espace métrique (E, d).

2) Soit A, B des parties de E. Montrer à l' aide de 1) que si $x \in Int(A \cap B)$, on a $x \in (IntA) \cap (IntB)$.

3) Soit $x \in (IntA) \cap (IntB)$. Montrer à l'aide de 1) qu' il existe une boule ouverte de centre x contenue à la fois dans A et dans B. En déduire que $(IntA) \cap (IntB) \subset Int(A \cap B)$.

4) En déduire $(IntA) \cap (IntB) = Int(A \cap B)$.

Corrigé de I

1) $x \in IntA$ si et seulement si il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte de rayon $r > 0$ et de centre x, $B(x, r)$ est contenue dans A.

2) Si $x \in Int(A \cap B)$ et si la boule ouverte de rayon $r > 0$ et de centre x, $B(x, r)$ est contenue dans $A \cap B$, elle est contenue dans A et dans B. Donc $x \in IntA \cap IntB$.

3) Maintenant si $x \in IntA \cap IntB$, soit $r > 0$ tel que la boule ouverte de rayon r et de centre x, $B(x, r)$ est contenue dans A et soit $r' > 0$ tel que la boule ouverte de rayon r' et de centre x, $B(x, r')$ est contenue dans B. Alors soit $r'' = Inf(r, r')$. Alors la boule ouverte de rayon r'' et de centre x, $B(x, r'')$ est contenue dans $a \cap B$ et donc $x \in Int(A \cap B)$. 4) La double inclusion que l'on vient de montrer implique $(IntA) \cap (IntB) = Int(A \cap B)$.

II Soit (E, d) un espace métrique. Soit f, g deux applications continues de E dans $\mathbb{R}$.

1) Montrer que $A := \{x \in E | f(x) = g(x)\}$ est fermé dans E.

2) Montrer que $B := \{x \in E | f(x) > g(x)\}$ est ouvert dans E.

Corrigé de II 1) Considérons l'application $h := f - g$ de E dans $\mathbb{R}$. Elle est continue comme combinaison linéaire de fonctions continues. Alors $A = h^{-1}(\{0\}), B = h^{-1}(] - \infty, 0[)$. Alors A est fermé comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue h et B est ouvert comme image réciproque de l'intervalle ouvert (donc ouvert) $] - \infty, 0[$.

III 1) Donner la définition d'une partie compacte d'un espace métrique.

2) Donner la caractérisation des fermés à l'aide des suites.

3) Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$. On définit $A + B := \{a + b | a \in A, b \in B\}$. On suppose A compact et B fermé. En utilisant 1) et 2) montrer que si A est compact et B est fermé alors $A + B$ est fermé.

Corrigé de III

1), 2) voir cours.

3) Soit x_n une suite de $A + B$ qui converge vers $x \in E$. Montrons que $x \in A + B$. Comme $x_n \in A + B$, il existe $a_n \in A$, $b_n \in B$ tel que $x_n = a_n + b_n$. Comme A est compact, il existe une sous-suite de (a_n), $(a_{\varphi(n)})$ qui converge vers un élément a de A. Alors comme $b_{\varphi(n)} = x_{\varphi(n)} - a_{\varphi(n)}$ et comme la suite $(x_{\varphi(n)})$ converge vers x comme sous-suite de (x_n), la suite $(b_{\varphi(n)})$ converge vers $x - a$. Par ailleurs la suite $(b_{\varphi(n)})$ étant une suite dans le fermé B, sa limite est un élément b de B. Donc $x - a = b$ puis $x = a + b$ avec $a \in A$ et $\mathfrak{b} \in B$. D'où $x \in A + B$ comme désiré.

IV On note $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et pour $f \in E$ on définit $\|f\| := Sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$.

1) Montrer que $f \mapsto \|f\|$ définit une norme sur E.

2) Si $f \in E$ on définit une application $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ par:

$$g(x) = 1/2 \int_0^1 sin(x^2 + t^2) f(t) dt.$$

On admettra que g est continue, c'est à dire que $g \in E$. On notera $T(f)$ cet élément de E.

Montrer que T est une application linéaire de E dans E.

3) En majorant $|g(x)|$, trouver une constante $C \geq 0$ telle que, pour tout $f \in E$.

$$\|T(f)\| \leq C\|f\|.$$

4) En déduire que T est une application linéaire continue, en rappelant d'abord une caractérisation des applications linéaires continues.

5) Montrer qu'on peut prendre $C = 1/2$.

6) En déduire que $T(f) = f$ implique $f = 0$.

Corrigé de IV

1) Soit $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Clairement $\|f\|$ est nul si et seulement si f est identiquement nulle, c'est à diresi $f = 0$.

Soit $t \in [0, 1]$. Alors:

$$|(f + g)(t)| \leq |f(t)| + |g(t)| \leq \|f\| + \|g\|$$

D'où, par passage au sup sur $t \in [0, 1]$:

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

L'égalité $|(\lambda f)(t)| = |\lambda||f(t)|$ implique:

$$\|\lambda f\| = |\lambda|\|f\|$$

Ceci achève de prouver que $\|.\|$ est une norme sur E;

2) Soit $f_1, f_2 \in E$, $\lambda \in R$ et $x \in [0,1]$. La linéarité de l'intégrale permet de voir que(écrire les calculs) que:

$$(T(f_1+f_2))(x) = (T(f_1))(x) + (T(f_2))(x), (T(\lambda f_1))(x) = \lambda (T(f_1))(x).$$

D'où les égalités

$$T(f_1+f_2) = T(f_1) + T(f_2), T(\lambda f_1) = \lambda T(f_1).$$

qui montrent que T est linéaire.

3) Soit $f \in E$, $g = T(f)$ et $x \in [0,1]$. On a:

$$|g(x)| \leq 1/2 \int_0^1 |sin(x^2+t^2)||f(t)|dt$$

En utilisant $|sin(x^2+t^2)| \leq 1$ et $|f(t)| \leq \|f\|$, on en déduit:

$$|g(x)| \leq 1/2 \int_0^1 \|f\|dt = 1/2\|f\|.$$

Par passage au Sup sur $x \in [0,1]$, on en déduit:

$$\|g\| \leq 1/2\|f\|.$$

Donc T est linéaire continue et l'on a résolu aussi 4).

5) Si $T(f) = f$, alors $\|f\| \leq 1/2\|f\|$ ce qui n'est possible que si $\|f\|$ est nul, c'est à dire si $f = 0$.