Corrigé Topologie, 01 09

Responsable Patrick Delorme

I
1) Soit (E,d) un espace métrique non vide et $a \in E$. Montrer que l'application $f : E \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in E, f(x) = d(a,x)$, est continue en tout point de E.
2) On suppose E connexe. Que peut on dire de l'image de E par f, $f(E)$. Citer les théorèmes utilisés.
3)a) Rappeler la définition d'un ensemble dénombrable.
b) $\mathbb{R}$ est il dénombrable? (répondre par oui ou par non: on ne demande pas de justifier). Quels sont les intervalles de $\mathbb{R}$ qui sont dénombrables? (donner la réponse: on ne demande pas de justification).
4) Déduire des questions précédentes que si (E,d) est un espace métrique connexe non vide et dénombrable, il est réduit à un singleton. On admettra que l'image d'un ensemble dénombrable par une application est encore dénombrable.

Corrigé de I:
1) Soit $x_0, x \in E$. On a par l'inégalité triangulaire appliquée 2 fois (en levant la valeur absolue):

$$|d(a,x) - d(a,x_0)| \leq d(x,x_0)$$

Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in E, d(x,x_0) < \varepsilon \ implique \ > |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

2) L'image d'un connexe par une application continue est un connexe. Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles. Donc $f(E)$ est un intervalle.
3) a) Un ensemble dénombrable est un ensemble qui peut être mis en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$. En fait si un ensemble est dénombrable, il est soit fini, soit on peut le mettre en bijection avec $\mathbb{N}$.
b) Les intervalles dénombrables de $\mathbb{R}$ sont l'ensemble vide et les intervalles réduits à un point.
4) L'image de E est un intervalle (cf. 1) non vide et dénombrable, donc réduit à un point (cf. 3 b)). Donc f est constante.

II
1) Soit f, g deux fonctions continues, à valeurs réelles, sur un espace métrique (E,d). On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n := \{x \in E | nf(x) + g(x) \leq 0\}$. Montrer que F_n est fermé.
2) a) On suppose dans la suite que:
$\forall x \in E, f(x) \geq 0$.
Montrer que $F_{n+1} \subset F_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) On suppose en outre que E est compact et que tous les F_n sont non vides. Montrer, en utilisant la compacité de E et 1), qu'il existe $l \in E$ qui appartient à tous les F_n.
c) Montrer que $f(l) = 0$.

Corrigé de II
1) Soit $g_n = nf + g$. C'est une application continue de E dans $\mathbb{R}$ et $F_n = g_n^{-1}(]-\infty, 0])$. Donc F_n est l'image réciproque d'un fermé de $\mathbb{R}$ par l'application continue g_n. C'est donc un fermé de E.
2) a) Soit $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}$. Si $f(x) \geq 0$, $(n+1)f(x) \geq nf(x)$ donc $(n+1)f(x) + g(x) \geq nf(x) + g(x)$. Donc si $nf(x) + g(x) \geq 0$, on a $(n+1)f(x) + g(x) \geq 0$. Donc $F_{n+1} \subset F_n$ si f est positive.
b) Comme les F_n sont non vides pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut choisir $x_n \in F_n$. D'après 2), on a:

$$\text{Pour tout } n \geq p,\ x_n \in F_p\ . \tag{0.1}$$

Maintenant, comme E est compact, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite qui converge vers $l \in E$. Soit $p \in \mathbb{N}$. d'après (0.1), (x_n) , de même que ses sous suites, est , à partir d'un certain rang, élément du fermé F_p. Donc la limite de la sous-suite, l, est élément de F_p, pour tout $p \in N$. C'est un élément de tous les F_p, $p \in \mathbb{N}$.
c) Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, nf(l) \leq -g(l)$$

Comme $f(l) \geq 0$, ceci n'est possible que si $f(l) = 0$.

III
Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ i.e. $E = C([0, 1], \mathbb{R})$.
1) Rappeler la définition de la norme $\|.\|_\infty$ sur E.
Soit g une fonction continue sur $[-1, 1]$. On remarque que si $t, s \in [0, 1]$, $t - s \in [-1, 1]$.
On pose pour $f \in E$:

$$T(f)(t) = \int_0^1 f(s)g(t-s)ds, t \in [0, 1]$$

1) On admet que $T(f)$ est continue sur $[0, 1]$, i.e. $T(f) \in E$. Montrer que T est une application linéaire continue de E dans E muni de la norme $\|.\|_\infty$.
2) Utiliser l'uniforme continuité de g sur $[-1, 1]$, pour prouver que pour tout $f \in E$, $T(f)$ est continue sur $[0, 1]$.

Corrigé de III 1) $\|f\|_\infty = Sup_{t\in[0,1]}|f(t)|$.
2) Soient $f_1, f_2 \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$. La linéarité de l'intégrale permet de voir (écrire les détails):

$$\forall t \in [0, 1], T(f_1 + f_2)(t) = T(f_1)(t) + T(f_2)(t), T(\lambda f_1)(t) = \lambda T(f_1)(t)$$

Donc T est une application linéaire de E dans E puisque l'on a admis que $T(f) \in E$ pour $f \in E$.
Soit $f \in E$.Majorons$|T(f)(t)|$

$$|T(f)(t)| \leq \int_0^1 |f(s)g(t-s)|ds, t \in [0, 1]$$

On majore $|f(t)|$ par $\|f\|_\infty$ et $g(t-s)$ par le maximum, C, de la fonction $|g|g$ sur $[-1,1]$. On conclut que:

$$|T(f)(t)| \leq C\|f\|_\infty, t \in [0,1].$$

Et par passage au Sup sur $t \in [0,1]$, on en déduit que

$$\forall f \in E, \|T(f)\|_\infty \leq C\|f\|_\infty$$

IV Soit $A = \{\frac{1}{n+1} | n \in \mathbb{N}\}$.
1) A est-il ouvert dans $\mathbb{R}$, A est-il fermé dans $\mathbb{R}$? : faire un dessin et justifier les réponses.
2) Déterminer l'intérieur et l'adhérence de A dans $\mathbb{R}$. On justifiera les réponses éventuellement par un

Corrigé de IV
1) A n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$: la suite $(x_n) = (\frac{1}{n+1})$ est une suite de A qui tend vers 0 qui n'appartient pas à A.
2) L'intérieur de A est vide (il n'existe aucun intervalle ouvert non vide contenu dans A). L'adhérence de A est égale à $A \cup \{0\}$.