Université de la Méditerranée
Faculté des Sciences de Luminy
Licence Semestre 5, année 2006-2007
Anne Pichon

PROGRAMME DU COURS DE TOPOLOGIE

1. **Espaces topologiques : les notions de base**
   - Topologie sur un ensemble, ouverts. Topologie grossière, discrète, topologie induite.
   - Un cas particulier : les espaces métriques. Exemples, espaces vectoriels normés, espaces euclidiens. Boules ouvertes, boules fermées, partie bornée, diamètre. Comparaison de distances.
   - Base d'une topologie. Exemple : les boules ouvertes dans un métrique
2. **Notions usuelles dans les espaces topologiques**
   - Voisinage, espace séparé, fermé, point adhérent, adhérence, intérieur, frontière.
   - Applications continues, ouvertes, fermées, homéomorphismes.
   - Suites dans les espaces topologiques : valeur d'adhérence, convergence
3. **Construction de topologies**
   - Topologie produit
   - Topologie quotient
4. **Applications linéaires continues**
5. **Espaces compacts**
   - Définition par la propriété de Borel-Lebesgue
   - Théorème de Heine : les compacts de $\mathbb{R}^n$
   - Compact dans un métrique : caractérisation pas les suites. Compacité et uniforme continuité.

- Compacité et homéomorphisme.
- Espace localement compact ; Compactifié d'Alexandroff.

6. Connexité

- Connexité, connexité par arcs
- Composantes connexes

7. Espaces métriques complets

- Suites de Cauchy, espaces complets
- Applications contractantes
- Théorème du point fixe

Bibliographie

Il existe de nombreux ouvrages présentant des cours de topologie de grande qualité et/ou des collections d'exercices. En voici une petite liste, loin d'être exhaustive.

- E. Burroni et J. Penon, *La géométrie du caoutchouc*, Ellipses, 2000.

- G. Christol, A. Cot et C. Marles, *Topologie*, Ellipses, 1997.

- G. Skandalis, Topologie et analyse 3ème année, Dunod, 2004.

- J. Dieudonné, *Éléments d'analyse*, tome I et premier chapitre du tome II, Gauthier-Villars, Paris, 1968.

- J. Dixmier, *Topologie générale*, Presses Universitaires de France, 1981

- L. Schwartz, *Analyse*, tome I, Hermann, Paris, 1993.

Information intéressante...

Tout examen concernant ce cours, qu'il soit écrit ou oral, comprendra une question de cours, tirée de la liste suivante.

1. Adhérence, intérieur, frontière : définitions et exemples
2. Adhérence dans un espace métrique : caractérisation en termes de suites (avec démonstration).
3. Les normes usuelles sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et leurs propriétés
4. Espaces compacts : définition, exemples, théorème de Bolzano-Weierstrass (énoncé, sans démonstration)
5. Le théorème de Heine : énoncé et démonstration
6. Image d'un compact par une application continue : énoncé, démonstration, conséquences.
7. Espaces compacts et continuité uniforme : définitions, énoncés, exemples
8. Espaces métriques complets : définition, propriétés, exemples
9. Le théorème du point fixe : énoncé, démonstration et exemples d'utilisation.
10. Norme d'une application linéaire continue ; définition, exemples.
11. Espaces connexes, composantes connexes : définitions, propriétés, exemples
12. Espaces connexes, connexes par arcs : définitions, exemples.

1 Espaces topologiques

1.1 Espaces topologiques

Définition 1.1 *Soit E un ensemble et soit $\mathcal{T}$ un ensemble de parties de E. On dit que $\mathcal{T}$ est une topologie sur E si*

(T1) *$\emptyset$ et E appartiennent à $\mathcal{T}$*

(T2) *Toute réunion d'éléments de $\mathcal{T}$ appartient à $\mathcal{T}$*

(T3) *Toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{T}$ appartient à $\mathcal{T}$*

On dit alors que le couple $(E, \mathcal{T})$ est un espace topologique. Un élément de $\mathcal{T}$ s'appelle un ouvert de la topologie.

Exemples.

- Si E est un ensemble quelconque, on peut le munir de :
  - la topologie grossière $\mathcal{T} = \{\emptyset, E\}$
  - la topologie discrète $\mathcal{T} = \mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties de E.
- Si $(E, \mathcal{T})$ est un espace topologique et si F est un sous-ensemble de E, alors on peut définir sur F la topologie induite par $\mathcal{T}$: ses ouverts sont les intersections de F avec les ouverts de $\mathcal{T}$. On dit alors que F est un sous-espace topologique de E.

1.2 Un exemple fondamental : les espaces métriques

Définition 1.2 *Soit E un ensemble. Une distance sur E est une application $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant*

(d1) $\forall x, y \in E,\ d(x,y) = d(y,x)$ *(d est symétrique)*

(d2) $\forall x, y \in E,\ d(x,y) = 0$ *ssi* $x = y$

(d3) $\forall x, y, z \in E,\ d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ *(inégalité triangulaire)*

On dit alors que (E, d) est un espace métrique

Exemples.

- $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni de la valeur absolue ou du module $(x, y) \mapsto |\ x - y\ |$
- $\mathbb{R}^n$ muni de la distance euclidienne d_2, de d_1, de d_∞
- Un espace vectoriel normé (e.v.n.) est un couple (E, N) où E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et où N est une norme sur E *i.e.* une application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant :

  (N1) $\forall x \in E,\ N(x) = 0$ ssi $x = 0$

  (N2) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (homogénéité)

  (N3) $\forall x, y \in E,\ N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire)

  Un e.v.n. (E, N) est en particulier un espace métrique muni de la distance $d(x, y) = N(x - y)$

Définition 1.3 *Pour $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}^{*+}$, on définit la boule ouverte de centre a et de rayon r par $B(a, r) = \{x \in E, d(a, x) < r\}$.*
L'ensemble $B_f(a, r) = \{x \in E, d(a, x) \leq r\}$ s'appelle la boule fermée de centre a et de rayon r, et $S(a, r) = \{x \in E, d(a, x) = r\}$ la sphère de centre a et de rayon r.
Un sous-ensemble d'un espace métrique est dit borné s'il est contenu dans une boule.

Proposition 1.4 *Si (E, d) est un espace métrique, alors on définit une topologie $\mathcal{T}_d$ sur E par : U est un ouvert de $\mathcal{T}_d$ si et seulement si pour tout point x de U, il existe une boule ouverte centrée en x contenue dans U.*

Définition 1.5 *On dit que $\mathcal{T}_d$ est la topologie associée à la métrique d.*

Définition 1.6 *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique. Une partie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{T}$ est une base de la topologie $\mathcal{T}$ si tout élément de $\mathcal{T}$ est réunion d'éléments de $\mathcal{B}$.*

Proposition 1.7 *Dans un espace métrique (E, d), les boules ouvertes forment une base pour la topologie $\mathcal{T}_d$.*

Définition 1.8 *Un espace topologique $(E, \mathcal{T})$ est dit métrisable s'il existe une distance d sur E telle que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.*

Définition 1.9 *Un espace topologique $(E, \mathcal{T})$ est dit séparé si pour tout couple de points distincts x, y de E, il existe un ouvert O_x contenant x et un ouvert O_y contenant y tels que $O_x \cap O_y = \emptyset$.*

Proposition 1.10 *Tout espace topologique métrisable est séparé.*

Définition 1.11 *Soit E un ensemble muni de deux distances d et δ. On dit que d et δ sont équivalentes s'il existe deux réels $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que*

$$\forall x, y \in E, \alpha\ d(x,y) \leq \delta(x,y) \leq \beta\ d(x,y)$$

Deux normes $||.||_1$ et $||.||_2$ définies sur un espace vectoriel E sont dites équivalentes si les distances associées le sont.

Proposition 1.12 *Si d et δ sont équivalentes, alors $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_\delta$.*

Théorème 1.13 *Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Exercices

1. a) Le couple $(\mathbb{Z}, \mathcal{T})$ où

   $$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{2,3,-4\}, \{1,2,3,-4\}, \mathbb{Z}\}$$

   est-il un espace topologique ?

   b) Même question avec

   $$\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{n\mathbb{Z}\}_{n\in\mathbb{N}}$$

2. Quelles sont les différentes topologies pouvant être définies sur un ensemble à 2 éléments ? À trois éléments ?

3. Quelles sont les différentes topologies pouvant être définies sur un ensemble à 2 éléments ? À trois éléments ?

4. * Notons $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ l'espace des polynômes à n variables. Si $P_1, \ldots, P_r$ sont des éléments de $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$, on note $V(P_1, \ldots, P_r)$ l'ensemble des points $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tels que

   $$\forall i \in \{1, \ldots, r\},\ P_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

   a) Lorsque $n = 2$, dessiner $V(X_1)$, $V(X_1X_2)$, $V(X_1^2 + X_2^2 - 1)$.

   b) Notons $\mathcal{T}_\mathcal{Z}$ l'ensemble des réunions de sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ de la forme $\mathbb{R}^n \setminus V(P_1, \ldots, P_r)$, où $P_1, \ldots, P_r$ désigne une famille finie quelconque d'éléments de $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$. Démontrer que $\mathcal{T}_\mathcal{Z}$ définit une topologie sur $\mathbb{R}^n$.

   c) Décrire $\mathcal{T}_\mathcal{Z}$ pour $n = 1$.

5. Soit $\Phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ un produit scalaire sur un espace vectoriel E. Démontrer que
$$x, y \in E, \quad |\Phi(x,y)| \leq ||x||||y||$$

6. a) Vérifier que d_1, d_2 et d_∞ définissent bien des distances sur $\mathbb{R}^n$.

   b) Dessiner la boule B(0,1) (dite <u>boule unité</u>) de $\mathbb{R}^2$ pour chacune des distances d_1, d_2 et d_∞.

   c) Démontrer que d_1, d_2 et d_∞ sont des distances équivalentes

7. Soit E un ensemble muni de deux distances d et d'. Soient T et T' les topologies associs à T et T' respectivement. Démontrer que T est incluse dans T' si et seulement si pour toute boule ouverte $B^d(x,r)$ pour la distance d, il existe $r' > 0$ tel que la boule $B^{d'}(x,r') \subset B^d(x,r)$.

8. Démontrer que $\delta(x,y) = |x^3 - y^3|$ définit une distance sur $\mathbb{R}$. Démontrer que $\mathcal{T}_\delta$ est la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ (ı.e. induite par $d(x,y) = |x-y|$), mais que d et δ ne sont pas équivalentes.

9. a) Soit (E,d) un espace métrique. Pour $x, y \in E$, on pose
$$d'(x,y) = \inf(1, d(x,y))$$
   Vérifier que d' est une distance sur E. Montrer que pour cette distance, E est égal à l'une de ses boules ouvertes.

   b) Pour $E = \mathbb{R}^2$ muni de la distance $d = d_\infty$, dessiner les boules ouvertes de (E, d').

10. a) Vérifier que d_1, d_2 et d_∞ (*cf* cours) définissent bien des distances sur l'ensemble $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ des applications continues sur $[a,b]$ à valeurs réelles.

    b) Soient $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ et $\mathcal{T}_\infty$ les topologies associées respectivement à d_1, d_2 et d_∞. Démontrer que $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_\infty$, mais que ces inclusions sont strictes.

11. a) Vérifier que $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1\}, \{0,1\}\}$ est une topologie sur l'ensemble à deux éléments $E = \{0,1\}$.

    b) Démontrer que l'espace topologique $(E, \mathcal{T})$ n'est pas métrisable.

12. Soit P_n le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Démontrer que l'application
$$P \mapsto \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)|$$

est une norme sur P_n.

13. Démontrer qu'un sous-espace vectoriel non trivial d'un e.v.n. n'est jamais <u>borné</u> (c'est-à-dire contenu dans une boule).

14. Démontrer qu'une norme sur un e.v.n non trivial est surjective sur $\mathbb{R}^+$.

15. Soient E et F deux e.v.n. et soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue. À quelle condition nécessaire et suffisante $x \longmapsto ||u(x)||$ est-elle une norme sur E ?

16. Démontrer que les boules d'un e.v.n. sont convexes mais que les sphères ne le sont pas.

17. Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique dont $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts et soit X un sous-espace topologique de E. Déterminer une base de la topologie de X.

18. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$, décrire une base de la topologie de chacun des sous-espaces topologiques suivants :

    a) $S(0,1)$, $\mathbb{Z}^2$

    b) $\{(x,y)\ /x > 0,\ y = \sin 1/x\}$

    c) $\{(x,y)\ /x > 0,\ y = x \sin 1/x\}$

2 Notions usuelles dans les espaces topologiques

2.1 intérieur, adhérence, frontière

Définition 2.1 *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique. Un sous-ensemble F de E est dit fermé si son complémentaire $F^c = E \setminus F$ est un ouvert.*

Remarque. $\emptyset$ et E sont des fermés. Toute intersection (finie ou non) de fermés est un fermé. Toute réunion finie de fermés est un fermé.

Définition 2.2 *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et soit a un point de E. on appelle voisinage de a toute partie V de E qui contient un ouvert U qui lui-même contient a.*
On note $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a.
Un système fondamental de voisinages de a est un sous-ensemble $\mathcal{W}(a)$ de $\mathcal{V}(a)$ tel que tout élément de $\mathcal{V}(a)$ contient un élément de $\mathcal{W}(a)$.

Exemple. Dans un espace métrique (E, d), une partie A de E est voisinage d'un point $x \in E$ ssi il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(x, \epsilon) \subset A$.

Proposition 2.3 *Pour qu'une partie A d'un espace topologique soit ouverte (i.e. soit un ouvert), il faut et il suffit qu'elle soit voisinage de chacun de ses points.*

Définition 2.4 *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et soit A une partie de E. Un point x de A est dit intérieur à A si A est voisinage de x. L'ensemble des points intérieurs à A s'appelle l'intérieur de A et se note A°*

Proposition 2.5 *A° est le plus grand ouvert (pour l'inclusion) contenu dans A.*

Proposition 2.6 *Une partie A de E est un ouvert si et seulement si $A^\circ = A$*

Définition 2.7 *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et soit A une partie de E. Un point x de E est dit adhérent à A si tout voisinage V de x rencontre A (i.e. $V \cap A$ est non vide). L'ensemble des points adhérents à A s'appelle l'adhérence ou la fermeture de A et se note $\overline{A}$.*

Proposition 2.8 *$\overline{A}$ est le plus petit fermé (pour l'inclusion) contenant A.*

Proposition 2.9 *Une partie A de E est un fermé si et seulement si $\overline{A} = A$.*

Définition 2.10 *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique. Une partie A de E est dite dense dans E si $\overline{A} = E$.*

Définition 2.11 *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et soit A une partie de E. Un point x de E est dit point frontière de A s'il est adhérent à la fois à A et à son complémentaire dans E. L'ensemble des points frontières de A s'appelle la frontière de A et se note $Fr(A)$.*

2.2 Suites dans un espace topologique

Définition 2.12 *On appelle* <u>*suite*</u> *dans un ensemble non vide E une application*
$x : \mathbb{N} \longrightarrow E$.
On note le plus souvent x_n pour $x(n)$, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(x_n)_n$ pour la suite x.
Une autre suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une <u>*suite extraite*</u> *de x s'il existe une application $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \in ,y_n = x_{\phi(n)}$.*

Définition 2.13 *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et soit $x = (x_n)_n$ une suite dans E. On dit qu'un point a de E est* <u>*valeur d'adhérence*</u> *de x si tout voisinage V de a dans E contient une infinité de termes x_n de la suite x.*
On dit qu'un point a de E est <u>*limite*</u> *de la suite x, ou que la suite x* <u>*converge*</u> *vers a si pour tout voisinage V de a, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier n tel que $n \geq N$, on ait $x_n \in V$.*

Remarque. une limite de x est aussi une valeur d'adhérence de x.

Proposition 2.14 *Dans un espace topologique séparé, toute suite de E admet au plus une limite.*

Remarque. Si (E, d) est un espace métrique, alors $\{B(a, r); a \in E, r > 0\}$ est un système fondamental de voisinage de E et on peut reformuler les définitions de valeur d'adhérence et de limite en termes de distances de la façon suivante.
Soit $x = (x_n)_n$ une suite dans E.
Un point $a \in E$ est valeur d'adhérence de x si

$$\forall \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N \text{ tel que } d(x_n, x) < \epsilon$$

La suite x converge vers a si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, d(x_n, x) < \epsilon$$

Proposition 2.15 *Soit (E, d) est un espace métrique et soit $(x_n)_n$ une suite dans E. Un point a de E est valeur d'adhérence de $(x_n)_n$ si et seulement si il existe une suite extraite de $(x_n)_n$ qui converge vers a.*

Théorème 2.16 *Soit (E, d) est un espace métrique, soit A une partie de E. Un point $a \in E$ est adhérent à A si et seulement si il existe une suite $(x_n)_n$ dans A qui converge vers a.*

Corollaire 2.17 *Soit* (E, d) *un espace métrique et soit* A *une partie de* E*. L'adhérence* $\overline{A}$ *de* A *est l'ensemble des limites de suites de points de* A*.*

Corollaire 2.18 *Une partie* A *d'un espace métrique* (E, d) *est fermée si et seulement si toute suite convergente de points de* A *a sa limite dans* A*.*

Théorème 2.19 $\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$*.*

2.3 Applications continues

Définition 2.20 *Soient* X *et* Y *deux espaces topologiques, soit* $f : X \longrightarrow Y$ *une application et soit* $x \in X$*. On dit que* f *est* <u>*continue*</u> *en* x *si pour tout voisinage* V *de* $f(x)$ *dans* Y*,* $f^{-1}(V)$ *est un voisinage de* x *dans* X*.*

On dit que f *est* <u>*continue*</u> *(sur* X*) si* f *est continue en tout point de* X*.*

Proposition 2.21 *Soit* X, Y *et* Z *trois espaces topologiques et soient* $f : X \longrightarrow Y$ *et* $g : Y \longrightarrow Z$ *deux applications.*
Si f *et* g *sont continues, alors* $g \circ f$ *est continue.*

Théorème 2.22 *Soient* X *et* Y *deux espaces topologiques et soit* $f : X \longrightarrow Y$ *une application. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) L'application f est continue

(ii) Pour toute partie A de X, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$

(iii) Pour tout fermé F de Y, $f^{-1}(F)$ est un fermé de X

(iv) Pour tout ouvert O de Y, $f^{-1}(O)$ est un ouvert de X

Remarque. L'image d'un ouvert (resp. d'un fermé) de X par une application $f : X \longrightarrow Y$ n'est pas nécessairement un ouvert (resp. un fermé) de Y, même si f est continue (donner des exemples !). On dit que f est <u>ouverte</u> (resp. <u>fermée</u>) si l'image d'un ouvert (resp. d'un fermé) de X est un ouvert (resp. un fermé) de Y.

Définition 2.23 *Un* <u>*homéomorphisme*</u> *d'un espace topologique* X *sur un espace topologique* Y *est une application* $f : X \longrightarrow Y$ *continue, bijective et dont l'application l'inverse* $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ *est continue.*
Deux espaces topologiques sont dits homéomorphes s'il existe un homéomorphisme de l'un sur l'autre. La relation "être homéomorphes" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des espaces topologiques. On appelle propriétés topologiques ou invariants topologiques les propriétés des espaces topologiques qui sont conservées par homéomorphismes

Remarque. Un homéomorphisme $f : X \longrightarrow Y$ établit une bijection entre les ouverts de X et ceux de Y.

Exercices.

1. a) Décrire les fermés de la topologie discrète. De la topologie grossière.

   b) Démontrer que dans un espace métrique (E, d), les boules fermées et les sphères sont des fermés.

2. Décrire l'intérieur, l'adhérence et la frontière des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants : $]0,1]$; $]1,+\infty[$; $[0,1] \cup \{2\}$; $\mathbb{Z}$; $\mathbb{Q}$; $\cup_{n\in\mathbb{N}^*}]\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}]$.

3. Décrire l'intérieur, l'adhérence et la frontière des sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants : $\mathbb{Z}^2$, $\mathbb{Q}^2$, $S(a,r)$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/x > 0,\ y = \sin\frac{1}{x}\}$ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/x > 0,\ y = x\sin\frac{1}{x}\}$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/x > 0,\ y = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\}$, $]0,1[\times\{0\}$.

4. Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et soient A et B des sous-ensembles de E.

   a) Démontrer les égalités suivantes

   $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$

   $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

   b) Démontrer les inclusions suivantes et, pour chacune d'elles, donner un exemple où l'égalité n'est pas réalisée.

   $A^\circ \cup B^\circ \subset (A \cup B)^\circ$

   $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

   $Fr(A \cup B) \subset Fr(A) \cup Fr(B)$

   $Fr(\overline{A}) \subset Fr(A)$

   $Fr(A^\circ) \subset Fr(A)$

5. a) Démontrer qu'une sphère d'un espace vectoriel normé n'a aucun point intérieur.

   b) Démontrer que si un sous-espace F d'un espace vectoriel normé E possède un point intérieur, alors $F = E$.

6. Donner un exemple d'espace topologique E et d'un sous-ensemble A de E tels que A et A^c soient denses dans E.

7. Soit (E, d) un espace métrique. Pour tout $x \in E$ et tout sous-ensemble A de E, on définit la distance $d(x, A)$ de x à A par : $d(x, A) = \inf_{y\in A} d(x, y)$

a) Montrer que si $A \subset B$, alors $\forall x \in E, d(x, B) \leq d(x, A)$

b) Montrer que $d(x, A) = 0$ ssi $x \in \overline{A}$ et que $\forall x \in E, d(x, A) = d(x, \overline{A})$.

8. Soit (E, d) un espace métrique et soit A une partie non vide de E. On appelle <u>diamètre</u> de A et on note $\text{diam}(A)$ la borne supérieure des distances $d(x, y)$ où $x, y \in A$.

   a) Démontrer qu'un sous-ensemble de E est borné (c'est-à-dire contenu dans une boule) si et seulement si son diamètre est fini.

   b) Démontrer que si A est borné, alors $\overline{A}$ aussi et $\text{diam}(A) = \text{diam}(\overline{A})$

9. Soit $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ le cercle trigonométrique, muni de la distance restriction de la distance usuelle sur $\mathbb{C}$ $(d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|)$. Soit $a \in \mathbb{S}^1$. Démontrer que si α et β sont deux valeurs d'adhérence de la suite $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors le produit $\alpha\beta$ et le quotient α/β sont aussi valeurs d'adhérence de cette suite.

10. Soient X et Y deux espaces topologiques et soit $f : X \longrightarrow Y$ une application. Soit x un point de X, soit $W(x)$ un système fondamental de voisinages de x et soit $W(f(x))$ un système fondamental de voisinages de $f(x)$.

    a) Démontrer que f est continue en x si et seulement si pour tout voisinage $V \in W(f(x))$, il existe $U \in W(x)$ tel que $f(U) \subset V$.

    b) En déduire que si (X, d) et $Y, d')$ sont des espaces métriques, alors $f : X \longrightarrow Y$ est continue en $x_0 \in X$ si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \ \forall y \in X, \ (d(x_0, y) < \eta \Rightarrow d'(f(x_0), f(y)) < \epsilon$$

11. Soit E un ensemble muni de deux topologies $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$. On dit que $\mathcal{T}$ est <u>plus fine</u> (resp. <u>moins fine</u>) que $\mathcal{T}'$ si $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ (resp. $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$).

    Soit E un espace topologique et soit A un sous-ensemble de E. Montrer que la topologie induite sur A est la moins fine des topologies sur A telles que l'injection canonique $i : A \longrightarrow E$ soit continue.

12. Démontrer que "être séparé" (pour un espace topologique) est une propriété topologique. Donner d'autres propriétés topologiques.

13. Soit (E, d) un espace métrique et soit A un sous-ensemble de E.

    a) Soit $x \in E$. Démontrer que $d(x, A) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$ et que $d(x, A) = d(x, \overline{A})$.

    b) Démontrer que l'application $x \longmapsto d(x, A)$ est continue.

c) Soient A et B deux fermés disjoints de E. Montrer qu'il existe deux ouverts U et V disjoints tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

14. Munissons l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ de la norme $||.||_\infty$ (norme de la convergence uniforme).

    a) L'application $f \longmapsto f^2$ de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ dans lui-même est-elle continue ?

    b) L'application $f \longmapsto \int_0^1 f(x)^2 \, dx$ de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ est-elle continue ?

    c) Mêmes questions en munissant $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ de la norme $||.||_1$.

15. Soient (X,d) et (Y,d') deux espaces métriques et soit $f : X \longrightarrow Y$ une application. On appelle graphe de f le sous ensemble G_f de $X \times Y$ défini par $G_f = \{(x,y) \in X \times Y;\ x \in X,\ y = f(x)\}$. Démontrer que si f est continue, son graphe G_f est un fermé de $X \times Y$.

16. Soit $(E,||.||)$ un espace vectoriel normé. Démontrer que les boules ouvertes de E sont deux à deux homéomorphes. Démontrer que toute boule ouverte dans E est homéomorphe à E.

3 Espaces compacts

3.1 Espaces compacts : définition, propriétés

Définition 3.1 *Un espace topologique E est dit compact s'il est séparé et s'il vérifie la propriété suivante, dite propriété de Borel-Lebesgue :*

De toute famille $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts de E dont E est la réunion, on peut extraire famille finie $U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}$, $i_1, \ldots, i_n \in I$ dont la réunion est E.

Remarque La propriété de Borel-Lebesgue est équivalente à :

De toute famille $(F_i)_{i\in I}$ de fermés de E dont l'intersection est vide, on peut extraire une famille finie $F_{i_1}, \ldots, F_{i_n}$, $i_1, \ldots, i_n \in I$ dont dont l'intersection est vide.

Propriétés élémentaires des espaces compacts.

1) Tout fermé d'un espace compact est compact.
2) Dans un espace compact, toute suite possède une valeur d'adhérence.
3) Tout sous-espace compact d'un espace séparé est fermé.
4) Tout sous-espace compact d'un espace métrique est borné.

Théorème 3.2 (Théorème de Bolzano-Weirstrass) *Un sous-espace A d'un espace métrique (E, d) est compact si et seulement si toute suite de points de A possède une valeur d'adhérence dans A.*

3.2 Espaces compacts et applications continues

Proposition 3.3 *Soit f une application continue d'un espace compact E dans un espace séparé F. Alors son image $f(E)$ est une partie compacte de F.*

Corollaire 3.4 *Une application bijective continue d'un espace compact E dans un espace séparé F est un homéomorphisme.*

Corollaire 3.5 *Soit E un espace topologique et soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si E est compact, alors f est bornée sur E et atteint ses bornes.*

3.3 Le théorème de Heine

Théorème 3.6 (Théorème de Heine) *Tout intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$ est compact.*

Théorème 3.7 *Les parties compactes de $\mathbb{R}^n$ sont les parties fermées et bornées.*

Corollaire 3.8 *Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, les sous-espaces compacts sont les fermés bornés.*

3.4 Espaces compacts et continuité uniforme

Définition 3.9 *Soient (E, d) et (F, δ) des espaces métriques. Une application*
$f : E \longrightarrow F$ est dite uniformément continue sur E si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tous $x, y \in E$ tels que $d(x, y) \leq \eta$, on ait $\delta(f(x), f(y)) \leq \epsilon$.

Théorème 3.10 *Soient (E, d) et (F, δ) des espaces métriques et soit $f : E \longrightarrow F$. Si E est compact et si f est continue, alors f est uniformément continue.*

3.5 Espaces localement compacts.

Définition 3.11 *Un espace topologique est dit localement compact s'il est séparé et si chacun de ses points possède un voisinage compact.*

Théorème 3.12 (Théorème d'Alexandroff) *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique localement compact et non compact. Posons $\hat{E} = E \cup \{\omega\}$, où $\{\omega\}$ est un singleton. Notons $\hat{\mathcal{T}}$ l'ensemble des parties de $\hat{E}$ qui sont soit des ouverts de E, soit les complémentaires dans $\hat{E}$ des parties compactes de E. Alors $\hat{\mathcal{T}}$ est une topologie sur $\hat{E}$. De plus, $(\hat{E}, \hat{\mathcal{T}})$ est un espace topologique compact et $(E, \mathcal{T})$ est un sous-espace topololgique dense dans $\hat{E}$.*

Définition 3.13 *L'espace topologique $(\hat{E}, \hat{\mathcal{T}})$ s'appelle le compactifié d'Alexandroff de E. Le point ω est appelé point à l'infini de $\hat{E}$.*

Exercices

1. Soit E un espace topologique séparé et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E qui converge vers l dans E. Montrer que $K = \{u_n;\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est une partie compacte de E.

2. Soit E un espace topologique séparé, A et B deux parties compactes non vides et disjointes de E. Démontrer qu'il existe deux ouverts U et V disjoints tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

3. Soit E un espace métrique, A une partie compacte de E et x un point de E.

   Montrer qu'il existe $a \in A$ tel que $d(x, A) = d(x, a)$.

4. Notons l^∞ l'espace vectoriel normé des suites numériques bornées muni de la norme $||(x_n)_n||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$. Démontrer que la boule fermée unité de l^∞ n'est pas un compact.

5. Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces topologiques. Soit $k > 0$. On dit qu'un application $f : E \longrightarrow F$ est <u>k-lipschitzienne</u> si $\forall x, y \in E, \delta(f(x), f(y)) \leq k\, d(x, y)$. Démontrer qu'une application k-lipschitzienne est uniformément continue.

6. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. L'objectif de l'exercice est de démontrer que toutes les normes sur E sont équivalentes. Fixons $N : E \to \mathbb{R}$ une norme sur E.

   (a) On choisit une base $e_1, \ldots, e_n$ sur E, et on munit E de la norme $||.||_1$ définie par : $||\sum_{i=1}^n x_i e_i||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$. Démontrer qu'il existe $\beta > 0$ tel que

   $$\forall x \in E, N(x) \leq \beta ||x||_1$$

   (b) En déduire que l'application identité $Id : (E, ||.||_1) \to (E, N)$ est continue (Attention, E n'est pas muni de la même norme au départ et à l'arrivée)

   (c) Soit $S(0, 1) = \{x \in E \mid ||x||_1 = 1\}$ la sphère unité de E pour la norme $||.||_1$. Démontrer que $S(0, 1)$ est un compact de E.

   (d) Démontrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in S(0, 1)$, $N(x) \geq \alpha$. En déduire que pour tout $x \in E, \alpha||x||_1 \leq ||y||$.

   (e) Conclure.

7. (Topologie quotient)

   (a) Soit E un espace topologique et soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. Notons $\pi : E \longrightarrow E/\mathcal{R}$ la projection canonique sur l'espace quotient $E/\mathcal{R}$. On définit la <u>topologie quotient</u> sur $E/\mathcal{R}$ de la façon suivante : U est un ouvert de $E/\mathcal{R}$ si et seulement si $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert de E.

   Démontrer que l'on définit bien ainsi une topologie sur $E/\mathcal{R}$.

   (b) $\mathbb{C}$ étant muni de sa norme usuelle $|.|$, on note $\mathbb{S}^1$ le cercle unité de $\mathbb{C}$, muni de la topologie induite. Soit $\sim$ la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$ définie par : $x \sim y$ ssi $x - y \in \mathbb{Z}$. On note $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ l'espace quotient, et on le munit de la topologie quotient. Démontrer que $\mathbb{S}^1$ et $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ sont homéomorphes.

8. Démontrer que les parties ouvertes et les parties fermées d'un espace localement compact sont localement compactes.

9. a) Démontrer que le compactifié d'Alexandroff de $\mathbb{R}$ est homéomorphe au cercle $\mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 = 1\}$.

   b) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$\mathbb{S}^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \ / \ \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$$

   On dit que $\mathbb{S}^n$, munie de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^{n+1}$ est la <u>sphère unité de dimension n</u>. Démontrer que le compactifié d'Alexandroff de $\mathbb{R}^n$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^n$.

4 Applications linéaires continues

4.1 L'espace vectoriel normé des applications linéaires continues

Proposition 4.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) f est uniformément continue sur E

(ii) f est continue sur E

(iii) f est continue en 0

(iv) f est bornée sur la boule fermée unité $B_f(0,1)$

(v) il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $||f(x)|| \leq M\ ||x||$

Notation. On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F.

Proposition 4.2 *On définit une norme sur $\mathcal{L}(E,F)$ de la façon suivante. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$; on pose*

$$||f|| = \sup_{||x||_E \leq 1} ||f(x)||_F$$

Remarque. $||f|| = \sup_{||x||_E=1} ||f(x)||_F = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{||f(x)||_F}{||x||_E}$

Proposition 4.3 *Soient E, F et G trois e.v.n. et soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$, et $||g \circ f|| \leq ||g||\ ||f||$.*

Proposition 4.4 *Toute application linéaire d'un espace vectoriel normé de dimension finie dans un espace vectoriel normé quelconque est continue.*

Définition 4.5 *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$. On appelle dual algébrique de E et on note E^* l'espace vectoriel des formes linéaires sur E, i.e. des applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$. On appelle dual topologique de E l'espace vectoriel normé $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ des formes linéaires continues sur E.*

4.2 Applications multilinéaires continues

Définition 4.6 *Soient $E_1, \dots, E_n$ et F des espaces vectoriels normés. Une application $f : E_1 \times \dots \times E_n \longrightarrow F$ est dite n-linéaire si pour tout $a = (a_1, \dots, a_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$ et pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, l'application de E_i dans F définie par $x_i \longrightarrow f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$ est linéaire.*

Proposition 4.7 *Soient $E_1, \dots, E_n$ et F des espaces vectoriels et soit $f : E = E_1 \times \dots \times E_n \longrightarrow F$ une application multilinéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) f est uniformément continue sur $E_1 \times \dots \times E_n$

(ii) f est continue sur $E_1 \times \dots \times E_n$

(iii) f est continue en l'origine de $E_1 \times \dots \times E_n$

(iv) f est bornée sur $\{(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n \ / \ \forall i, ||x_i||_{E_i} \leq 1\}$

(v) il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$,
$||f(x_1, \dots, x_n)|| \leq M \ ||x_1|| \dots ||x_n||$

Notation. On note $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ l'espace vectoriel des applications n-linéaires continues de $E_1 \times \dots \times E_n$ dans F.

Proposition-définition. On définit une norme sur $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ de la façon suivante. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$; on pose

$$||f|| = \sup_{||x||_{E_i} \leq 1} ||f(x_1, \dots, x_n)||_F$$

Exercices.

1. Soit $\mathbb{R}[t]$ l'espace vectoriel des polynômes à une variable. On le munit de la norme $|||P|| = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|$.

   a) Fixons $a \in \mathbb{R}$. Soit $L_a : \mathbb{R}[t] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $L_a(P) = p(a)$. Vérifier que L_a est une forme linéaire sur $\mathbb{R}[t]$. Démontrer que L_a est continue si et seulement si $a \in [0, 1]$, et lorsque c'est le cas, calculer sa norme.

   b) Soient α et β deux réels tels que $\alpha < \beta$. On définit une application $\Phi_{\alpha\beta} : \mathbb{R}[t] \longrightarrow \mathbb{R}$ en posant $\Phi_{\alpha\beta}(P) = \int_\alpha^\beta |P(t)| \, dt$. Vérifier que $\Phi_{\alpha\beta}$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}[t]$. Trouver une condition néssaire et suffisante portant sur les réels α et β pour que $\Phi_{\alpha\beta}$ soit continue, et lorsque c'est le cas, calculer sa norme.

2. Fixons $a \in [0,1]$ et considérons l'application $\theta : \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\theta(f) = f(a)$. Est-elle continue si l'on munit $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ de la norme $||.||_1$? Si c'est le cas, calculer sa norme. Mêmes questions pour $||.||_2$ et pour $||.||_\infty$.

3. Considérons l'application $\Omega : \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\Omega(f) = \int_0^1 x(1-x)f(x)\ dx$$

   Démontrer que Ω est continue lorsqu'on munit $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ de l'une des trois normes $||.||_1,\ \ ||.||_2$ ou $||.||_\infty$. Dans chaque cas, calculer la norme de Ω.

4. On munit $\mathbb{R}^n$ successivement de chacune des normes $||.||_1,\ ||.||_2$ et $||.||_\infty$ (cf cours). Déterminer, dans chaque cas, la norme associée sur le dual topologique de $\mathbb{R}^n$ en donnant l'expression de la norme d'une forme linéaire f sur $\mathbb{R}^n$ au moyen de ses composantes dans la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

5 Espaces métriques complets

5.1 Suites de Cauchy

Définition 5.1 *Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans un espace métrique (E,d) est dite <u>de Cauchy</u> si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}\ t.q.\ \forall m,n \in \mathbb{N},\ (m \geq N\ et\ n \geq N \Rightarrow d(x_m,x_n) < \epsilon)$$

Proposition 5.2 *1) Toute suite convergente est de Cauchy*
2) Toute suite de Cauchy est bornée
3) Toute suite de Cauchy admettant une valeur d'adhérence est convergente vers cette valeur d'adhérence.

5.2 Espaces métriques complets

Définition 5.3 *Un espace métrique (E,d) est dit <u>complet</u> si toute suite de Cauchy dans E est convergente.*

Exemples d'espaces métriques complets
a) *Compacité et espaces complets.* - Un espace métrique dont toutes les boules fermées sont compactes est complet. En conséquence, $\mathbb{R}$, et plus généralement $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ sont complets.
b) *produit d'espaces complets.* - Tout produit fini d'espaces complets, muni de la distance produit, est complet.
c) *fermé d'un espace complet.* - Tout fermé d'un espace complet, muni de la distance induite, est complet.

Proposition 5.4 *Tout sous-espace complet d'un espace métrique est fermé.*

5.3 Espaces de Banach

Définition 5.5 *Un espace vectoriel normé complet s'appelle un <u>espace de Banach</u>.*

Proposition 5.6 *Soit E un espace vectoriel et soient $||.||_1$ et $||.||_2$ deux normes équivalentes sur E. Alors $(E,||.||_1)$ est un espace de Banach si et seulement si $(E,||.||_2)$ est un espace de Banach.*

Proposition 5.7 *1) $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}),||.||_\infty)$ est un espace de Banach*
2) $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}),||.||_1)$ n'est pas complet.

Proposition 5.8 *Soit $(E, ||.||)$ un espace de Banach et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E. Si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est normalement convergente (c'est-à-dire $\sum_{n\in\mathbb{N}} ||u_n||$, alors elle est convergente, et*

$$||\sum_{n=0}^{\infty} u_n|| \leq \sum_{n=0}^{\infty} ||u_n||$$

5.4 Le théorème du point fixe

Définition 5.9 *Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques. Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite contractante si f est lipschitzienne de rapport $k < 1$, c'est-à-dire s'il existe un réel $k < 1$ tel que pour tous x et $y \in E$,*

$$\delta(f(x), f(y)) \leq k\ d(x, y)$$

Définition 5.10 *Soit E un ensemble et soit $f : E \longrightarrow E$ une application de E dans lui-même. On dit que $x \in E$ est un point fixe de f si $f(x) = x$.*

Théorème 5.11 (Théorème du point fixe) *Une application contractante d'un espace métrique complet dans lui-même possède un point fixe unique.*

5.5 Espaces de Banach et applications linéaires continues

Théorème 5.12 *Soit E un espace vectoriel normé et soit F un espace de Banach. Alors $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace de Banach.*

Cas particulier. Pour tout espace vectoriel normé E, $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ est un espace de Banach.

Définition 5.13 *Soit E un e.v.n. Un élément $u \in \mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$ est dit inversible s'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v = id_E$ et $v \circ u = id_E$.*

Théorème 5.14 *Soit E un espace de Banach et soit u un élément inversible de $\mathcal{L}(E)$. Alors pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $||v|| < \frac{1}{||u^{-1}||}$, $u + v$ est un élément inversible de $\mathcal{L}(E)$ et*

$$||(u + v)^{-1}|| \leq \frac{1}{||u^{-1}||^{-1} - ||v||}$$

Corollaire 5.15 *L'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{L}(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$.*

Exercices

1. (théorème de Cantor) Si A est une partie non vide d'un espace métrique E, on appelle diamètre de A et on note $\mathrm{diam}(A)$ la borne supérieure des distances $d(x,y)$ où x et y sont des points de A (voir aussi l'exercice 8 du chapitre 2).

   Démontrer qu'un espace métrique (E,d) est complet si et seulement si pour toute suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fermés non vides de E décroissante (*i.e.* $\forall n, F_{n+1} \subset F_n$) telle que $\lim_{n\to\infty}\mathrm{diam}(F_n) = 0$, l'intersection $\cap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est un singleton.

2. (théorème de prolongement) Soit (E,d) un espace métrique et soit (F,δ) un espace métrique complet. Soit A une partie dense de E et soit $g : A \longrightarrow F$ un application uniformément continue. Démontrer que g se prolonge de manière unique en une application continue $\tilde{g} : E \longrightarrow F$ et que $\tilde{g}$ est uniformément continue.

3. Soit S un ensemble. On note $B(S)$ l'ensemble des fonctions $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ bornées sur S, et pour tous f et g dans $B(S)$, on pose $d(f,g) = \sup_{x\in S}|f(x) - g(x)|$. Démontrer que $(B(S),d)$ est un espace métrique complet.

4. Démontrer que $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), ||.||_1)$ et $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), ||.||_2)$ ne sont pas complets.

5. Pour tous x et y dans $\mathbb{R}$, on pose $\delta(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$. Démontrer que $(\mathbb{R},d)$ est une espace métrique non complet.

6. (a) Soit l^1 l'espace vectoriel des suites $u = (u_n)_n$ dans $\mathbb{R}$ telles que la série $\sum_n u_n$ est normalement convergente. Pour tout u dans l^1, on pose $||u||_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}}|u_n|$. Démontrer que $(l^1, ||.||_1)$ est un espace de Banach.

   (b) Soit $\mathcal{C}_0$ le sous-espace vectoriel de l^1 des suites de réels dont tous les termes sont nuls sauf un nombre fini. On restreint la norme $||.||_1$ à $\mathcal{C}_0$. Démontrer que $(\mathcal{C}_0, ||.||_1)$ n'est pas complet.

   (c) Démontrer que $\mathcal{C}_0$ est dense dans l^1.

7. Soit $K : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue et soit $\phi \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, et soit λ un nombre réel. Démontrer que si λ est suffisamment petit (on précisera ce que cela signifie), alors l'équation fonctionnelle d'inconnue $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \lambda \int_0^1 K(x,t)\ f(t)\ dt\ +\ \phi(x)$$

admet une solution unique dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

8. Déterminer les fonctions continues bornées de $[0,+\infty[$ dans lui-même qui sont solutions de l'équation fonctionnelle

$$[f(x)]^2 = 1 + f(x+1),\ \forall x \in [0,+\infty[$$

9. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. On suppose qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{||x||\to+\infty} f(x) = l$. Démontrer que f est bornée et uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$.

6 Connexité

6.1 Espaces connexes : définitions et propriétés

Définition 6.1 *Un espace topologique E est dit connexe s'il n'existe pas deux ouverts non vides U_1 et U_2 de E tels que $E = U_1 \cup U_2$ et $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.*

Remarque. Si A est une partie d'un espace topologique E on munira A de la topologie induite et on dira que A est une partie connexe de E si A muni de la topologie induite est connexe.

Proposition 6.2 *Un espace topologique E est connexe si et seulement si les seules parties de E à la fois ouvertes et fermées dans E sont E et $\emptyset$.*

Proposition 6.3 *Les sous-espaces connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.*

6.2 Connexité et applications continues

Proposition 6.4 *Soient E et F deux espaces topologiques et soit $f : E \longrightarrow F$ une application continue. Si E est connexe, alors $f(E)$ est connexe.*

Corollaire 6.5 (Théorème des valeurs intermédiaires) *Soit E un espace topologique connexe et soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Soient a et $b \in E$. Alors pour tout $c \in [f(a), f(b)]$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = c$.*

6.3 Composantes connexes

Définition 6.6 *On dit que deux points a et b d'un espace topologique E sont connectés s'il existe une partie connexe A de E qui contient a et b.*

La relation "être connectés" est une relation d'équivalence sur les points de E (le démontrer). Les classes déquivalence pour cette relation sont appelées
composantes connexes de E.

Remarque. La composante connexe d'un point a de E est la plus grande partie connexe de E contenant a.

6.4 Connexité par arcs

Définition 6.7 *Un espace topologique E est dit connexe par arcs si pour tout couple (a, b) de points de E, il existe une application continue $f[0, 1] \longrightarrow E$ telle que $f(0) = a$ et $f(1) = b$.*

Proposition 6.8 *Un espace topologique connexe par arcs est connexe.*

Exercices.

1. Soit (E, d) un espace topologique et soit A une partie connexe de E. Démontrer que tout sous-espace B de E tel que $A \subset B \subset \overline{A}$ est connexe.

2. Soit E un espace topologique et soient A_1 et A_2 deux sous-espaces connexes E tels que $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Démontrer que $A_1 \cup A_2$ est connexe. En déduire que la relation "être connectés" est une relation d'équivalence.

3. un espace topologique est dit <u>totalement discontinu</u> si chacune de ses composantes connexes est un singleton.

   (a) démontrer qu'un espace discret est totalement discontinu

   (b) Démontrer que $\mathbb{Q}$ est totalement discontinu mais pas discret.

4. Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y = \sin 1/x\}$. Démontrer que $\overline{E}$ est connexe mais n'est pas connexe par arcs.

5. Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue d'un espace topologique X dans un espace topologique Y. On suppose f localement constante sur X, c'est-à-dire que tout point de X possède un voisinage sur lequel f est constante. Démontrer que f est constante sur chaque composante connexe de X.Montrer que chaque intervalle $]\pi/2 + k\pi, \pi/2 + (k+1)\pi[$, avec $k \in \mathbb{Z}$ contient une solution de l'équation $\tan x - e^x = 0$.

6. (a) Soit $f : X \longrightarrow Y$ un homéomorphisme entre deux espaces topologiqes X et Y. Montrer que f induit une bijection entre les composantes connexes de X et les composantes connexes de Y.

   (b) Parmi les lettres suivantes (vues comme des sous-espaces de $\mathbb{R}^2$) quelles sont celles qui sont homéomorphes : A, C, D, E, L, O, X, Y