Exercices corrigés - Développements limités

Calculs de développements limités

Exercice 1 - Somme et produit de DLs [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Calculer les développements limités suivants :

1. $\dfrac{1}{1-x} - e^x$ à l'ordre 3 en 0
2. $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ à l'ordre 4 en 0
3. $\sin x \cos(2x)$ à l'ordre 6 en 0
4. $\cos(x)\ln(1+x)$ à l'ordre 4 en 0
5. $(x^3+1)\sqrt{1-x}$ à l'ordre 3 en 0
6. $\left(\ln(1+x)\right)^2$ à l'ordre 4 en 0

Corrigé ▼

1. Il suffit d'écrire

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x}&=1+x+x^2+x^3+o(x^3)\\ e^x&=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\end{aligned}$$

et de faire la différence :

$$\frac{1}{1-x}-e^x=\frac{x^2}{2}+\frac{5x^3}{6}+o(x^3).$$

2. Il suffit d'écrire

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x}&=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+o(x^4)\\ \sqrt{1-x}&=1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+o(x^4)\end{aligned}$$

et de faire la somme :

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=2-\frac{x^2}{4}-\frac{5x^4}{64}+o(x^4).$$

3. On écrit

$$\begin{aligned}\sin(x)&=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^6)\\ \cos(2x)&=1-2x^2+\frac{2x^4}{3}+o(x^5).\end{aligned}$$

Remarquons qu'il n'est pas nécessaire d'aller jusqu'à l'ordre 6 pour $\cos(2x)$ car tous les termes de son développement limité seront au moins multipliés par x, et on gagne un ordre. On en déduit, en effectuant le produit

$$\sin(x)\cos(2x)=x-\frac{13x^3}{6}+\frac{121x^5}{120}+o(x^6).$$

6   120

4. On écrit les développements limités

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

et on effectue le produit pour trouver

$$(\cos x)\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^4).$$

5. C'est la même méthode, encore plus facile car $1+x^3 = 1+x^3+o(x^3)$. Puisque d'autre part

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o(x^3)$$

on trouve en effectuant le produit

$$(1+x^3)\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{15x^3}{16} + o(x^3).$$

6. Puisque $\ln(1+x) \sim_0 x$, il est là aussi simplement nécessaire d'effectuer un DL de $\ln(1+x)$ à l'ordre 3. En effectuant le produit, on va automatiquement gagner un ordre. Donc, en écrivant

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

on trouve

$$\left(\ln(1+x)\right)^2 = x^2 - x^3 + \frac{11x^4}{12} + o(x^4).$$

Exercice 2 ★★ **- Quotient de DLs** [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé ▼

Déterminer les développements limités des fonctions suivantes :

1. $\dfrac{1}{1+x+x^2}$ à l'ordre 4 en 0   **2.** $\tan(x)$ à l'ordre 5 en 0

3. $\dfrac{\sin x - 1}{\cos x + 1}$ à l'ordre 2 en 0   **4.** $\dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}$ à l'ordre 3 en 0.

Corrigé

1. On pose $u = x + x^2$, qui tend bien vers 0 lorsque x tend vers 0, et on utilise

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 + o(u^4).$$

On calcule les puissances de u, mais bien sûr on les tronque à l'ordre 4. On trouve :

$$\begin{aligned} u &= x + x^2 \\ u^2 &= x^2 + 2x^3 + x^4 \\ u^3 &= x^3 + 3x^4 + o(x^4) \\ u^4 &= x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

Ainsi, en remplaçant, on trouve

$$\frac{1}{1+x+x^2} = 1 - x + x^3 - x^4 + o(x^4).$$

2. On commence par calculer le DL (à l'ordre 4 simplement!) de $g(x) = \frac{1}{\cos x}$. Pour cela, on remarque que

$$g(x) = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} = \frac{1}{1-u}$$

avec

$$\begin{aligned} u &= \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4) \\ u^2 &= \frac{x^4}{4} + o(x^4) \end{aligned}$$

On déduit du DL de $\frac{1}{1-u}$ que

$$g(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4).$$

On multiplie alors ce DL avec celui du sinus :

On multiplie alors ce DL avec celui du sinus :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

et on trouve

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).$$

3. A l'ordre 2, on a

$$\cos(x) + 1 = 2 - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

d'où

$$\frac{1}{\cos x + 1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - \frac{x^2}{4} + o(x^2)} = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2).$$

On multiplie ce DL par celui de $\sin x - 1$

$$\sin x - 1 = -1 + x + o(x^2).$$

On trouve finalement

$$\frac{\sin x - 1}{1 + \cos x} = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2).$$

4. Ici, il faut faire un DL à l'ordre 4 du numérateur et du dénominateur car les termes en x vont se simplifier. On trouve

$$\frac{\ln(1+x)}{\sin x} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)}{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)} = \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)}.$$

On effectue ensuite le DL à l'ordre 3 de

$$\frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)} = 1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3)$$

puis le produit et on trouve finalement

puis le produit et on trouve finalement

$$\frac{\ln(1+x)}{\sin x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Exercice 3 ★★ **- Composition de DLs** [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Calculer les développements limités suivants :

1. $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ à l'ordre 4 en 0 **2.** $\exp(\sin x)$ à l'ordre 4 en 0

3. $(\cos x)^{\sin x}$ à l'ordre 5 en 0 **4.** $x\big(\cosh x\big)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 4 en 0.

Corrigé

1. On commence par écrire

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4).$$

On peut donc écrire

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\ln(1+u)\text{ avec }u=-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4).$$

En particulier, on remarque que $o(u^2)=o(x^4)$. De plus, on sait que

$$\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+o(u^2).$$

On calcule les puissances de u, et on les tronque à l'ordre 4. Ainsi,

$$u=-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)$$

$$u^2=\frac{x^4}{36}+o(x^4).$$

Il vient

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)&=\frac{-x^2}{6}+\left(\frac{1}{120}-\frac{1}{2\times 36}\right)x^4+o(x^4)\\&=\frac{-x^2}{6}-\frac{x^4}{180}+o(x^4).\end{aligned}$$

2. On pose $u=\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)$. u tend vers 0 lorsque x tend vers 0, et on peut bien écrire que

$$\exp(u)=1+u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}+\frac{u^4}{24}+o(u^4).$$

Mais,

Mais,

$$\begin{aligned}
u &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\\
u^2 &= x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\\
u^3 &= x^3 + o(x^4)\\
u^4 &= x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

En remplaçant, on trouve

$$\exp(\sin(x)) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4).$$

3. On écrit

$$(\cos x)^{\sin x} = \exp\big(\sin x \ln(\cos x)\big).$$

On va donc devoir composer deux DLs, et faire un produit! Soit d'abord $u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$. On a

$$\ln(\cos x) = \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} + o(u^5).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
u &= \ -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\\
u^2 &= \frac{x^4}{4} + o(x^5)\\
u^3 &= o(x^5)\\
u^4 &= o(x^5)\\
u^5 &= o(x^5)
\end{aligned}$$

Il vient

$$\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^5).$$

On en déduit

On en déduit

$$\begin{aligned}\sin(x)\ln(\cos x) &= \left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)\left(-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^5)\right)\\ &= -\frac{x^3}{2}+o(x^5)\end{aligned}$$

Finalement, on pose $v=-\frac{x^3}{2}+o(x^3)$, et on voit que $v^2=o(x^5)$. On obtient donc

$$\exp\big(\sin x\ln(\cos x)\big)=\exp(v)=1+v+O(v^2)=1-\frac{x^3}{2}+o(x^5).$$

Il y avait finalement moins de calculs que l'on ne pouvait le craindre!

4. On commence par étudier le DL de $\frac{1}{x}\ln(\cosh x)$. Au voisinage de 0, le DL à l'ordre 4 du cosinus hyperbolique est donné par

$$\cosh x=1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4).$$

Celui de $\ln(1+u)$ est donné par

$$\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+o(u^2).$$

Il est n'est pas nécessaire d'aller plus loin, car en posant $u=\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$, on a déjà $o(u^2)=o(x^4)$. Puisque $u^2=\frac{x^4}{4}+o(x^4)$, on a en introduisant dans le DL de $\ln(1+u)$:

$$\frac{1}{x}\ln(\cosh x)=\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}+o(x^3)$$

(on se contente de DLs à l'ordre 3 car on va les multiplier par x à la fin). Pour trouver le DL de $(\cosh x)^{\frac{1}{x}}$, on doit encore composer par l'exponentielle :

$$\exp(v)=v+\frac{v^2}{2}+\frac{v^3}{6}+o(v^3)$$

avec

$$v=\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}+o(x^3)$$

On trouve donc

$$(\cosh x)^{\frac{1}{x}}=1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}+o(x^3).$$

Pour la fonction initiale, ceci donne

$$x(\cosh x)^{\frac{1}{x}}=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{8}-\frac{x^4}{16}+o(x^4).$$

Exercice 4 ★★ **- Intégration de DLs** [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Calculer les développements limités suivants :

1. $\arccos x$ à l'ordre 5 en 0 **2.** $\int_0^x e^{t^2}dt$ à l'ordre 5 en 0.

Corrigé

1. La fonction arccos est dérivable en 0, et sa dérivée vaut
$$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$
Cette fonction est de classe C^∞ autour de 0, elle admet au moins un développement limité à l'ordre 4 en 0. Pour le calculer, on commence par écrire que
$$\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+o(x^4).$$
Posons $u=x^2+x^4+o(x^4)$ et remarquons que $u^2=x^4+o(x^4)$. Du développement limité de $\sqrt{1+u}$,
$$\sqrt{1+u}=1+\frac{u}{2}-\frac{u^2}{8}+o(u^2),$$
on déduit que
$$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=-1-\frac{x^2}{2}-\frac{3}{8}x^4+o(x^4).$$
On intègre ce développement limité. Tenant compte de $\arccos(0)=\frac{\pi}{2}$, il vient
$$\arccos(x)=\frac{\pi}{2}-x-\frac{x^3}{6}-\frac{3}{40}x^5+o(x^5).$$
2. La méthode est similaire. On remarque que
$$e^{x^2}=1+x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4).$$
En intégrant, on trouve que
$$\int_0^x e^{t^2}dt=0+x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}+o(x^5).$$

Exercice 5 ★★ **- DLs pas en 0!** [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Calculer les développements limités suivants :

1. $\frac{1}{x}$ à l'ordre 3 en 2 **2.** $\ln(x)$ à l'ordre 3 en 2

3. e^x à l'ordre 3 en 1 **4.** $\cos(x)$ à l'ordre 3 en $\frac{\pi}{3}$

5. $\sqrt{x}$ à l'ordre 3 en 2

Corrigé

1. On pose $x = 2 + h$, d'où

$$\begin{aligned}\frac{1}{2+h} &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\frac{h}{2}}\\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} - \frac{h^3}{8} + o(h^3)\right)\\ &= \frac{1}{2} - \frac{h}{4} + \frac{h^2}{8} - \frac{h^3}{16} + o(h^3).\end{aligned}$$

En revenant à x, on obtient

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{x-2}{4} + \frac{(x-2)^2}{8} - \frac{(x-2)^3}{16} + o\big(x-2)^3\big).$$

2. On pose $x = 2 + h$, on factorise par 2 et on utilise les propriétés de la fonction logarithme :

$$\begin{aligned}\ln(2+h) &= \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{h}{2}\right)\\ &= \ln 2 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \frac{h^3}{24} + o(h^3).\end{aligned}$$

Revenant à x, cela s'écrit encore

$$\ln(x) = \ln 2 + \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{8} + \frac{(x-2)^3}{24} + o\big((x-2)^3\big).$$

3. On pose $x = 1 + h$, et on écrit

$$\begin{aligned}e^{1+h} &= e^1 e^h\\ &= e^1 + e^1 h + \frac{e^1}{2}h^2 + \frac{e^1}{6}h^3 + o(h^3)\end{aligned}$$

Retournant à x, on en déduit que

$$e^x = e^1 + e^1(x-1) + \frac{e^1}{2}(x-1)^2 + \frac{e^1}{6}(x-1)^3 + o\big((x-1)^3\big).$$

4. On pose $x=\frac{\pi}{3}+h$. Par une formule de trigonométrie :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{3}+h\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos h-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin h\\ &= \frac{1}{2}-\frac{h^2}{4}+o(h^3)-\frac{\sqrt{3}}{2}h+\frac{\sqrt{3}}{12}h^3+o(h^3)\\ &= \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}h-\frac{h^2}{4}+\frac{\sqrt{3}}{12}h^3+o(h^3)\end{aligned}$$

Revenant en x, on déduit

$$\cos x=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2}{4}+\frac{\sqrt{3}}{12}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3+o\left(\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3\right).$$

5. On pose $x=2+h$, d'où

$$\begin{aligned}\sqrt{2+h}=\sqrt{2}\sqrt{1+\frac{h}{2}} &= \sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}\frac{h}{2}-\frac{1}{8}\left(\frac{h}{2}\right)^2+\frac{1}{16}\left(\frac{h}{2}\right)^3+o(h^3)\right)\\ &= \sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}h-\frac{\sqrt{2}}{32}h^2+\frac{\sqrt{2}}{128}h^3+o(h^3).\end{aligned}$$

En revenant à x, on a

$$\sqrt{x}=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}(x-2)-\frac{\sqrt{2}}{32}(x-2)^2+\frac{\sqrt{2}}{128}(x-2)^3+o((x-2)^3).$$

Exercice 6 ★★★ - Ordre le plus grand possible [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Déterminer a et b pour que la partie principale du développement limité en 0 de la fonction $\cos x-\frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ soit de degré le plus grand possible.

Indication

Corrigé

On écrit :

$$\frac{1}{1+bx^2}=1-bx^2+b^2x^4-b^3x^6+o(x^6)$$

ce qui donne, par produit

$$\frac{1+ax^2}{1+bx^2}=1+(a-b)x^2+(b^2-ab)x^4+(-b^3+ab^2)x^6+o(x^6).$$

Finalement, le développement limité de la fonction est donné par

$$\cos x-\frac{1+ax^2}{1+bx^2}=\left(-a+b-\frac{1}{2}\right)x^2+\left(-b^2+ab+\frac{1}{24}\right)x^4+\left(+b^3-ab^2-\frac{1}{120}\right)x^6+o(x^6).$$

Le terme d'ordre 2 disparait si $b-a=1/2$, et celui d'ordre 4 disparait aussi si

$$-b(b-a)=-\frac{1}{24}\iff b=1/12.$$

Dans ce cas, on trouve $a=-5/12$ et pour ces valeurs de a et b, on trouve une partie principale de degré 6 :

$$\cos x-\frac{1+ax^2}{1+bx^2}=\frac{1}{480}x^6.$$

Exercice 7 ★★★ **- DL en l'infini** [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé ▼

Calculer les développements limités suivants :

1. $\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$ à l'ordre 3 en $+\infty$ **2.** $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\ln x$ à l'ordre 4 en $+\infty$

Indication ▶

Corrigé ▼

1. On pose $u=\frac{1}{x}$, de sorte que

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}&=\sqrt{1+2u}\\&=1+u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{2}+o(u^3)\\&=1+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right).\end{aligned}$$

2. On commence par écrire

$$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\ln x=\ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right).$$

On pose alors $u=\frac{1}{x}$, puis on écrit, pour se ramener à un DL du logarithme en 0,

$$\ln\left(1+\sqrt{1+u^2}\right)=\ln\left(1+\frac{\sqrt{1+u^2}-1}{2}\right).$$

Or,

$$\frac{\sqrt{1+u^2}-1}{2}=\frac{u^2}{4}-\frac{u^4}{16}+o(u^4)$$

d'où, par composition de DLS,

d'où, par composition de DLS,

$$\ln\left(1+\sqrt{1+u^2}\right)=\frac{u^2}{4}-\frac{3u^4}{32}+o(u^4).$$

Revenant à la fonction initiale, on trouve

$$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\ln x=\ln 2+\frac{1}{4x^2}-\frac{3}{32x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

Exercice 8 ★★★ **- Astucieux!** [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Calculer, à l'ordre 100, le développement limité en 0 de $\ln\left(\sum_{k=0}^{99}\frac{x^k}{k!}\right)$.

Indication

Corrigé

On écrit $e^x=\sum_{k=0}^{100}\frac{x^k}{k!}+o(x^{100})$, de sorte que

$$\begin{aligned}\ln\left(\sum_{k=0}^{99}\frac{x^k}{k!}\right)&=\ln\left(e^x-\frac{x^{100}}{100!}+o(x^{100})\right)\\&=x-\ln\left(1-e^{-x}\left(\frac{x^{100}}{100!}+o(x^{100})\right)\right)\end{aligned}$$

Mais $e^{-x}=1+o(1)$, et donc

$$\ln\left(\sum_{k=0}^{99}\frac{x^k}{k!}\right)=x-\ln\left(1-\frac{x^{100}}{100!}+o(x^{100})\right).$$

On en déduit finalement :

$$\ln\left(\sum_{k=0}^{99}\frac{x^k}{k!}\right)=x-\frac{x^{100}}{100!}+o(x^{100}).$$