sectionIGM@gmail.com
mp: sectionI123456

Cours de Probabilités & Statistique (L2 ST)

A.Menni

14 novembre 2015

Chapitre3 : Analyse Combinatoire

---

1 Introduction.

L'analyse combinatoire est une branche des Mathématiques qui sert à compter le nombre de façons de ranger un nombre fini d'objets. Elle comporte l'ensemble de toutes les techniques de dénombrement qui constituent un outil de base et un prérequis indisponsable qu'on utilise dans le calcul des probabilités.

2 Arrangements

Etant donné un ensemble E de n objets, on appelle **arrangement de p objets parmi n** toute suite **ordonnée** de p objets parmi les n objets de E.

Remarque

On a nécessairement $1 \leq p \leq n$ et $n, p \in \mathbb{N}^*$
Si $n < p$ alors le nombre d'arrangements possibles est nul.

2.1 Arrangements sans répétition

Lorsque chaque objet ne peut être observé qu'une seule fois dans un arrangement, ces arrangements sont dit 'sans répétition'. Le nombre d'arrangements sans répétition de p objets parmi n est donné par :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemples

1. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire une à une et sans remise p boules. Combien de tirage différents peut-on faire ?

2. Une course oppose 20 concurrents. On souhaite récompenser les trois premiers en leur offrant respectivement : une médaille en or, une en argent et une en bronze. Combien y-a-t-il de podiums possibles ?

2.2 Arrangements avec répétition

Lorsqu'un objet peut être observé plusieurs fois dans un arrangement, le nombre d'arrangements avec répétition de p objets parmi n est donné par :

$$\bar{A}_n^p = n^p$$

Exemples

1. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. Combien de tirages différents, de p boules, peut on faire si chaque boule tirée est remise dans l'urne ?

2. Combien de mots différents à 4 lettres peut-on ~~fomer~~ former ? (peu importe si le mot a un sens ou non)

3 Permutations

Etant donné un ensemble E de n objets, on appelle **permutation de n objets distints** toute suite **ordonnée** de ces n objets.

3.1 Permutations sans répétition

Lorsque chaque objet ne peut être observé qu'une seule fois dans la permutation, le nombre de permutations sans répétition est donné par :

$$P_n = n!$$

Exemples

1. On souhaite ranger sur une étagère 10 livres distincts. De combien de façons possibles peut-on effectuer ce rangement ? 10!

2. 30 étudiants entrent dans une salle de TD qui comporte 30 places. De combien de façons possibles ces étudiants peuvent occuper la salle ?

3.2 Permutations avec répétition

Si les n objets de E sont partitionnés en k groupes $G_1, G_2, \ldots, G_k$, de cardinaux respectifs $n_1, n_2, \ldots, n_k$, et que à l'intérieur de chaque groupe les objets sont identiques, le nombre de permutations possibles des n objets doit être rapporté aux nombre de permutations des n_i objets à l'intérieur de chaque groupe G_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$:

$$\bar{P}_n = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$ nbr de répétition

Exemples

1. Combien de mots possibles peut-on écrire en permutant les 7 lettres du mot 'CELLULE' ?

2. Combien de numéros de téléphones mobiles peut-on composer à l'aide des mêmes chiffres de votre numéro et ayant le même indicatif ?

4 Combinaisons

Etant donné un ensemble E de n objets, on appelle **combinaison de p objets parmi n** tout **ensemble** de p objets parmi les n objets de E. On parle alors d'**ensemble** et non pas de **suite** car, pour les combinaisons, la notion d'ordre des objets n'est plus prise en compte.

4.1 Combinaison sans répétition

Le nombre de combinaisons de p objets pris parmi n sans remise est donné par :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

4.2 Exemples

1. Un fleuriste désire composer des bouquets de roses avec trois couleurs chacun. Il dispose dans son magasin d'une gamme de roses de dix couleurs différentes. Combien de bouquets possibles peut-il former ?

2. Un enseignant désire confectionner un QCM qui comporte 10 questions. Pour ce faire, il choisit au hasard parmi 40 questions différentes ayant déjà été traitée en cours. Combien de sujets différents peut-il préparer ?

4.3 Combinaisons avec répétition

Ce paragraphe est omis dans ce cours.

Remarques

- $C_n^p = 0$ si $p > n$
- $C_n^p = C_n^{n-p}$. En particulier $C_n^0 = C_n^n = 1$ et $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$
- L'égalité $C_{n+1}^p = C_n^p + C_n^{p-1}$ est appelée **Formule du triangle de Pascal**
- L'identité $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$ est appelée **Formule du Binôme de Newton**

  Cas particulier : $2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$

Le Triangle de Pascal

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6	7	...
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
⋮									