Corrigé type du module « Traitement numérique du signal »

Ex#1 : (Filtre RII)

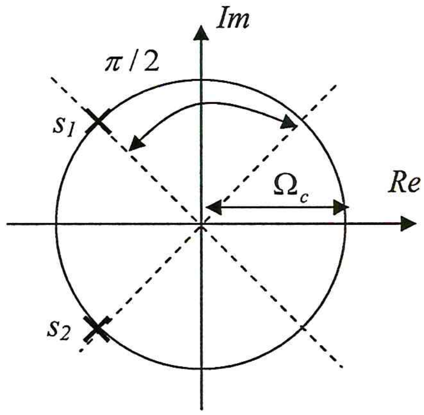
a- Calcul de la fonction de transfert analogique, $H_a(s)$:

Les spécifications sont : $\begin{cases} |H_a(j\Omega_p)| \geq -3dB, & \text{avec } \Omega_p = 0.25\pi \\ |H_a(j\Omega_s)| \leq -10dB, & \text{avec } \Omega_s = 0.45\pi \end{cases}$

D'après la FT du filtre analogique de Butterworth, on peut écrire :

$$\begin{cases} -10\log_{10}\left(1+(\Omega_p/\Omega_c)^{2N}\right) \geq -3 \\ -10\log_{10}\left(1+(\Omega_s/\Omega_c)^{2N}\right) \leq -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+\left(\dfrac{0.25\pi}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{3/10} \\ 1+\left(\dfrac{0.45\pi}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{10/10} \end{cases}$$

La combinaison des deux équations ci-dessus résulte



$$\begin{cases} N = \dfrac{1}{2}\dfrac{\log\left[(10-1)/(10^{3/10}-1)\right]}{\log((0.45\pi)/(0.25\pi))} \geq 1.8731 \\ \Omega_c = 0.45\pi 9^{-1/2N} = 0.7864 \end{cases}$$

On prend alors N=2 qui donne $\Omega_c = 0.8162$

Le cercle ci-contre permet d'obtenir les pôles de $H_a(s)$

$$\begin{cases} s_1 = -\Omega_c(\cos(\pi/4) + j\sin(\pi/4)) \\ s_2 = -\Omega_c(\cos(\pi/4) - j\sin(\pi/4)) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_1 = \dfrac{\Omega_c}{\sqrt{2}}(-1+j) \\ s_2 = \dfrac{\Omega_c}{\sqrt{2}}(-1-j) \end{cases}$$

La F.T est donnée par

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^2}{(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{\Omega_c^2}{s^2+\sqrt{2}\Omega_c s+\Omega_c^2}$$
$$= \frac{0.6662}{s^2+1.1543s+0.6662}$$

b- Calcul de la fonction de transfert numérique, $H(z)$ et la sortie du filtre $y(n)$:

On transforme d'abord $H_a(s)$ sous forme de fractions rationnelles:

$$\frac{\Omega_c^2}{(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{A_1}{s-s_1} + \frac{A_2}{s-s_2}$$

La méthode des résidus donne

$$\begin{cases} A_1 = \left.\dfrac{\Omega_c^2}{(s-s_2)}\right|_{s=s_1} = -j\Omega_c/\sqrt{2} \\ A_2 = \left.\dfrac{\Omega_c^2}{(s-s_1)}\right|_{s=s_2} = j\Omega_c/\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \quad H(z) = \frac{A_1}{1-e^{s_1}z^{-1}} + \frac{A_2}{1-e^{s_2}z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{A_1}{1-e^{s_1}z^{-1}} + \frac{A_2}{1-e^{s_2}z^{-1}} = \frac{j\dfrac{\Omega_c}{\sqrt{2}}(e^{s_2}-e^{s_1})z^{-1}}{1-(e^{s_1}-e^{s_2})z^{-1}+e^{s_1+s_2}z^{-2}}$$

$$= \frac{0.3536z^{-1}}{1-0.9410z^{-1}+0.3152z^{-2}}$$

On a $H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)}$. D'où $Y(z) = 0.3536z^{-1}X(z) + 0.9410z^{-1}Y(z) - 0.3152z^{-2}Y(z)$

On applique la transformée en Z inverse, on trouve finalement

$y(n) = 0.3536x(n-1) + 0.9410y(n-1) - 0.3152y(n-2)$

c- Calcul du filtre passe-haut :

Nous avons : $H(z) = \dfrac{0.3536z^{-1}}{1-0.9410z^{-1}+0.3152z^{-2}}$ avec $\Omega_c = 0.2503\pi$

La fréquence de coupure désirée est : $\omega_p = 0.7\pi$

En remplaçant $z^{-1} = -\dfrac{z^{-1}+\alpha}{1+\alpha z^{-1}}$ dans *H(z)*, on trouve

$$H(z) = \frac{-0.3536\dfrac{z^{-1}+\alpha}{1+\alpha z^{-1}}}{1+0.9410\dfrac{z^{-1}+\alpha}{1+\alpha z^{-1}}+0.3152\dfrac{(z^{-1}+\alpha)^2}{(1+\alpha z^{-1})^2}}$$

$$= \frac{-0.3536(z^{-1}+\alpha)(1+\alpha z^{-1})}{(1+\alpha z^{-1})^2+0.9410(z^{-1}+\alpha)(1+\alpha z^{-1})+0.3152(z^{-1}+\alpha)^2}$$

Où $\alpha = -\cos((\omega_p+\Omega_c)/2)/\cos((\omega_p-\Omega_c)/2)$=-0.1025

Ex #2 : (Filtre RIF)

a- Réponse impulsionnelle :

La conception du filtre RIF passe-haut est obtenue par le calcul de $h(n) = h_d(n)w(n)$

$$w(n) = \left[0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right]$$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\omega_2} e^{j\omega(n-\alpha)}d\omega + \int_{-\omega_1}^{\omega_1} e^{j\omega(n-\alpha)}d\omega + \int_{\omega_2}^{\pi} e^{j\omega(n-\alpha)}d\omega\right]$$

$$= \frac{\sin(\pi(n-\alpha))}{\pi(n-\alpha)} - \frac{\sin(\omega_2(n-\alpha))}{\pi(n-\alpha)} + \frac{\sin(\omega_1(n-\alpha))}{\pi(n-\alpha)} \qquad \text{pour } \alpha = (N-1)/2$$

$$= \sin c(\pi(n-\alpha)) - \frac{\omega_2}{\pi}\sin c(\omega_2(n-\alpha)) + \frac{\omega_1}{\pi}\sin c(\omega_1(n-\alpha))$$

On applique la limite $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$, alors $h(n)$ devient

$$h(n) = \begin{cases} \left[\sin c(\pi(n-\alpha)) - \frac{\omega_2}{\pi}\sin c(\omega_2(n-\alpha)) + \frac{\omega_1}{\pi}\sin c(\omega_1(n-\alpha))\right]\left[0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right], & n \neq \alpha \\ \left(1 - \frac{\omega_2}{\pi} + \frac{\omega_1}{\pi}\right)\left[0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right], & n = \alpha \end{cases}$$

b- La phase et l'amplitude de la réponse fréquentielle :

La symétrie de $h(n)$ par rapport à α =3, montre que $b_0 = b_6$, $b_1 = b_5$ et $b_2 = b_4$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j3\omega}\left(b_0(e^{j3\omega} + e^{-j3\omega}) + b_1(e^{j2\omega} + e^{-j2\omega}) + b_2(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + b_3\right)$$
$$= e^{-j3\omega}\left(2b_0\cos(3\omega) + 2b_1\cos(2\omega) + 2b_2\cos(\omega) + b_3\right)$$

Alors

$$\begin{cases} \varphi = -3\omega \quad \textit{(la phase est linéaire)} \\ \left|H(e^{j\omega})\right| = 2b_0\cos(3\omega) + 2b_1\cos(2\omega) + 2b_2\cos(\omega) + b_3 \quad \textit{(Amplitude est non linéaire)} \end{cases}$$

Ex #3 : (TFD)

a-Calcul de la TFD de $\tilde{x}(n)$:

N=8 et a=0.75

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{kn} \quad \text{avec} \quad W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} a^n W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1}\left(aW_N^k\right)^n$$

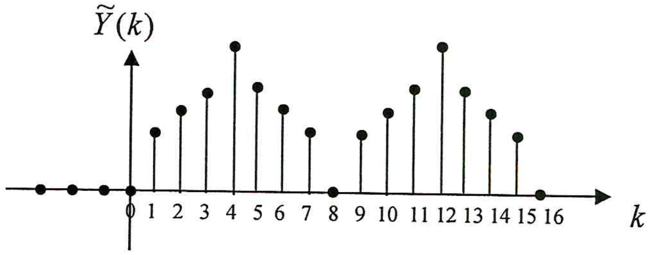
On applique le résultat de la série géométrique. D'où

$$\tilde{X}(k) = \frac{1-a^N W_N^{kN}}{1-aW_N^k} = \frac{1-a^N}{1-ae^{-j\frac{2\pi}{N}k}} = \frac{1-a^N}{1-a\cos(2\pi k/N) + ja\sin(2\pi k/N)}$$

b- Calcul de la forme de $\tilde{Y}(k)$:

Nous avons :

$$\begin{cases} \tilde{y}(0) = \tilde{x}(0) \\ \tilde{y}(1) = 0 \\ \tilde{y}(2) = \tilde{x}(1) \\ \tilde{y}(3) = 0 \\ \tilde{y}(4) = \tilde{x}(2) \\ . \\ \tilde{y}(14) = \tilde{x}(7) \\ \tilde{y}(15) = 0 \end{cases}$$



$$\tilde{Y}(k) = \sum_{n=0}^{15} \tilde{y}(n) W_{16}^{kn} = \sum_{n=0}^{7} \tilde{y}(2n) W_{16}^{k2n} = \sum_{n=0}^{7} \tilde{y}(2n) W_{8}^{kn}$$

$$\tilde{Y}(0) = \sum_{n=0}^{7} \tilde{y}(2n) W_{8}^{0n} = \sum_{n=0}^{7} \tilde{x}(n) W_{8}^{0n} = \tilde{X}(0)$$

$$\tilde{Y}(1) = \sum_{n=0}^{7} \tilde{y}(2n) W_{8}^{n} = \sum_{n=0}^{7} \tilde{x}(n) W_{8}^{n} = \tilde{X}(1)$$

.

$$\tilde{Y}(8) = \sum_{n=0}^{7} \tilde{y}(2n) W_{8}^{8n} = \sum_{n=0}^{7} \tilde{x}(n) W_{8}^{8n} = \tilde{X}(0)$$

.

$$\tilde{Y}(15) = \sum_{n=0}^{7} \tilde{y}(2n) W_{8}^{7n} = \sum_{n=0}^{7} \tilde{x}(n) W_{8}^{7n} = \tilde{X}(7)$$