République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement supérieur et de La Recherche Scientifique

Université : **Hassiba BENBOUALI de CHLEF**
Faculté **: Sciences**
Département : **Physique**
Domaine : **ST-SM**

Polycopie:

Vibrations et Ondes Mécaniques

Rappels de Cours
Problèmes posés aux concours d'entrée aux Grandes Ecoles Scientifiques

Module **: Physique 03**
Niveau : **2^{ième} Année Licence**

Présenté par:

Dr Fouad BOUKLI HACENE

Année Universitaire **: 2012 /2013**

Avant propos

Ce document a été destiné aux étudiants de deuxième année des filières scientifiques techniques des universités et écoles d'ingénieurs d'Algérie. Il répond au programme officiel du module « Vibrations et Ondes mécaniques » enseignés en deuxième année des filières Sciences et techniques et Sciences de la matière.

Ce manuel contient une série de problèmes liés aux phénomènes de vibrations et de propagation des ondes mécaniques avec un rappel de cours.

Le manuscrit est divisé en deux grandes parties, vibrations et ondes mécaniques réparties en sept chapitres. Le premier porte sur l'utilisation du formalise de Lagrange pour décrire les oscillations des systèmes physiques. L'étude des oscillations linéaires (de faible amplitude) libres des systèmes à un degré de liberté est présentée dans le chapitre deux. Le troisième chapitre traite le mouvement amorti qui prend en compte les forces de frottements de viscosité proportionnelles à la vitesse du mobile.

La notion de résonance consacrée aux oscillations forcées est présentée au quatrième chapitre. Le cinquième chapitre sur les vibrations aux plusieurs degrés de liberté. Les analogies entre les systèmes électriques et mécaniques sont présentées les cinq chapitres.

Le deuxième volet du programme recommande d'introduire l'initiation des phénomènes liés à la propagation des ondes mécaniques dans différents milieux matériels. A cet effet nous avons pris le, comme le modèle de la corde vibrante.

Dr Fouad BOUKLI HACENE

Nomenclature

$p(t)$	Coordonnées généralisées
E_T	Energie totale du système
E_c	Energie Cinétique du système
$\overline{E}_c$	Energie Cinétique moyenne du système
E_p	Energie potentielle su système
L	Lagrangien du système
S	Action du système
$\vec{F}_{exe}$	Forces extérieures appliquées au système
$\vec{M}_{exe}$	Moments extérieurs appliqués au système
ω_0	Pulsation propre du mouvement libre
A	Amplitude
φ	Déphasage
T_0	Période propre du mouvement libre
k	Constante de raideur du ressort
C	Constante de torsion
J	Moment d'inertie
R	Rayon d'un disque
m	Masse d'un système
x_i	Coordonnées du système
$\vec{V}$	Vitesse du déplacement

ρ	Masse volumique
l	Longueur du ressort
l_0	Longueur du ressort à vide
P_0	Pression du gaz à l'équilibre
V_0	Volume du gaz à l'équilibre
dx	Tranche d'élément entre les positions x et $x+dx$
C_{ap}	Capacité électrique
L_{ind}	Capacité électrique
q	Charge qui circule dans le circuit
$u(t)$	Tension d'alimentation
$\vec{f}_{fr}$	Force de frottement
α	Coefficient de frottement
λ	Facteur d'amortissement
ω	Pseudo Pulsation du mouvement faiblement amorti
T	Pseudo Période du mouvement faiblement amorti
$f(t)$	Force extérieure appliquée au système
Ω	Pulsation Force extérieure appliquée au système
$p_g(t)$	Solution générale du mouvement force
$p_p(t)$	Solution particulière
Ω_r	Pulsation de résonance du mouvement forcé
Ω_1, Ω_2	Pulsation de coupure en régime forcé
$\Delta\omega$	Bande passante

Q	Facteur de qualité
$\tilde{Z}$	Impédance
μ	Masse linéique de la corde
σ	Masse surfacique
T	Tension de la corde
τ	Tension linéaire
E	Constante de Young
λ_w	Longueur d'onde
k_0	Vecteur d'onde
V	Vitesse de propagation
χ_s	Coefficient de compressibilité

DEDICACES

Je dédie ce travail en signe de respect et de reconnaissance à:

- Mes chers parents pour tous les sacrifices qu'ils ont consentis, pour tous les encouragements ainsi que pour leur soutient moral et matériel qui m'a permis d'achever ce travail.

Je le dédie également à:

- Ma très chère femme et mes chers enfants
- Mes chers frères et sœurs
- Mes oncles et tantes
- Toute ma famille et mes proches

Sommaire

PARTIE I

VIBRATIONS

Chapitre 1:

Généralités sur les oscillations

<u>Rappel théorique :</u>

- La vibration est un phénomène physique oscillatoire d'un corps en mouvement autour de sa position d'équilibre.
- Parmi les mouvements mécaniques les plus variés, il existe des mouvements qui se répètent : les battements du cœur, le mouvement d'une balançoire, le mouvement alternatif des pistons d'un moteur à explosion. Tous ces mouvements ont un trait commun : une répétition du mouvement sur un *cycle*.
- Un cycle est une suite ininterrompue de mouvements ou de phénomènes qui se renouvellent toujours dans le même ordre. Prenez à titre d'exemple le cycle à quatre temps d'un moteur à explosion. Un cycle complet comprend quatre étapes (admission, compression, explosion, échappement) qui se répètent durant un cycle moteur.
- On appelle mouvement périodique un mouvement qui se répète et dont chaque cycle se reproduit identiquement. La durée d'un cycle est appelée période.
- Un mouvement périodique particulièrement intéressant dans le domaine de la mécanique est celui d'un objet qui se déplace de sa position d'équilibre et y revient en effectuant un mouvement de va-et-vient par rapport à cette position.
- Ce type de mouvement périodique se nomme oscillation ou mouvement oscillatoire. Les oscillations d'une masse reliée à un ressort, le mouvement d'un pendule ou les vibrations d'un instrument à corde sont des exemples de mouvements oscillatoires.
- Tout système mécanique, incluant les machines industrielles les plus complexes, peut être représenté par des modèles formés d'un ressort, un amortisseur et une masse. Le corps humain, souvent qualifié de "belle mécanique", est décomposé à la figure 1.1 en plusieurs sous-systèmes "masse-ressort-amortisseur" représentant la tête, les épaules, la cage thoracique et les jambes ou les pieds.

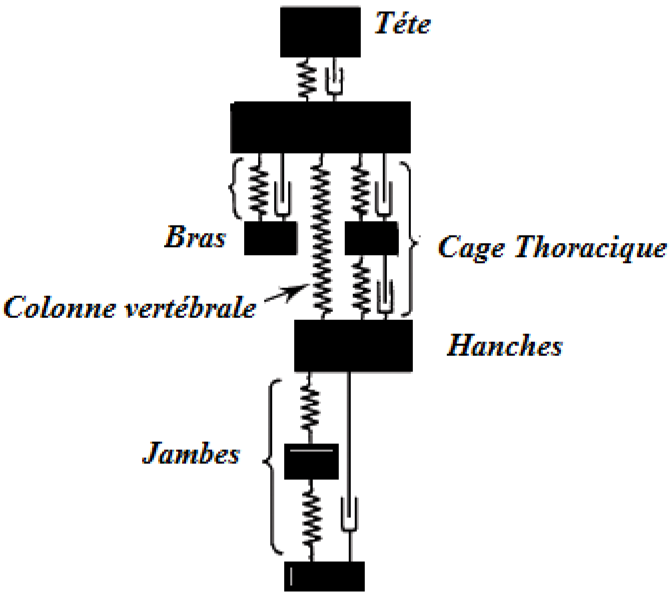


Figure 1.1 : Modélisation masse-ressort-amortisseur de l'homme.

- Pour comprendre le phénomène vibratoire, on associe à tous les systèmes physiques un système "masse-ressort" qui constitue un excellent modèle représentatif pour étudier les oscillations comme suit, figure 2.1 :

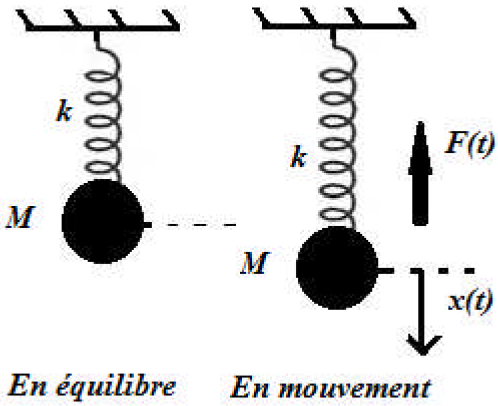


Figure 2.1: Schéma masse-ressort

F(t) s'appelle la force de rappelle qui est proportionnelle à l'allongement ***x(t)***. La constante ***k*** est appelée la constante de raideur.

- Il existe deux autres configurations pour le système masse-ressort, figure 3.1 :

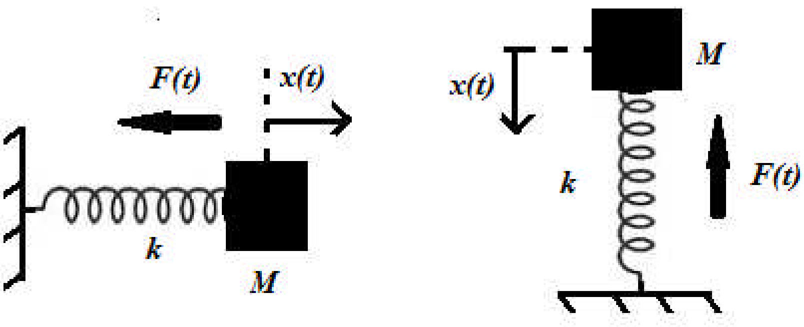


Figure 3.1 : Trois autres configurations pour le système masse-ressort

- La représentation de plusieurs ressorts se présente en deux cas :
  - ❖ En parallèle, figure 4.1 :

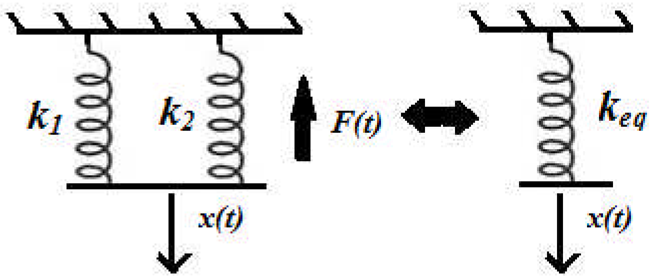


Figure 4.1 : Ressorts en parallèles

La raideur équivalente est la somme des raideurs $\boldsymbol{k_1}$ et $\boldsymbol{k_2}$ telle que :

$$k_{eq} = k_1 + k_2$$

  - ❖ En série, figure 5.1 :

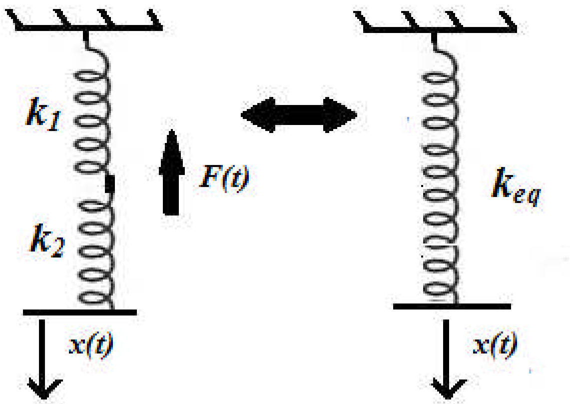


Figure 5.1 : Ressorts en séries

La raideur équivalente pour les constantes $\boldsymbol{k_1}$ et $\boldsymbol{k_2}$ telle que :

$$\frac{1}{k_{eq}}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}$$

- Un système physique oscillant est repéré par la coordonnée généralisée $\boldsymbol{p}$ qui est définit par l'écart par rapport à la position d'équilibre stable.
- On définit $\boldsymbol{q}$ le nombre de degré de liberté par le nombre de mouvements indépendants d'un système physique qui détermine le nombre d'équations différentielles du mouvement.
- L'énergie cinétique d'un système mécanique s'écrit sous la forme :

$$E_c=\sum_{n\succ 1}\frac{1}{2}m_i\dot{p}_i^2$$

- L'énergie potentielle d'un système mécanique s'écrit à partir de développement limité de Taylor sous la forme:

$$E_p=E_p(0)+\frac{\partial E_p}{\partial p}\Big|_{p=0}p+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E_p}{\partial p^2}\Big|_{p=0}p^2+\frac{1}{6}\frac{\partial^3 E_p}{\partial p^3}\Big|_{p=0}p^3+\ldots$$

❖ La valeur $p=0$ correspond à la position d'équilibre du système caractérisée par :

$$\frac{\partial E_p}{\partial p_i}\Big|_{p=0}=0$$

- Il existe deux types d'équilibre :

❖ Equilibre stable, figure 6.1 :

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial p^2}\Big|_{p=0}\succ 0$$

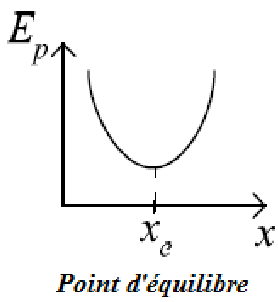


Figure 6.1: Equilibre stable

❖ Equilibre instable, figure 7.1 :

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial p^2}\Big|_{p=0} \prec 0$$

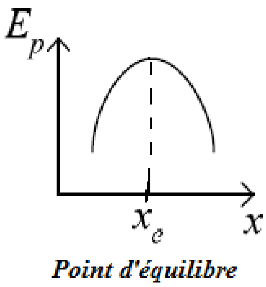


Figure 7.1: Equilibre instable

- Le mouvement oscillatoire est dit linéaire si cet écart est infinitésimal. Ainsi, l'énergie potentielle prend la forme quadratique en fonction de l'écart par rapport à la position d'équilibre telle que :

$$E_p \cong \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E_p}{\partial p^2}\Big|_{p=0} p^2$$

La constante $\frac{\partial^2 E_p}{\partial p^2}$ est appelée la constante de rappelle.

Ainsi ; la force de rappelle prend la forme linéaire en fonction de l'allongement et opposée au mouvement telle que:

$$\vec{F}(t) \cong -\frac{\partial^2 E_p}{\partial p^2}\Big|_{p=0} \vec{p}$$

- L'équation du mouvement pour un système conservatif peut être déterminée par trois méthodes :

❖ Principe de la conservation d'énergie totale :

$$E_T = E_c + E_p = Cons\tan te \quad \Rightarrow \quad \frac{dE_T}{dt} = 0$$

Où E_T est appelée l'énergie totale du système.

❖ Loi dynamique de Newton :

$$\sum_{n \succ 1} \vec{F}_i = m_i \vec{a}_i$$

Où $\vec{a}_i$ est appelée l'accélération des composantes du système.

❖ Méthode de Lagrange :

$$L = E_c - E_p = Constante$$

Où L est le Lagrangien du système. Dans ce cas les forces dérivent d'un potentiel et le mouvement du système est conservatif.

❖ Après l'application le principe de moindre action, on obtient l'équation d'Euler- Lagrange comme suit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial p_i} = 0 \qquad i = 1,n$$

- L'équation du mouvement pour un système dissipatif (non conservatif) peut être déterminée comme suit :

❖ Système en translation :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial p_i} = \overline{\sum\left|\vec{F}_{ext}\right|} \qquad i = 1,n$$

Où $\vec{F}_{ext}$ sont les forces extérieures appliquées au système.

❖ Système en rotation

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial p_i} = \overline{\sum\left|\vec{M}_{ext}\right|} \qquad i = 1,n$$

Où $\vec{M}_{ext}$ sont les moments extérieurs appliqués au système.

Dans ce cas les forces ne dérivent pas d'un potentiel.

Chapitre 2 :

Mouvement libre à un degré de liberté

Rappels théoriques:

Un système isolé oscillant à un degré de liberté est déterminé par la coordonnée généralisée p qui est l'écart par rapport à l'équilibre stable.

- On définit l'oscillation harmonique par l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{p}(t)+\omega_0^2\, p(t)=0$$

Où ω_0 est appelée la pulsation propre du système.

- On définit la période propre T_0 comme suit :

$$T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}$$

- La solution de cette équation différentielle est de forme sinusoïdale tel que :

$$p(t)=A\cos(\omega_0 t+\phi)$$

Où A représente l'amplitude des oscillations et ϕ est le déphasage. Les constantes A et ϕ sont déterminées par les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} p(t=0)=p_0 \\ \dot{p}(t=0)=\dot{p}_0 \end{cases}$$

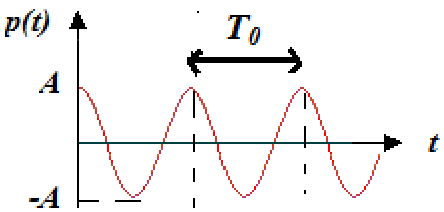


Figure 2.1 : Mouvement sinusoïdal

- Il faut signaler que toutes les oscillations de faible amplitude autour de la position d'équilibre peuvent être assimilées à des mouvements linéaires et l'énergie potentielle peut s'exprimer sous forme quadratique de la coordonnée généralisée p.

- En revanche, au-delà d'une certaine amplitude l'oscillation devient non linéaire.

- Exemples :

  - ❖ Ressort :

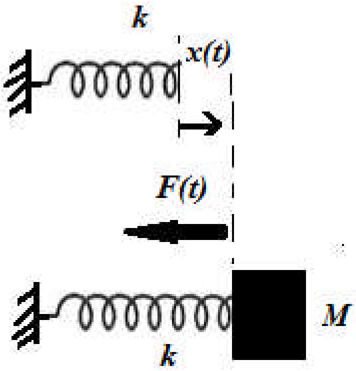


Figure 2.2 : Mouvement linéaire d'un ressort

Le vecteur de position :

$$o\vec{m} = x\vec{i} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \dot{x}\vec{i}$$

L'énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

L'énergie potentielle pour des petites oscillations, s'écrit:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

Alors, le Lagrangien du système est de forme:

$$L = E_c - E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

L'équation de mouvement est de forme :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -kx \quad \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0 \; avec \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

La solution de l'équation différentielle :

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

❖ Pendule simple :

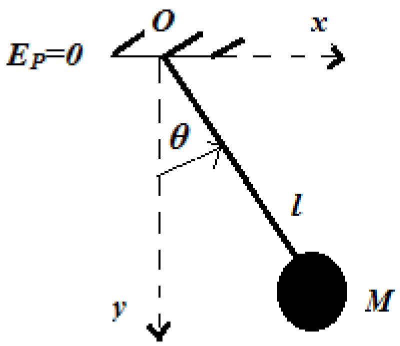


Figure 2.3 : Mouvement linéaire d'un pendule simple

Le vecteur de position :

$$o\vec{m}\begin{pmatrix} x = l\sin\theta \\ y = l\cos\theta \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}\begin{pmatrix} \dot{x} = l\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y} = -l\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |v|^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (l\dot{\theta})^2$$

L'énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml\dot{\theta}^2$$

L'énergie potentielle :

$$E_p = mgl\cos\theta$$

Alors, le Lagrangien du système s'écrit :

$$L = E_c - E_p = \frac{1}{2}ml\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta$$

L'équation de mouvement pour des petites oscillations, est :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml\dot{\theta} \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta \quad \Rightarrow ml\ddot{\theta} + mgl\theta = 0 \; avec \quad \sin\theta \cong \theta$$

La pulsation propre est égale :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

La solution de l'équation différentielle est de forme :

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Applications :

Problème 1:

Soient les systèmes mécaniques suivants :

- Une poulie de masse M, de moment d'inertie J, et de rayon R, suspendue au point O par un ressort de raideur k. Le fil inextensible glisse sur la poulie sans frottement relié par une masse m, figure 2.4.
- Un système de bras rigidement liés et tournant dans le plan de la figure autour du point fixe O. A l'équilibre le bras L_3 est vertical, figure 2.5.
- Un système hydraulique de forme U constitué de deux tuyaux cylindriques de sections S_1, S_3 reliés par un autre cylindre de section S_2 et de longueur B qui contient un liquide de masse volumique ρ. Le système est équivalent à un ressort de raideur k_e et de masse M_e. A l'équilibre le liquide a la hauteur H, figure 2.6.

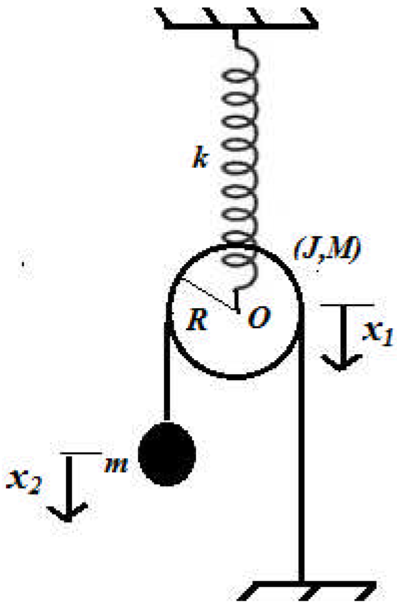


Figure 2.4

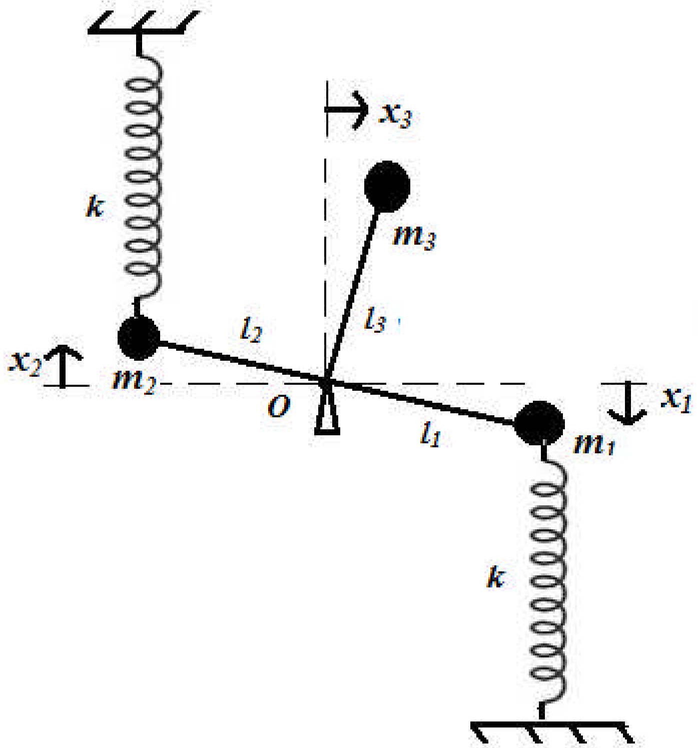


Figure 2. 5

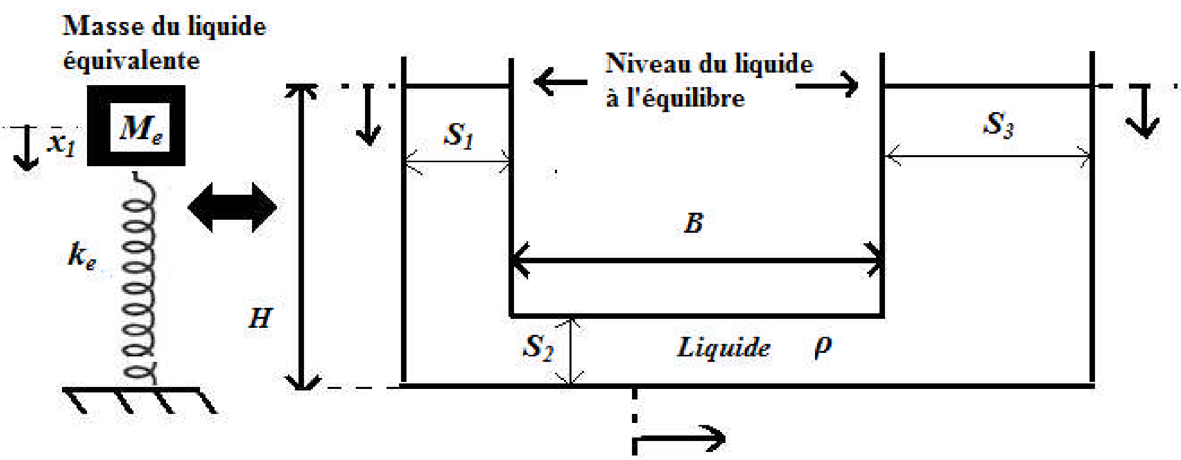


Figure 2. 6-

Dans le cas des oscillations linéaires, déterminer pour chaque système :

- Le nombre de degré de liberté.
- L'énergie cinétique, l'énergie potentielle. En déduire le Lagrangien.
- L'équation différentielle du mouvement.
- La période propre.

Solutions :

- **Figure 2.4:**

La figure 2.4 est représentée en état d'équilibre (Figure 2.4a) et en état de mouvement (Figure 2.4b). Les paramètres, (X_{01}, X_{02}) et (X_1, X_2) représentent respectivement les positions des masses *M* et *m* en état d'équilibre et en mouvement.

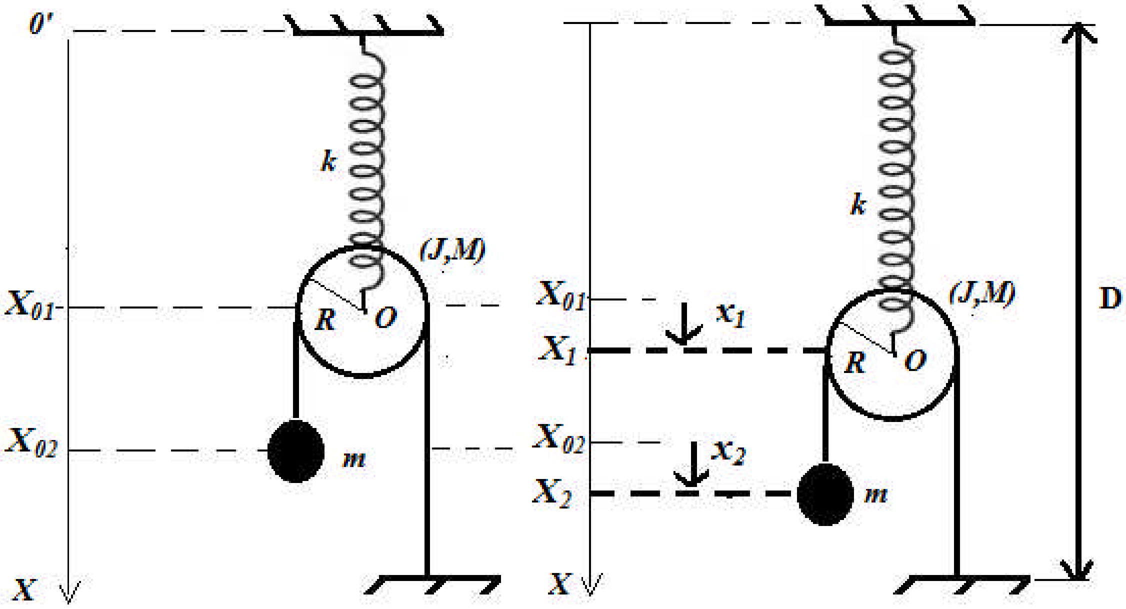


Figure 2.4-a
En équilibre

Figure 2.4-b
En mouvement

- Le nombre de degré de liberté :

La longueur du fil *l* est la même en mouvement et en équilibre tel que:

En équilibre :

$$l = D - X_{01} + \pi R + (X_{02} - X_{01})$$

En mouvement :

$$l = D - X_1 + \pi R + (X_2 - X_1)$$

Apres l'égalité des deux équations, on obtient :

$$x_2 = 2x_1 \Rightarrow \quad x_1, x_2 \text{ sont} \quad \text{dépendants}$$

Le nombre de degré de liberté est alors égal à 1.

- Le Lagrangien est :

L'énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2$$

L'énergie potentielle:

$$E_p = \frac{1}{2}kx_1^2$$

Le Lagrangien s'écrit alors :

$$L = E_c - E_p = \frac{1}{2}(M + 2m + \frac{J}{R^2})\dot{x}_1^2 - \frac{1}{2}kx_1^2$$

- L'équation différentielle est :

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_1 + (\frac{k}{M + 4m + \frac{J}{R^2}})x_1 = 0$$

- La période propre T_0 :

$$T_O = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{M + 4m + \frac{J}{R^2}}}}$$

Figure 2.5:

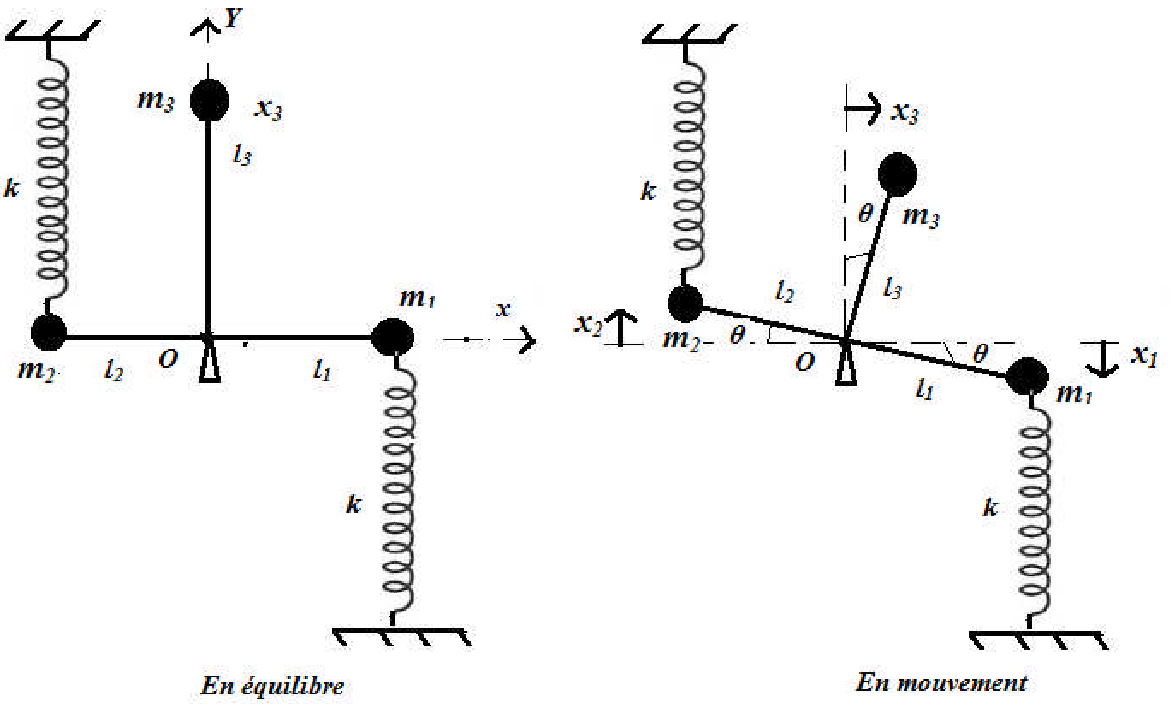


Figure 2.5-a

Figure 2.5 b

- Le nombre de degré de liberté :

On définit les déplacements infinitésimaux comme suit :

$$x_1 = l_1\theta, x_2 = l_2\theta, x_3 = l_3\theta \Rightarrow \quad x_1, x_2, x_3 \; sont \quad dépendants$$

Le nombre de degré de liberté est égal à 1

- Le Lagrangien :

L'énergie cinétique :

$$E_c = \sum_{i\geq 1} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_3 l_3^2 \dot{\theta}^2$$

L'énergie potentielle :

$$E_p = \frac{1}{2} k l_1^2 \theta^2 + \frac{1}{2} k l_2^2 \theta^2 - m_3 g l_3 \cos\theta$$

Le Lagrangien s'écrit alors :

$$L = E_c - E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} m_i l_i^2 \dot{\theta}_i^2 - \frac{1}{2} k \sum_{i=1}^{2} (l_i \theta)^2 - m_3 g l_3 \cos\theta$$

- L'équation différentielle est :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \left(\frac{k l_2^2 + k l_1^2 + m g l_1}{\sum_{i=1}^{3} m_i l_i^2}\right)\theta = 0$$

- La période propre T_0 :

$$T_O = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{k l_2^2 + k l_1^2 + m g l_1}{\sum_{i\geq 1} m_i l_i^2}}}$$

Figure 2.6*:*

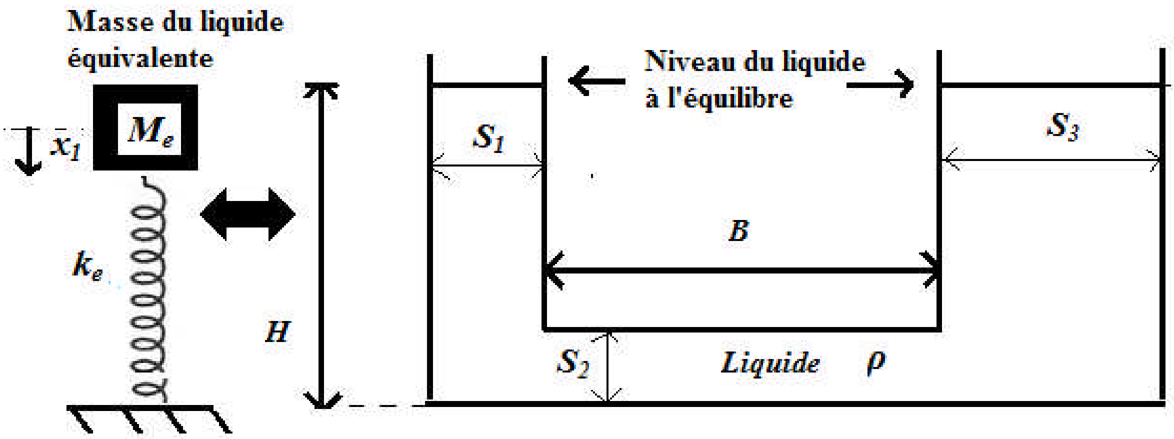


Figure 2. 6-a:Niveau du liquide à l'équilibre

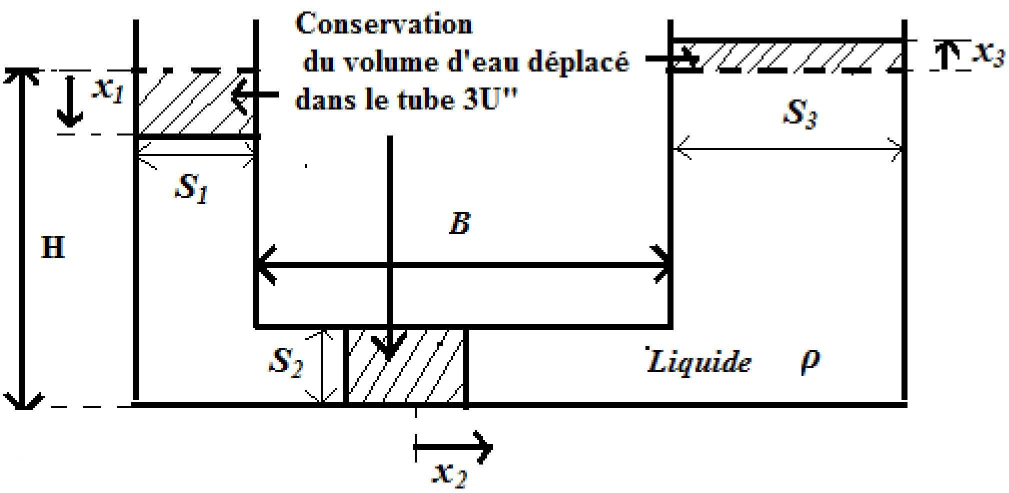


Figure 2.6-b Liquide dans le tube est en mouvement

- Le nombre de degré de liberté :

  On a la conservation du volume d'eau déplacé dans le tube en forme **U** d'où,

  $S_1 x_1 = S_2 x_2 = S_3 x_3 \Rightarrow$ *les coordonnées* x_1, x_2, x_3 *sont dépendantes*

  Donc le nombre de degré de liberté est égal a 1

- Le Lagrangien :

  L'énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} m_i \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2} M_e \dot{x}_1^2 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1^2 \rho h S_1 (1+\frac{B}{h}\frac{S_1}{S_2}+\frac{S_1}{S_3}) = M_e \dot{x}_1^2 \\ Avec \\ m_1 = \rho h S_1 , m_2 = \rho B S_2 , m_3 = \rho h S_3 \end{cases} \Rightarrow \ M_e = \rho h S_1 (1+\frac{B}{h}\frac{S_1}{S_2}+\frac{S_1}{S_3})$$

L'énergie potentielle :

On calcule la constante de rappelle à partir de l'énergie potentielle, on a alors :

$$E_p = \frac{1}{2} k_e x_1^2 \Rightarrow \ |F| = |k_e x_1| = |S_1 \Delta P| = S_1 \rho g(x_1 + x_3) = S_1 g h(1+\frac{S_1}{S_3}) x_1 \Rightarrow \ k_e = S_1 g h(1+\frac{S_1}{S_3})$$

Le Lagrangien du système s'écrit alors :

$$L = E_c - E_p$$

$$L = \sum_{i\geq 1} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i\geq 1} k_i x_i^2 = \frac{1}{2} M_e \dot{x}_1^2 - \frac{1}{2} k_e x_1^2$$

- L'équation différentielle est :

$$\ddot{x}_1 + (\frac{k_e}{M_e}) x_1 = 0$$

- La pulsation propre ω_0 est :

$$\omega_0^2 = \frac{k_e}{M_e} = \frac{S_1 g h(1+\frac{S_1}{S_3})}{\rho h S_1 (1+\frac{B}{h}\frac{S_1}{S_2}+\frac{S_1}{S_3})}$$

Problème 2:

On modélise le mouvement d'un baffe d'une radio par un résonateur d'HELMOTZ, présenté comme un gaz parfait de pression P_0, de volume V_0 à l'équilibre thermique, enfermé dans une enceinte reliée par un piston de masse m qui oscille sans frottement suivant l'axe Ox comme le montre la figure (2.7)ci-dessous.

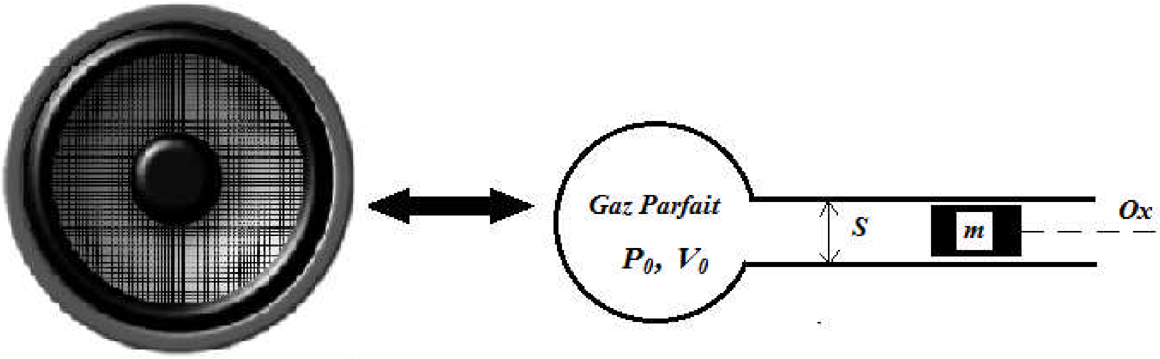
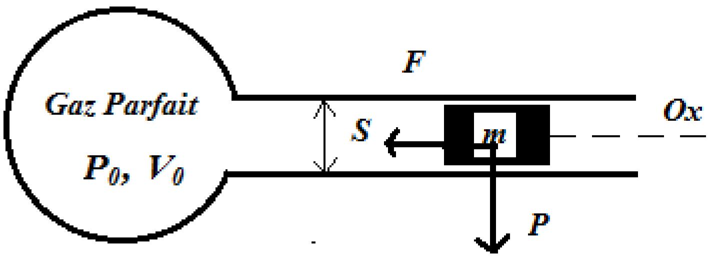


Figure:2.7: *Modélisation de mouvement d'un baffe-Résonateur d'Helmotz*

L'ensemble du système évolue en opération adiabatique.

- Déterminer l'équation différentielle du mouvement en appliquant la loi fondamentale de la dynamique.
- En déduire la pulsation propre du système et la solution générale.

Solutions :



- En appliquant la méthode des forces on obtient :

$$\sum_{i\geq 1}\vec{F}_i = m\vec{a} \Rightarrow \quad \vec{P} + \vec{F}_{rap} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} Sur : Ox \\ -S\Delta P = m\ddot{x} \end{cases}$$

Puisque l'opération est adiabatique, on a:

$$PV^{\gamma} = c = cons\tan te \Rightarrow \quad \frac{\Delta P}{P_0} = -\gamma\frac{\Delta V}{V_0} \Rightarrow \quad \Delta P = -\gamma\frac{P_0}{V_0}Sx$$

- L'équation différentielle s'écrit alors :

$$\ddot{x} + (\frac{P_0 S^2 \gamma}{V_0 m})x = 0$$

- La pulsation propre est :

$$\omega_0^2 = \frac{P_0 S^2 \gamma}{V_0 m}$$

- La solution générale est :

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Problème 3:

Soient les systèmes mécaniques constitués par une tige de masse négligeable reliée par un ressort de raideur *k* représentés dans les figures 2.8 et 2.9 comme suit:

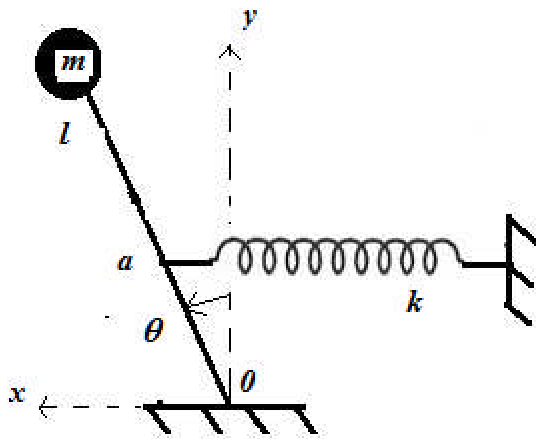


Figure 2.8

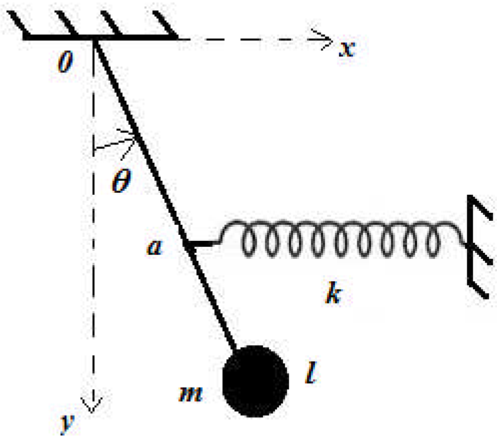


Figure 2.9

Pour des petites oscillations, déterminer pour le système de la figure (2.8):

- Le Lagrangien.
- L'équation différentielle du mouvement.
- La pulsation propre et la solution générale.

En déduire pour le système de la figure (2.9) :

- L'équation différentielle du mouvement ainsi que la solution générale **sans faire des calculs**.

Solutions :

Figure (2.8) :

- L'énergie cinétique

$$o\vec{m} = \begin{pmatrix} x = l\sin\theta \\ y = l\cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \vec{V}_m = o\dot{\vec{m}} = \begin{pmatrix} \dot{x} = l\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y} = -l\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix} \Rightarrow \quad E_c = \frac{1}{2}mV_m^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

L'énergie potentielle pour deux systèmes :

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 + mgl\cos\theta$$

- Le Lagrangien s'écrit alors :

$$L = E_c - E_p = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}kx^2 - mgl\cos\theta$$

- L'équation différentielle du mouvement est :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad \Rightarrow \ddot{\theta} + \left(\frac{ka^2 - mgl}{ml^2}\right)\theta = 0$$

- La pulsation propre est :

$$\omega_0^2 = \frac{ka^2 - mgl}{ml^2}$$

- La solution générale est :

$$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Figure (2.7) :

- L'équation différentielle du mouvement est :

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{ka^2 + mgl}{ml^2}\right)\theta = 0$$

- La solution générale est :

$$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Problème 4:

On considère un fléau constitué d'une tige métallique de masse négligeable, de longueur l portant deux masses m et M, tournant sans frottement autour de son axe au point fixe O comme le montre la figure 2.10. A l'équilibre la barre est horizontale.

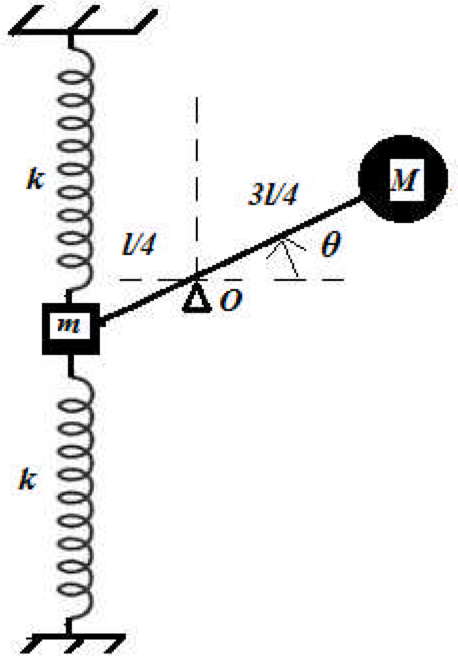


Figure 2.10

Déterminer:

- La condition d'équilibre et l'allongement du ressort.
- Le Lagrangien du système
- L'équation différentielle du mouvement, la pulsation propre et la période propre.
- La solution générale avec les conditions initiales suivantes :

$$x(t=0)=0 \text{ et } \overset{*}{x}(t=0)=v_0$$

- ***Application numérique*** : *m=M=1Kg, k=20N/m*

Solutions :

- Le lagrangien :

  On a les déplacements infinitésimaux comme suit :

$$x_1=\frac{l}{4}\theta , x_2=\frac{3l}{4}\theta \Rightarrow \quad x_1 , x_2 \quad sont \quad dépandants$$

On a donc un seul degré de liberté.

L'énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}_2^2 = \frac{1}{2}m(\frac{1}{4}l\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}M(\frac{3}{4}l\dot{\theta})^2 \text{ avec } \quad x_1 = \frac{l}{4}\theta, x_2 = \frac{3l}{4}\theta$$

L'énergie potentielle :

$$E_p = \frac{1}{2}k(\frac{l}{4}\theta)^2 + \frac{1}{2}k(-\frac{l}{4}\theta)^2$$

Le Lagrangien s'écrit alors :

$$L = E_c - E_p = \frac{1}{2}m(\frac{1}{4}l\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}M(\frac{3}{4}l\dot{\theta})^2 - k(\frac{l}{4}\theta)^2 \Rightarrow \quad L = \frac{1}{2}\frac{l^2}{16}\dot{\theta}^2(9M+m) - k(\frac{l}{4}\theta)^2$$

- L'équation différentielle du mouvement :

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{2k}{m+9M}\theta = 0$$

- La pulsation propre ω_0 et la période propre sont :

$$\omega_0^2 = \frac{2k}{m+9M}$$

$$T_O = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2k}{m+9M}}}$$

- La solution générale est :

$$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Problème 5 :

Soit un disque de masse M, de moment d'inertie J lié par deux ressorts, l'un au centre O, l'autre au point A distant de $(R/2)$ du point O se glissant sans frottement suivant l'axe Ox comme le montre la figure 2.11:

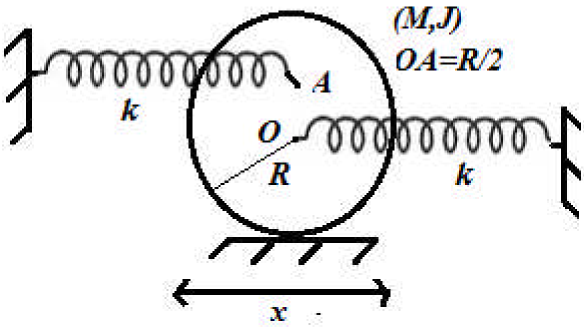


Figure 2.11

- Etablir le Lagrangien du système.
- Déterminer l'équation différentielle du mouvement
- En déduire la pulsation propre du système ainsi que la solution générale

Solutions :

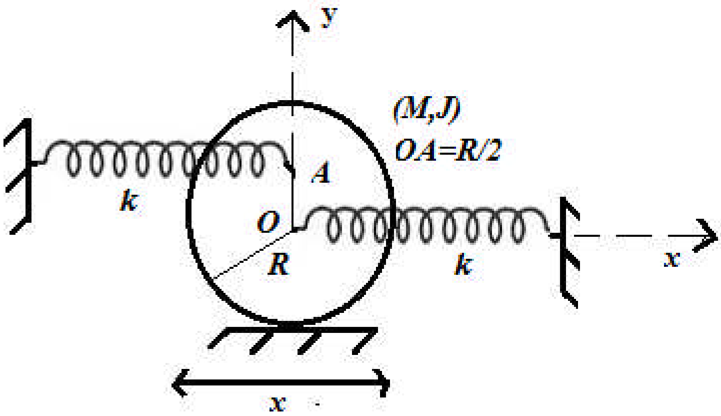


Figure 2.11 a: Système est en équilibre

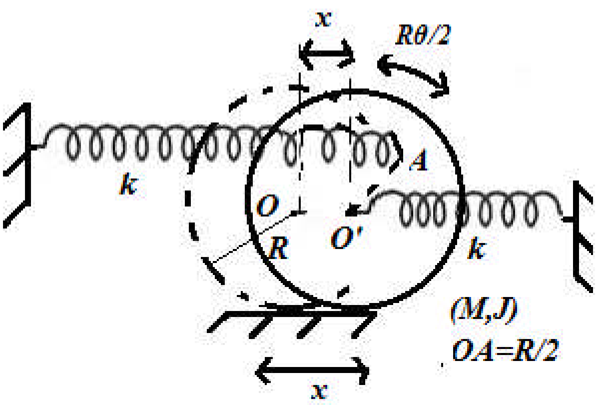


Figure 2.11- b Système en mouvement

- Le degré de liberté :

  On a le déplacement infinitésimal comme suit

  $x = R\theta \Rightarrow \quad x,\theta \quad sont \quad dépendants$

  Le système a un seul degré de liberté

- Le Lagrangien du système **:**

  L'énergie cinétique :

  $$E_c = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 \ avec \quad x = R\theta$$

  L'énergie potentielle :

$$E_p = \frac{1}{2}k(-x)^2 - \frac{1}{2}k(x + \frac{R\theta}{2})^2$$

Le Lagrangien du système s'écrit alors comme suit :

$$L = \frac{1}{2}(M + \frac{J}{R^2})\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\frac{13}{4}kx^2$$

- L'équation différentielle s'écrit alors :

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\frac{13}{4}k}{M + \frac{J}{R^2}}x = 0$$

- La pulsation propre est :

$$\omega_0^2 = \frac{\frac{13}{4}k}{M + \frac{J}{R^2}}$$

- La solution générale s'écrit alors :

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Problème6 :

Soit un système électrique (L_{ind}, C_{ap}) en série représenté dans la figure 2.12 comme suit :

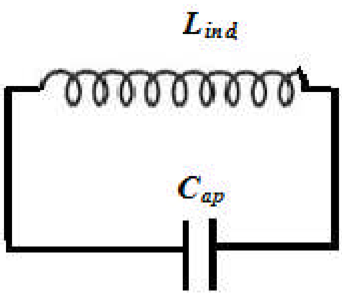


Figure 2.12

- A partir des lois du Kirchhoff, établir l'équation différentielle du mouvement.
- En déduire la pulsation propre du mouvement.

Solutions :

- La loi des mailles :

$$\sum_i V_i = 0 \Rightarrow \quad Z_{L_{ind}} i(t) + \frac{q}{C_{ap}} = 0 \quad avec \quad Z_{L_{ind}} = jL_{ind}\omega \Rightarrow \quad L_{ind}\frac{di(t)}{dt} + \frac{q}{C_{ap}} = 0$$

- L'équation différentielle devient alors :

$$L_{ind}\ddot{q}+\frac{1}{C_{ap}}q(t)=0 \qquad avec \quad i(t)=\frac{dq}{dt}$$

- On a l'équivalence du système mécanique-électricité comme suit:

$$L_{ind}\ddot{q}+\frac{1}{C_{ap}}q(t)=0 \quad \Leftrightarrow \quad m\ddot{x}+kx(t)=0 \Rightarrow \begin{cases} L_{ind} & \Leftrightarrow & m \\ q(t) & \Leftrightarrow & x(t) \\ \dfrac{1}{c_{ap}} & \Leftrightarrow & k \end{cases}$$

- La pulsation propre du mouvement s'écrit sous la forme:

$$\omega_0^2=\frac{1}{L_{ind}C_{ap}}$$

<u>Problèmes supplémentaires:</u>

<u>Problème 6:</u>

Soient deux ressorts de même raideur k ont une longueur à vide l_0. La figure 2.13 représente une masse m reliée à leurs extrémités peut glisser sans frottement suivant l'axe Ox

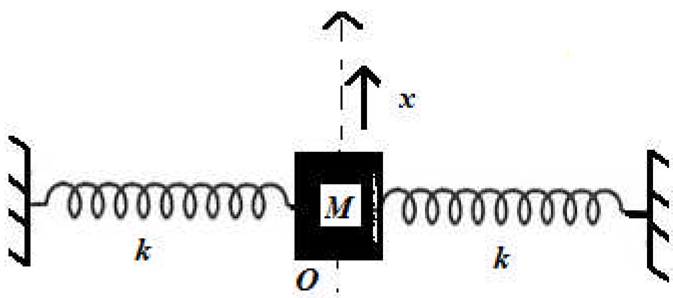


Figure 2.13

Déterminer:

- Le Lagrangien du système.
- L'équation différentielle du mouvement.
- La pulsation propre, la période propre et la solution générale.

<u>Problème 7:</u>

On considère un gaz ionisé, un plasma, formé d'ions et d'électrons ayant une charge globale nulle. On négligera les mouvements des ions beaucoup plus lourds que les électrons. On suppose que les électrons ne se déplacent que parallèlement à l'axe *Ox*. Au repos, le plasma est homogène et contient n_0, nombre d'électron par unité de volume. On considère une tranche de plasma *dx*, les électrons situés respectivement en position *x* et *x +dx* se déplacent par les quantités *s(x, t)* et *s(x+dx)*, la figure 2.14:

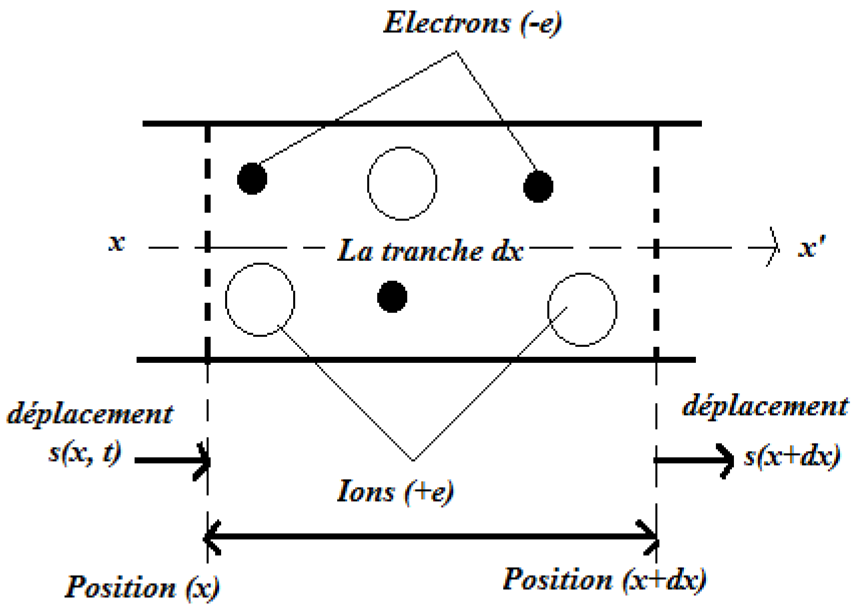


Figure 2.14 Etat d'équilibre

- En utilisant l'équation de poisson, déterminer l'équation différentielle du mouvement.
- En déduire la pulsation propre du système.

Chapitre 3 :

Mouvement amorti à un degré de liberté

Chapitre 3: Mouvement amorti à un degré de liberté

Rappel théorique :

En réalité tous les systèmes physiques interagissent avec le milieu environnant. Dans ce chapitre on doit tenir compte l'influence de la force de frottement visqueuse de type $\vec{f}_{fr} = -\alpha\vec{V}$ sur les oscillations du système. Ce type de mouvement est appelé mouvement amorti.

▪On définit l'oscillation amorti comme suit :

$$\ddot{p} + 2\lambda\dot{p} + \omega_0^2 p(t) = 0$$

Où λ est un coefficient positif et est appelé facteur d'amortissement. La résolution de cette équation se fait par le changement de variable, l'équation devient alors :

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$$

On calcule le discriminent Δ' on obtient alors :

$$\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2$$

Il existe trois types de solutions :

▪Cas où le système est fortement amorti : $\lambda \succ \omega_0$

La solution de l'équation différentielle s'écrit comme suit :

$$p(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$$

$$r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

Où A_1 et A_2 sont coefficients à déterminer par les conditions initiales :

$$\begin{cases} p(t=0) \\ \dot{p}(t=0) \end{cases}$$

On dit que le système a un mouvement apériodique.

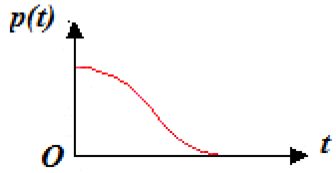


Figure 3.1: Mouvement apériodique

▪Cas où l'amortissement critique : $\lambda = \omega_0$

La solution de l'équation est de forme :

$$p(t) = (A_1 t + A_2)e^{rt}$$
$$r_1 = r_2 = r = -\lambda$$

Où A_1 et A_2 sont coefficients à déterminer par les conditions initiales :

$$p(t=0), \dot{p}(t=0)$$

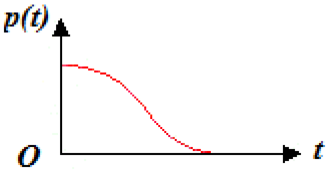


Figure 3.2: Mouvement critique

▪Cas où l'amortissement est faible : $\lambda \prec \omega_0$

La solution de l'équation différentielle est de forme :

$$p(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \varphi) \quad avec \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

Où A et φ sont des constantes à déterminer par les conditions initiales :

$$\begin{cases} p(t=0) \\ \dot{p}(t=0) \end{cases}$$

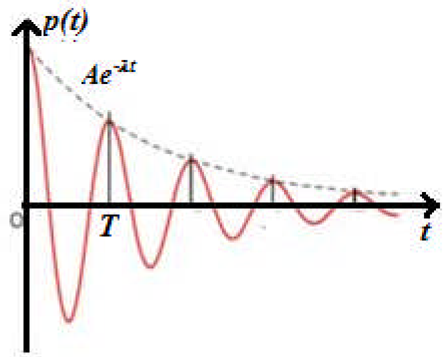


Figure 3.3: Mouvement oscillatoire amorti

▪On définit la pulsation du système comme suit:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

▪On définit la période du système T appelé pseudo-période comme suit :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

▪On définit le décrément logarithmique δ qui représente la décroissance de l'amplitude à une seule période du système comme suit:

$$\delta = Ln\frac{p(t)}{p(t+T)}$$

▪Il faut signaler que le système subit **une perte d'énergie totale** due **au travail des forces de frottement.**

$$dE_T(t) = -\alpha\dot{p}(t)^2\,dt = -dW_{\vec{fr}} \Rightarrow \quad \Delta E_T + \Delta W_{\vec{fr}} = 0$$

Applications :

Problème 1 :

On définit un oscillateur amorti régi par l'équation différentielle suivante :

$$m\ddot{x}+\alpha\dot{x}+kx=0$$

Avec m est la masse du corps, k est le coefficient de rappel et x est le déplacement du corps. On lance le système avec une vitesse initiale v_0=25cm/s.

Donc à t=0, x=0 et $\dot{x}=v_0$

- Calculer la période propre du système, sachant que : m=150g et k=3.8N/m.
- Montrer que si α=0.6kg/s, le corps a un mouvement oscillatoire amorti.
- Résoudre dans ce cas l'équation différentielle.
- Calculer le pseudo-période du mouvement.
- Calculer le temps t_m au bout duquel la première amplitude x_m est atteinte. En déduire x_m.
- Calculer la vitesse d'une pseudo-période.

Solutions :

- L'équation du mouvement amorti est de forme :

$$m\ddot{x}+\alpha\dot{x}+kx=0 \quad\Rightarrow\quad \ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0^2x=0 \quad avec \quad \frac{\alpha}{m}=2\lambda,\frac{k}{m}=\omega_0^2$$

- La période propre du système est T_0:

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}\cong 5rad/s$$

$$T_O=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}}\cong 1.25s$$

- L'équation différentielle du mouvement se transforme en :

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$$
$$\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 = -21 \prec 0$$
$$Avec$$
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = 21$$

❖Le corps *m* a un mouvement oscillatoire amorti.

▪La résolution de cette équation différentielle est de forme :

$$x(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \varphi)$$

En appliquant les conditions initiales :

$$t = 0, x = 0 \Rightarrow \quad \cos\varphi = 0 \Rightarrow \quad \varphi = \pm\frac{\pi}{2}$$

$$t = 0, \dot{x} = v_0 \Rightarrow \quad A = \frac{v_0}{\omega} \quad avec \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

La solution finale sera exprimée comme suit :

$$x(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \quad x(t) = \frac{v_0}{\omega}e^{-\lambda t}\sin\omega t$$

La figure 2.1 représente le mouvement oscillatoire amorti.

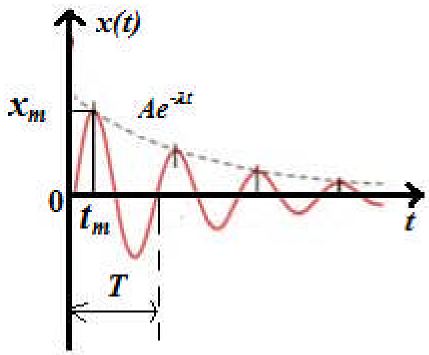


Figure 2.1: Mouvement oscillatoire amorti

▪La pseudo-période :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 1.37s$$

▪Le temps de la première amplitude t_m

Il faut que :

$$\dot{x}(t=t_m)=\frac{dx(t)}{dt}\Big|_{t=t_m}=0 \Rightarrow \quad t_m=\frac{Arctg\,\frac{\omega}{\lambda}}{\omega}$$

D'où :

$$t_m=0.25s \neq \frac{T}{4}$$

Problème 2 :

Soient les systèmes mécaniques représentés dans les figures 2.2 et 2.3 come suit :

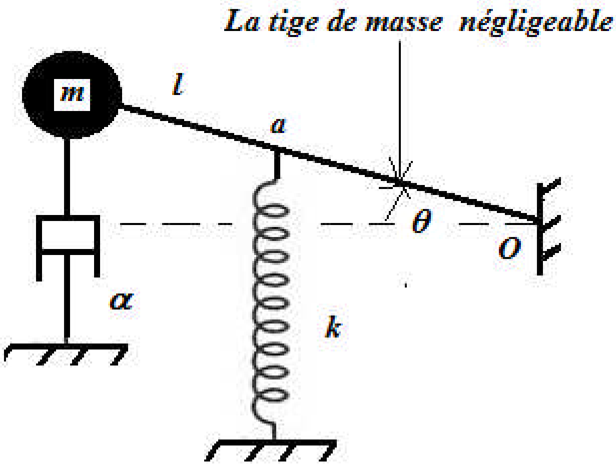


Figure 2.2

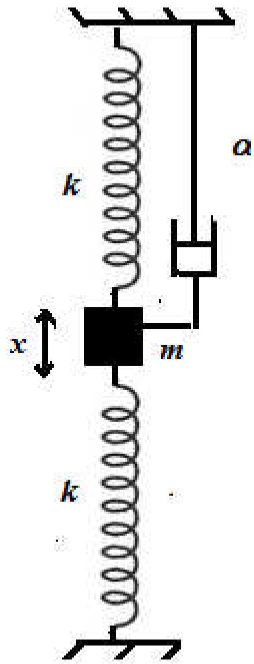


Figure 2.3

Pour des petites oscillations, déterminer pour chaque système :

- Le Lagrangien et l'équation différentielle du mouvement.
- La pulsation propre et la solution générale pour un faible amortissement.

Solutions :

Figure 2.2 :

- Le Lagrangien ***:***

L'énergie cinétique :

$$E_c=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}ml^2\theta^2$$

L'énergie Potentielle :

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 - mgl\cos\theta \qquad avec \quad x = a\sin\theta \cong a\theta$$

Le Lagrangien s'écrit :

$$L = E_c - E_p = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k(a\theta)^2 - mgl\cos\theta$$

▪L'équation différentielle est :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \sum \overline{M}_{ext} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \frac{ka^2}{ml^2}\theta = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \\ 2\lambda = \frac{\alpha}{m}, \omega_0^2 = \frac{ka^2}{ml^2} \end{array}$$

▪La solution générale est pour un faible amortissement est de forme:

$$\theta(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \varphi)$$

Figure 2.3 *:*

▪Le Lagrangien ***:***

L'énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

L'énergie Potentielle :

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}k(-x)^2$$

Le Lagrangien s'écrit alors :

$$L = E_c - E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - kx^2$$

▪L'équation différentielle est :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \sum \overline{F}_{ext} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{2k}{m}x = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \\ 2\lambda = \frac{\alpha}{m}, \omega_0^2 = \frac{2k}{m} \end{array}$$

▪La solution générale pour un faible amortissement est :

$$x(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \varphi)$$

Problème 3 :

On considère un système mécanique amorti, oscillant autour d'un axe passant par *O* représenté par une tige métallique de longueur *l* de masse négligeable reliée par deux ressorts identiques de constante de raideur *k* au point *l/2* comme le montre la figure 2.4 :

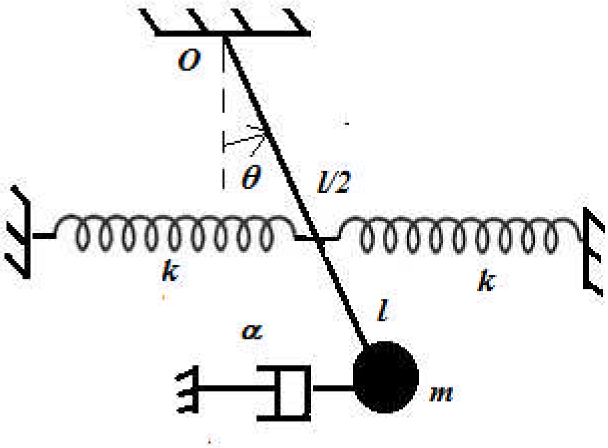


Figure 2.5

- Etablir le Lagrangien du système.
- Déterminer l'équation différentielle du mouvement.
- En déduire la pulsation propre du système.
- Résoudre dans le cas de faible amortissement l'équation différentielle du mouvement avec les conditions initiales suivantes :

$$\theta(t=0)=0,\dot{\theta}(t=0)=\dot{\theta}_0$$

Solutions :

- Le Lagrangien ***:***

L'énergie cinétique :

$$E_c=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}ml^2\theta^2$$

L'énergie Potentielle :

$$E_p=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}k(-x)^2-mglCos\theta \qquad avec \quad x=\frac{l}{2}sin\theta\cong\frac{l}{2}\theta$$

Le Lagrangien s'écrit :

$$L = E_c - E_p = \frac{1}{2} m l^2 \theta^2 - k(\frac{l}{2}\theta)^2 - mgl\cos\theta$$

▪L’équation différentielle est :

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \sum \overline{M}_{ext} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \frac{k\frac{l^2}{2} + mgl}{ml^2}\theta = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \\ 2\lambda = \frac{\alpha}{m}, \omega_0^2 = \frac{k\frac{l^2}{2} + mgl}{ml^2} \end{array}$$

▪Pour un faible amortissement la solution s’écrit sous la forme :

$$\theta(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \varphi) \quad avec \quad \begin{array}{l} t = 0, \theta = 0, \dot{\theta} = \dot{\theta}_0 \\ \varphi = -\frac{\pi}{2}, A = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega} \end{array}$$

Alors, la solution générale s’écrit :

$$\theta(t) = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega} e^{-\alpha t} \sin\omega t$$

Problème 4:

Soit une boule de masse m suspendue à une tige de longueur l, de masse négligeable et plongée dans un liquide. Cette masse est soumise à une force de frottement visqueuse dont le coefficient de frottement est α comme le montre la figure 2.6 comme suit :

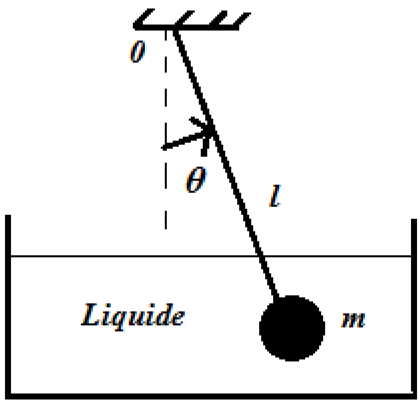


Figure 2.6

▪Etablir le Lagrangien du système.

▪Déterminer l’équation du mouvement.

▪Résoudre dans le cas de faible amortissement l’équation différentielle.

▪***Application numérique*** : $m=1Kg$, $l=50cm$, $g=10m/s$. Calculer la valeur maximale que α ne doit pas atteindre pour que le système oscille.

- On prend la valeur de α égale à *10N.s/m*, calculer le temps nécessaire τ pour que l'amplitude diminue à ¼ de sa valeur.

Solutions :

- Le Lagrangien du système ***:***

$$L = E_c - E_p = \frac{1}{2} ml^2\theta^2 + mgl\cos\theta$$

- L'équation différentielle est :

$$\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

Avec

$$2\lambda = \frac{\alpha}{m}, \omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

- La solution générale est :

$$\theta(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \varphi)$$

- La valeur maximale de α_{max} :

$$\lambda^2 - \omega_0^2 \prec 0 \Rightarrow \alpha \prec 2m\sqrt{\frac{g}{l}} = \alpha_{max} \approx 8.94 N.s/m$$

- Le temps τ :

$$Ae^{-\lambda(t+\tau)} = \frac{1}{4}e^{-\lambda t} \Rightarrow \tau = \frac{\ln 4}{\lambda} \approx 0.28s$$

Chapitre 4 :
Mouvement forcé à un degré de liberté

<u>Rappel théorique :</u>

On définit une oscillation forcée, tout système en mouvement sous l'action d'une force extérieure.

- On définit l'équation du mouvement forcé comme suit :

$$\ddot{p} + 2\lambda\dot{p} + \omega_0^2 p = f(t)$$

Où *f(t)* est appelée la fonction excitation extérieure. Cette équation est linéaire de second ordre non homogène à coefficients constant.

- La solution *p(t)* de l'équation différentielle qui présente la réponse du système à l'action extérieure, est la somme de deux thermes :

$$p(t) = p_g(t) + p_p(t)$$

Où $p_g(t)$ et $p_p(t)$ représentent respectivement la solution générale la solution particulière.

- Il faut signaler qu'au début du mouvement *p(t)* représente **le régime transitoire**. Au fil du temps la solution homogène $p_g(t)$ devient négligeable devant la solution particulière $p_p(t)$ qui définit **le régime permanant**. Ainsi la solution totale dans ce cas, est de forme :

  $p(t) = p_p(t)$

- Dans le cas où l'excitation est sinusoïdale de type :

  $f(t) = f_0 \cos\omega t = f_0 e^{j\omega t}$

- La solution totale s'écrit alors comme suit :

  $p(t) = p_p(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

Où *A* représente l'amplitude de la solution totale et φ le déphasage.

- On cherche la solution de l'équation différentielle sous forme complexe :

  $p(t) = p_p(t) = Ae^{j(\omega t+\varphi)}$

  Avec

  $\dot{p}(t) = j\omega Ae^{j(\omega t+\varphi)}$

  $\ddot{p}(t) = -\omega^2 Ae^{j(\omega t+\varphi)}$

Alors l'amplitude s'écrit :

$$Ae^{j\varphi} = \frac{f_0}{-\omega^2 + \omega_0^2 + 2\lambda j\omega}$$

- En module :

$$|A| = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}$$

- En Argument :

$$\varphi = Artg\,\frac{2\lambda\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

L'étude des variations du module de l'amplitude se fait par :

$$\left.\frac{d|A|}{d\omega}\right|_{\omega} = 0$$

- Il existe deux pulsations **:**

$$\omega = \Omega = 0$$

$$\omega = \Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$$

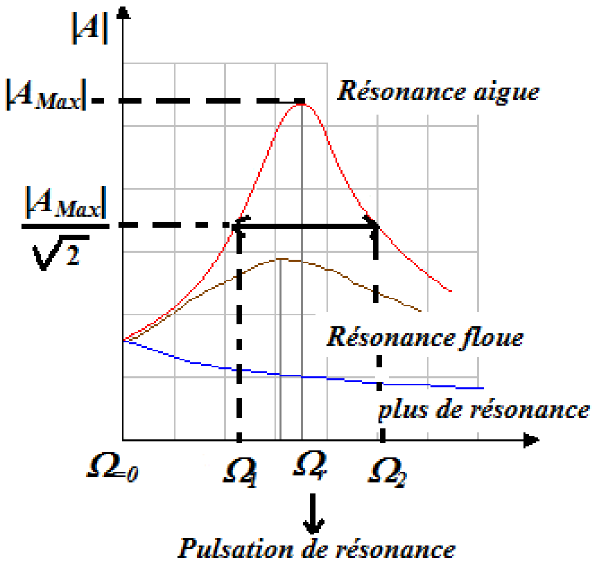


Figure 4.1: Réponse forcée

On appelle Ω_r la pulsation de résonance.
On définit ainsi :

- La largeur de la bande passante $\Delta\omega$:

$$\Delta\omega = \Omega_2 - \Omega_1$$

- Le facteur de qualité Q pour un faible amortissement :

$$Q = \frac{\Omega_r}{\Omega_2 - \Omega_1}$$

Applications :

Problème 1:

Soit un immeuble *A* modélisé par le système physique représenté par une masse *M* et un ressort de raideur *k* subit à un mouvement sismique sinusoïdal d'amplitude *a* de forme $x_s = a\cos\omega t$ comme suit:

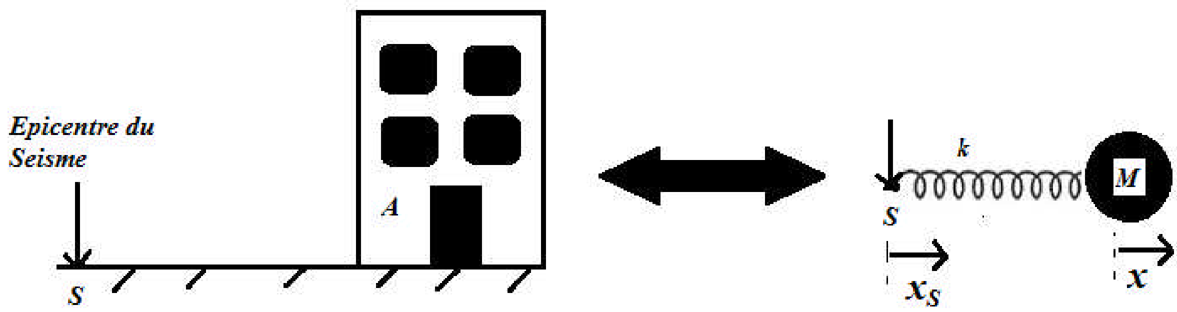


Figure 4.2: Modèlisation d'un sisme

Quelle est la réponse du système. Justifier

Solutions :

- Le Lagrangien du système :

  L'énergie cinétique :

  $$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

  L'énergie potentielle :

  $$E_p = \frac{1}{2}k(x - x_s)^2$$

  Le Lagrangien du système s'écrit alors :

  $$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k(x - x_s)^2$$

- L'équation différentielle est de forme :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \sum \overline{F}_{ext} \Rightarrow \ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = \frac{a}{m}\cos\omega t \Rightarrow \begin{array}{l} \ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) == R_e\left\{\frac{a}{m}e^{j\omega t}\right\} \\ \omega_0^2 = \frac{k}{m} \end{array}$$

- La solution de cette équation est :

  $$x(t) = x_p(t) = Ae^{j(\omega t + \varphi)}$$

En remplaçant dans l'équation de mouvement, on détermine l'amplitude de la réponse comme suit :

$$A(\omega)=\frac{\frac{a}{m}}{\left|\omega^2-\omega_0^2\right|}$$

La réponse du système est représentée dans la figure 3.3 :

$$A(\omega)\to\infty \quad lorsque \quad \omega\to\omega_0$$

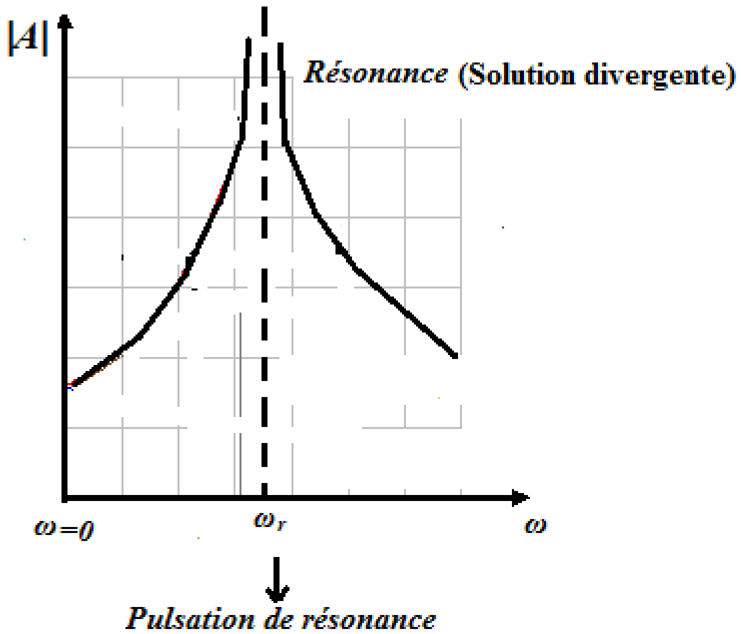


Figure 4.3: Réponse forcée du système

- L'immeuble va s'effondrer face au séisme car le système oscille avec la pulsation propre. On appelle ce phénomène la résonance. On se propose dans ce cas la de mettre en place un moyen d'amortir les oscillations extérieurs du système qui se traduit par une force de frottement visqueuse.

<u>Problème 2:</u>

Soit le circuit forme par l'association parallèle R, L_{ind}, C_{ap} et alimente par une source de courant sinusoïdale délivrant un courant d'intensité $i(t)=i_0\sqrt{2}\cos\omega t$ comme le montre la figure 4.4 ci-dessous.

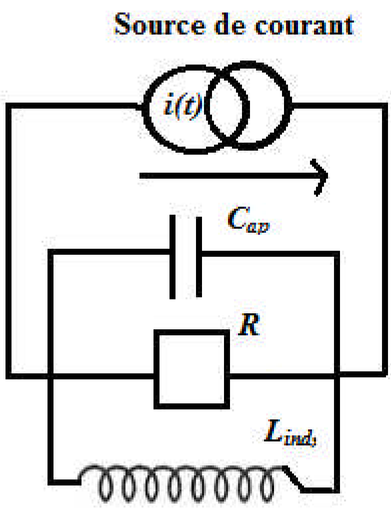


Figure 4.4: Circuit R.L.C en Parallèle

- Exprimer la tension complexe u aux bornes de l'association parallèle en fonction de ω, i_0, et des paramètres du circuit.

On pose $\omega_0^2 = \dfrac{1}{L_{ind} C_{ap}}$, $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ et on définit le facteur de qualité du circuit comme suit : $Q = RC_{ap}\omega_0$

  - Exprimer le module de la tension u aux bornes de l'association parallèle en fonction de R, i_0, Q et x.

- Montrer que u passe par un maximum u_{max} pour une valeur de x à déterminer.
- Représenter sommairement $f(x) = \dfrac{u}{u_{max}}$ en fonction de x. Que retrouve t-on ?
- Calculer la largeur de la bande passante.

<u>Solutions :</u>

- La tension complexe u du système est de forme :

$$u(t) = \tilde{Z}_{équi}\, i(t) \qquad d'où \quad i(t) = \frac{u(t)}{\tilde{Z}_{équi}}$$

Soit $\tilde{Z}_{équi}$ l'impédance complexe équivalente du circuit R.L.C en parallèle.

Avec :

$$\frac{1}{\tilde{Z}_{équi}} = \frac{1}{R} + jC_{ap}\,\omega + \frac{1}{jL_{ind}\,\omega} \qquad d'où \qquad u(t) = \frac{Ri(t)}{1 + jR(C_{ap}\,\omega - \frac{1}{L_{ind}\,\omega})}$$

- Le module de la tension s'écrit alors :

$$|u(t)| = \frac{Ri_0\sqrt{2}}{\sqrt{1 + Q^2(x - \frac{1}{x})^2}}$$

- On constate que :

$$u = u_{max} = Ri_0\sqrt{2} \quad lorsque \quad x = 1$$

- Le schéma de la fonction $f(x) = \frac{u}{u_{max}}$ est représenté dans la figure 3.4 comme suit :

$$f(x) = \frac{u}{u_{max}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2(x - \frac{1}{x})^2}}$$

$$Avec \quad f(x) = 1 \quad si \quad x = 1 \Rightarrow \quad Résonance$$

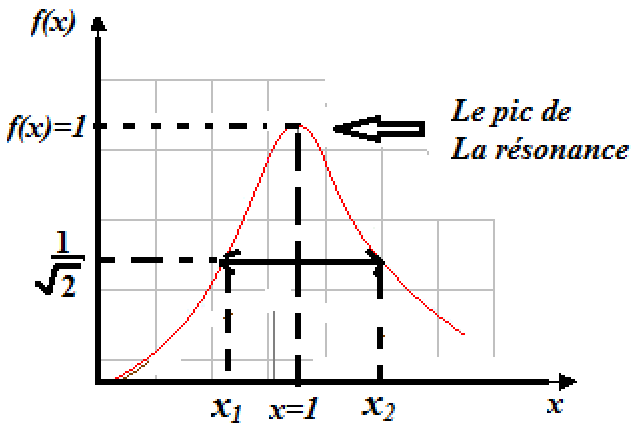


Figure 4.5: La résonnance

- La bande passante $\Delta\omega$ s'écrit comme suit :

$$\Delta x = x_2 - x_1 \quad avec \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2(x - \frac{1}{x})^2}}$$

Après transformation on obtient la largeur réelle de la bande passante :

$$\Delta\omega = \omega_0 \Delta x \quad d'où \quad \Delta\omega = \frac{1}{RC}$$

Problème 3:

On considère un système de réception radio modélisé par un circuit R, L_{ind}, C_{ap} en série et alimenté par une source de tension sinusoïdale d'intensité $u(t) = u_0 \cos \omega t$ comme le montre la figure 4.6 ci-dessous.

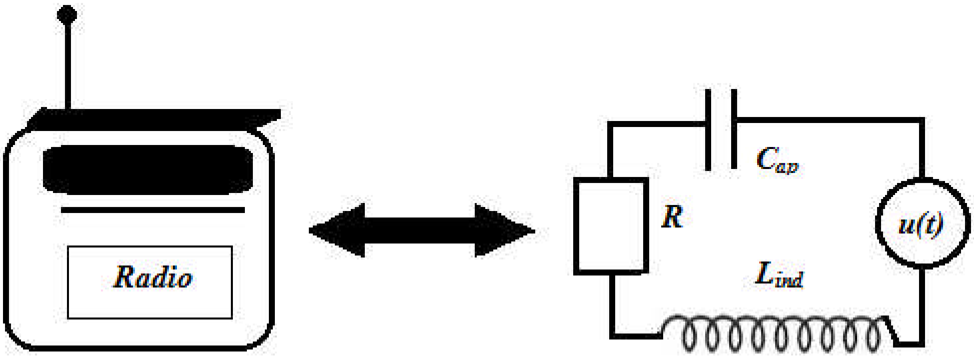


Figure 4.6: Antenne de réception

- Déterminer l'impédance totale du système.
- En déduire le module du courant parcourue par le circuit en fonction des paramètres R, L_{ind}, C_{ap} et ω.
- Etudier les variations du module de courant en fonction de ω
- Trouver la fréquence de résonance. En déduire le courant maximum.
- Etablir la bande passante et le facteur de qualité en fonction des paramètres du circuit R, L_{ind}, C_{ap} et ω.
- Donner une explication pour le fonctionnement de ce système.

Solutions :

- Le circuit est en série, l'impédance totale est :

$$\tilde{Z} = R + j(L_{ind}\omega - \frac{1}{C_{ap}\omega})$$

- Le module du courant est :

$$I_0 = \frac{|u(t)|}{|\tilde{Z}|} = \frac{u_0}{\sqrt{R^2 + (L_{ind}\omega - \frac{1}{C_{ap}\omega})^2}}$$

- Les variations du module du courant sont :

$$I_{0\,max} = \frac{u_0}{R}$$

$$Pour \quad L_{ind}\,\omega - \frac{1}{C_{ap}\,\omega} = 0 \quad d'où \quad \Omega_r = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_{ind}\,C_{ap}}}$$

- On appelle Ω_r par la pulsation de résonance.
- La figure 4.7 représente l'allure I_0 en fonction de ω

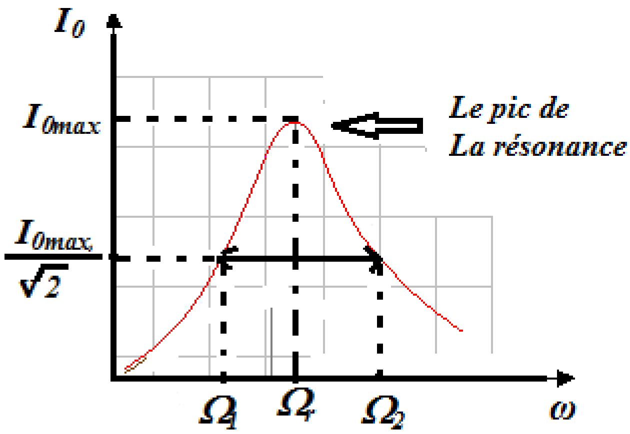


Figure 4.7: Réponse du système

- La bande passante et le facteur de qualité sont définit :

$$\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1 = \frac{R}{L_{ind}}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\Omega} = \frac{L_{ind}\,\omega_0}{R}$$

- L'application technique de ce phénomène est la sélection des fréquences de résonances pour différentes stations de radio.

Problème 4:

On définit un sismomètre comme un système physique appelé capteur qui comprend un support et une masse *m* relié par un ressort et un amortisseur disposés en parallèle, la figure 4.8. La masse, de centre de gravité *G*, ne peut se déplacer que verticalement. Le support, le ressort et l'amortisseur ont une masse négligeable.

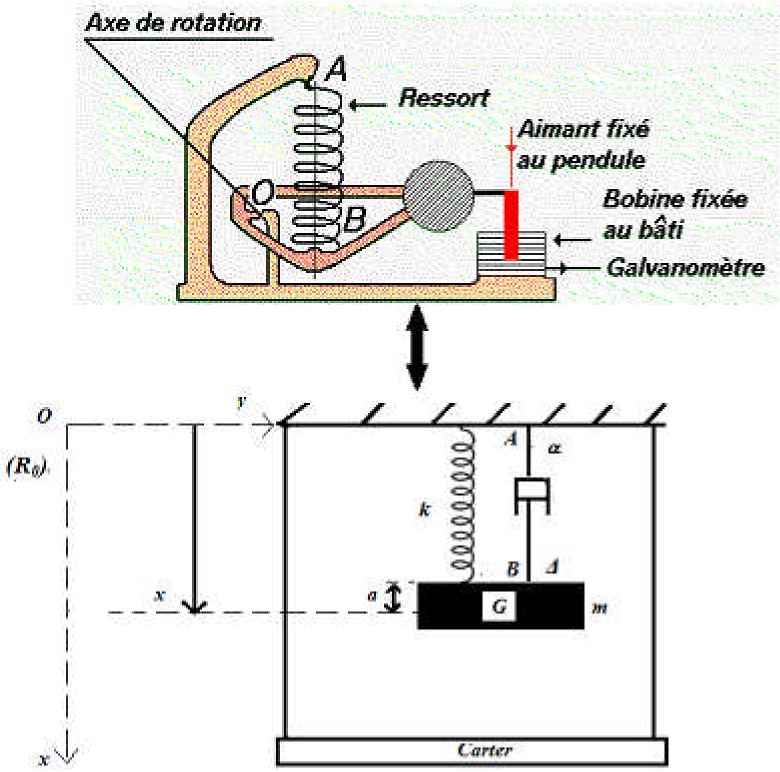


Figure 4.8: Modèlisation d'un sismomètre

Le ressort a une longueur à vide *l* et une rigidité *k*. La constante de frottement estα. On précise que si, les extrémités *A* et *B* d'un amortisseur appartenant à un système mécanique, décrivent un axe *Δ* parallèle à l'axe Ox avec des vitesses respectives v_a et v_b, l'amortisseur exercice sur le reste du système en point *A* une force $\alpha(v_b - v_a)\vec{i}$ et en point *B* une force $\alpha(v_a - v_a)\vec{i}$ où $\vec{i}$ est le vecteur unitaire.

Partie A :

Le support est immobile par rapport au repère (R_0)**.**

- Calculer l'abscisse x_0 du centre d'inertie de la masse en équilibre.
- Ecrire l'équation différentielle du mouvement de la masse écarté de sa position d'équilibre.
- Que devient cette équation quand on pose $x=x_0+X$.

On pose $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$, $\alpha = \lambda f_C$ avec $f_c^2 = 4km$. Montrer que l'équation différentielle s'écrit sous la forme suivante :

$$\ddot{x} + \alpha^* \dot{x} + \beta^* x = 0$$

- Calculer α^* et β^* en fonction de λ et ω_0.
- On donne $\lambda = 0.5$, $\omega_0 = 10\ rad/s$. A l'instant initial, $X = 1\ cm$ et $\dot{X} = 0$. Déterminer X pour $t = 0.2s$.

Partie B :

On suppose maintenant que le support est solidaire du carter d'une machine animé d'un mouvement sinusoïdale verticale $x_1 = b \sin \omega t$ par rapport au repère (R_0), comme le montre la figure 4.9. On suppose que b est positif.

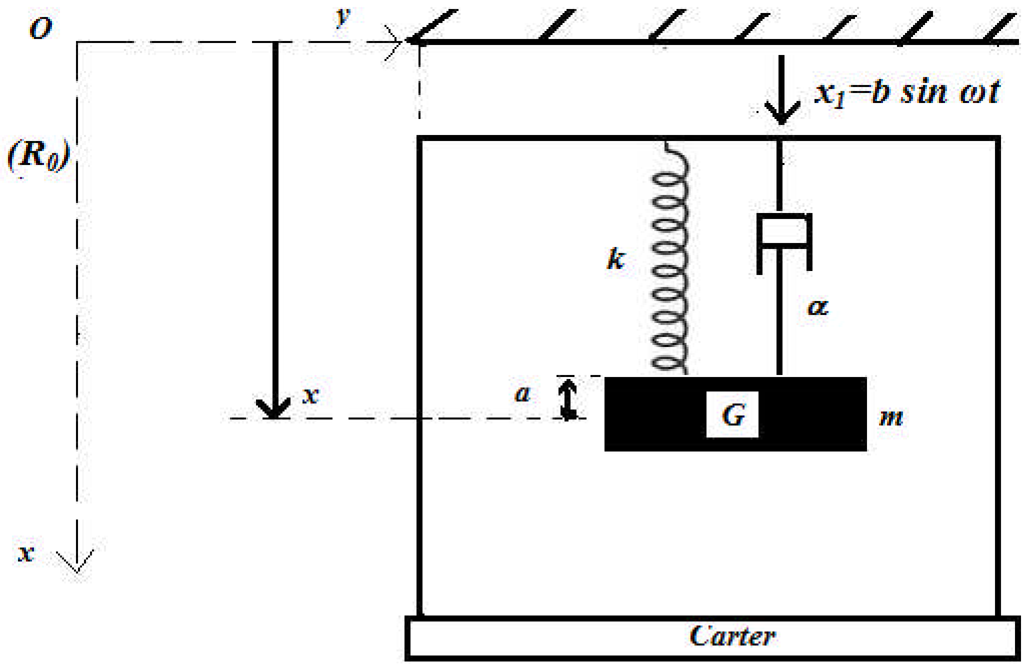


Figure 4.9: Système est en mouvement forcé

- Ecrire l'équation de la masse par rapport à (R_0).
- Montrer que l'équation différentielle peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\ddot{x} + \alpha^* \dot{x} + \beta^* x = H \sin \omega t$$
$$Avec \qquad x = X + C + b \sin \omega t$$

- Déterminer H et C, que représente X ?
- Etudier la solution en régime permanent $X(t) = B \sin(\omega t - \varphi)$ avec B positif.

- Calculer le rapport $\frac{B}{b}$ et $\tan\varphi$ en fonction de λ et $\mu = \frac{\omega}{\omega_0}$.
- Tracer l'allure du graphe de B en fonction de μ tel que $B=f(\mu)$.
- On suppose que $\lambda=0.5$, montrer que si μ est supérieur à une certaine valeur μ_1, $\frac{B}{b}-1$ est inférieur à 10^{-2}. Calculer μ_1.
- En déduire une condition pour que l'appareil puisse fonctionner en capteur d'amplitude.

Solutions :

Partie A : Le support est immobile par rapport au repère (R_0).

- L'abscisse x_0 s'écrit comme suit :

$$x_0 = \frac{mg}{k} + (l + a)$$

- L'équation différentielle du mouvement est de forme :

$$m\ddot{x} = -k(x-(l+a)) + mg - \alpha\dot{x}$$
$$d'où \quad \dot{x} = \dot{X} \qquad \ddot{x} = \ddot{X}$$
$$Alors \quad m\ddot{X} + \alpha\dot{X} + kX = 0$$

- La nouvelle équation du mouvement s'écrit alors :

$$\ddot{X} + 2\lambda\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = 0$$
$$Avec \quad \alpha^* = 2\lambda\omega_0 \qquad \beta^* = \omega_0^2$$

- La résolution de cette équation différentielle :

$$r^2 + 2\lambda\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$$
$$\Delta' = \omega_0^2(\lambda^2 - 1)$$
$$\lambda = 0.5 \quad \Rightarrow \quad \Delta' = \omega_0\sqrt{1-\lambda^2} = -\Omega^2$$

❖ La solution est de forme :

$$X(t) = e^{-\lambda\omega_0 t}(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t)$$
$$Avec \quad A = X_0 \qquad B = \frac{\lambda X_0}{\sqrt{1-\lambda^2}}$$

- ❖ Le système a un mouvement amorti.
- ❖ La valeur de *X* est : *X=0.15m*

Partie B : Le support est mobile par rapport au repère *(R_0)*.

- La relation dynamique du mouvement :

$$m\ddot{x} = -k(x - x_1 - (l + a)) + mg - \alpha(\dot{x} - \dot{x}_1)$$
$$d'où \quad x = X + x_1 \quad et \quad \ddot{x} + \ddot{x}_1 = \ddot{X} - \omega^2 b \sin \omega t$$

L'équation du mouvement devient alors :

$$\ddot{X} + 2\lambda\omega_0 \dot{X} + \omega_0^2 X = \omega^2 b \sin \omega t$$
$$Avec \quad H = \omega^2 b$$

- La solution totale de l'équation différentielle en régime permanent est :

$$X(t) = X_p(t) = B\sin(\omega t - \varphi)$$

- ❖ En notation complexe on aura la forme suivante :

$$\tilde{X}(t) = \tilde{X}_p(t) = Be^{j(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2})}$$

- ❖ En remplaçant dans l'équation différentielle, on obtient alors :

$$B = \frac{b\mu^2}{\sqrt{(1-\mu^2)^2 + (2\lambda\mu)^2}} \qquad \tan\varphi = \frac{2\lambda\mu}{1-\mu^2}$$
$$Avec \quad \mu = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Les variations de $B=f(\mu)$:

$$\left.\frac{dB}{d\mu}\right|_{\mu=\mu_m} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \mu = 0 \\ \mu = \mu_m = \dfrac{1}{\sqrt{1-2\lambda^2}} \quad si \quad \lambda \prec \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Ainsi on distingue deux cas :

- ❖ $\lambda \prec \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\Rightarrow$ Amortissement faible $\Rightarrow$ Résonance
- ❖ $\lambda \succ \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\Rightarrow$ Amortissement important

- On peut en déduire que :

$$\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$
$$\mu \to \infty \quad \Rightarrow \quad B \to b$$

- Pour $\lambda=0.5$, on aura :

$$B = B_{max} = 1.15\, b \qquad pour \qquad \mu_m = \sqrt{2}$$
$$\frac{B}{b} - 1 \leq 10^{-2} \qquad si \qquad \mu \geq \mu_1$$
$$\frac{\mu_1^2}{\sqrt{(1-\mu_1)^2 + \mu_1^2}} - 1 = 10^{-2} \qquad d'où \qquad \mu_1 = 7.05$$

- On peut conclure que l'appareil reproduit les oscillations du carter si la pulsation ω est importante. Il fonctionne alors en capteur d'amplitude.

Problème 5:

On définit le modèle d'un oscillateur harmonique, figure 4.10, représentée par une masse m placée dans un potentiel élastique du type : $E_p = \frac{1}{2}kx^2$

Cette masse est soumise à une force de frottement visqueuse et dont le coefficient de frottement est α.

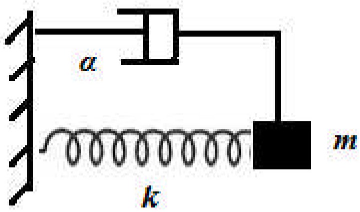


Figure 4.10: Amortisseur

Mode libre : Dans le cas des oscillations libres

- Déterminer le Lagrangien du système.
- Etablir l'équation du mouvement.
- En déduire la solution générale avec les conditions initiales suivantes :

$$x(t=0)=0 \text{ et } \dot{x}(t=0) = v_0 .$$

Mode forcé : On admet que les frottements existent, la masse m effectue des oscillations forcées sous l'effet d'une force sinusoïdale : $f(t) = f_0 \cos \Omega t$

On admet que la vitesse du mobile est de forme : $v(t)=v_0 \cos(\Omega t-\varphi)$

- Établir l'équation du mouvement.
- Résoudre l'équation différentielle en régime permanent.
- Déterminer l'impédance mécanique complexe définit comme rapport entre la force appliquée et la vitesse du mobile.
- Comparer le résultat avec le système électrique.

Solutions :

Mode libre :

- Le lagrangien du système :

$$L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2$$

- L'équation du mouvement :

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad avec \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

- La solution générale est de forme :

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

Mode forcé :

- L'équation du mouvement :

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = f(t) \quad \Rightarrow \ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f(t)}{m} \quad avec \quad \begin{aligned} 2\lambda &= \frac{\alpha}{m} \\ \omega_0^2 &= \frac{k}{m} \end{aligned}$$

C'est une équation différentielle inhomogène linéaire, d'un mouvement force.

- La résolution de cette équation différentielle en régime permanent est :

$$x(t) = x_p(t) = A \cos(\Omega t - \varphi) = R_e A e^{j(\Omega t - \varphi)}$$

  - Soient A l'amplitude de la solution et φ son argument.
  - En remplaçant dans l'équation différentielle et après le calcul, On obtient alors :

$$A(\Omega) = \frac{\frac{f_0}{m}}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}} \quad et \quad \tan\varphi = \frac{-2\lambda\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}$$

❖ Les variations de $A(\Omega)$ sont déterminées par :

$$\frac{dA(\Omega)}{d\Omega} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega = \Omega_r = \sqrt{\omega_\circ^2 - 2\lambda^2} \quad \Rightarrow \quad Résonance$$

- En remplaçant dans l'équation du mouvement, l'impédance complexe est écrite comme suit :

$$\tilde{Z}_{mécani} = \frac{f(t)}{v(t)} \quad \Rightarrow \quad \tilde{Z}_{mécani} = \alpha + j(m\Omega - \frac{k}{\Omega})$$

- Pour le système électrique, le résultat est donné comme suit:

$$\tilde{Z}_{électri} = \frac{u(t)}{i(t)} \quad \Rightarrow \quad \tilde{Z}_{électri} = R + j(L_{ind}\Omega - \frac{1}{C_{ap}\Omega})$$

- On conclue donc les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \Leftrightarrow & R \\ m & \Leftrightarrow & L_{ind} \\ k & \Leftrightarrow & \dfrac{1}{C_{ap}} \end{array}$$

<u>Problème 6:</u>

Lorsqu'un moteur électrique fonctionne, il présente des vibrations naturelles qu'il est nécessaire d'amortir pour éviter de les transmettre a son châssis. On prévoit donc un système de suspension.

Le moteur est assimile au point matériel m de masse *m* pouvant se déplacer parallèlement a l'axe vertical *Oz*. La suspension le reliant au châssis est modélisée par un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur *k* en parallèle avec un amortisseur exerçant sur le moteur une force de freinage $\vec{f}_{fr} = -\alpha\,\dot{z}\,\vec{u}_z$

Le châssis reste fixe dans un référencier galiléen et on note le champ de pesanteur $\vec{g}$

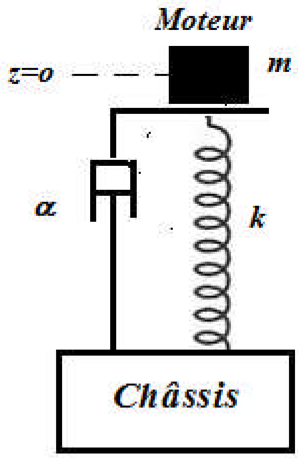


Figure 4.11: Simulation vibration d'un moteur

Mode A : Le moteur ne fonctionne pas et il est immobile.

- Déterminer dans ce cas la longueur *l* du ressort. On prend la référence $z=0$ au point *m*.

Mode B : Le moteur étant toujours arrêté, on l'écarte de sa position d'équilibre et puis on le laisse évoluer librement.

- Déterminer le Lagrangien du système.
- Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par $z(t)$.

On pose $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et $\nu = \frac{\alpha}{2m\omega_0}$

- Donner la forme de la solution générale $z(t)$ en fonction des paramètres ν et ω_0, on suppose que $\nu<1$. Comment appelle-t-on ce régime ?
- Écrire l'expression de l'énergie totale E_T en fonction de $z(t)$ et $\frac{dz(t)}{dt}$
- Que vaut-t-il la valeur de l'expression $\frac{dE_T}{dt}$. le système est il conservatif ?

Mode C : Le moteur fonctionne, et tout se passe comme s'il apparaissait une force supplémentaire de forme : $\vec{F}(t) = \vec{F}_0 \cos \omega t \vec{u}_z$

- Établir la nouvelle équation du mouvement vérifiée par $z(t)$
- En régime permanent, on cherche des solutions de la forme

$$z(t) = z_0 \cos(\omega t + \varphi) \text{ et } V(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi)$$

- ❖ Donner l'expression de la grandeur $V = V_0 e^{i\phi}$

- Exprimer l'amplitude V_0 en fonction de ω et des paramètres ν, ω_0 et F_0/m.
- Donner l'allure de $V_0(\omega)$.
- ***Application numérique:*** la pulsation ω vaut 628 rad/s, le moteur a une masse $m=10kg$. On dispose de deux ressorts de raideurs $k_1=4\ 10^6 n/m$ et $k_2=10^6 n/m$. lequel faut il choisir pour réaliser la suspension ?

Solutions :

Mode A : En équilibre

- La longueur du ressort :

$$\sum_{i \geq 1} \vec{F}_i = \vec{0} \quad \Rightarrow l = l_0 - \frac{mg}{k}$$

Mode B : En mouvement amorti

- Le lagrangien du système :

$$L = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 - \frac{1}{2} k z^2$$

- L'équation différentielle :

$$m\ddot{z} + \alpha \dot{z} + kz = 0$$

$$\text{Avec} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \nu = \frac{\alpha}{2m\omega_0}$$

$$\ddot{z} + 2\nu\omega_0 \dot{z} + \omega_0^2 z = 0$$

- La résolution de l'équation du mouvement :

$$r^2 + 2\nu\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$$

$$\Delta' = (\nu\omega_0)^2 - \omega_0^2 = -\omega_0^2(1-\nu) = j^2\varpi^2 \prec 0 \quad \nu \prec 1$$

- ❖ Le systeme a un mouvement oscillatoire amorti.
- ❖ La solution est de forme :

$$z(t) = A e^{-\nu\omega_0 t} \cos(\varpi t + \varphi)$$

- l'énergie totale du systeme :

$$E_T(t) = \frac{1}{2} m \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} k z^2$$

$$\dot{z}[m\ddot{z} + kz = -\alpha \dot{z}] \quad \Rightarrow \frac{dE_T(t)}{dt} = -\alpha \dot{z}^2 \prec 0$$

- Le systeme n'est conservatif. La diminution d'énergie totale est due au travail des forces de frottement.

Mode C : En mouvement forcé

- L'équation du mouvement est :

$$m\ddot{z} + \alpha\dot{z} + kz = F(t)$$

$$Avec \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \nu = \frac{\alpha}{2m\omega_0}$$

$$\ddot{z} + 2\nu\omega_0\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F(t)}{m}$$

- La solution de l'équation différentielle est :

$$\dot{z}(t) = V(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi) = R_e V_0 e^{j(\omega t + \phi)}$$

$$Avec \quad z(t) = \frac{\dot{z}(t)}{j\omega} \quad \ddot{z}(t) = j\omega\dot{z}(t)$$

  - ❖ En remplaçant dans l'équation du mouvement on obtient alors :

$$V(t) = \frac{\frac{F_0}{m}}{2\nu\omega_0 + j\omega(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2})} e^{j\omega t}$$

- Le module de la vitesse est de forme :

$$V_0(\omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(2\nu\omega_0)^2 + \omega^2(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2})^2}}$$

- L'étude des variations du module de la vitesse :

$$\frac{dV_0(\omega)}{d\omega} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} V_0(\omega) = V_{max} \\ \omega = \omega_r = \omega_0 \end{array}$$

  - ❖ Pour cette pulsation on a le phénomène de résonance.
  - ❖ L'allure de la courbe $V_0(\omega)$ est de forme :

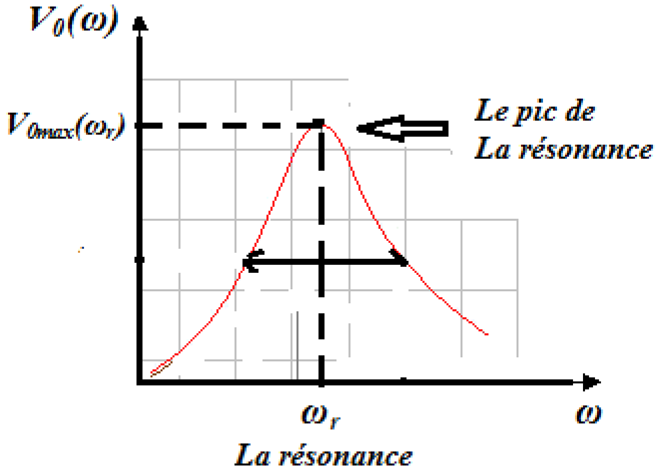


Figure 4.12: Vitesse d'oscillation du moteur

- ***Application numérique*** :

$$\omega_{r1} = \omega_{01} = \sqrt{\frac{k_1}{m}} \quad V_{max\,1}(\omega_{01}) = \frac{F_0}{2m\,v\omega_{01}}$$

$$\omega_{r2} = \omega_{02} = \sqrt{\frac{k_2}{m}} \quad V_{max\,2}(\omega_{02}) = \frac{F_0}{2m\,v\omega_{02}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{V(\omega_{02})}{V(\omega_{01})} = \frac{\omega_{01}}{\omega_{02}}$$

Problèmes supplémentaires

Problème 7 :

Soit un disque de masse négligeable enroulé par un fil inextensible et non glissant, comme le montre la figure ci-dessous :

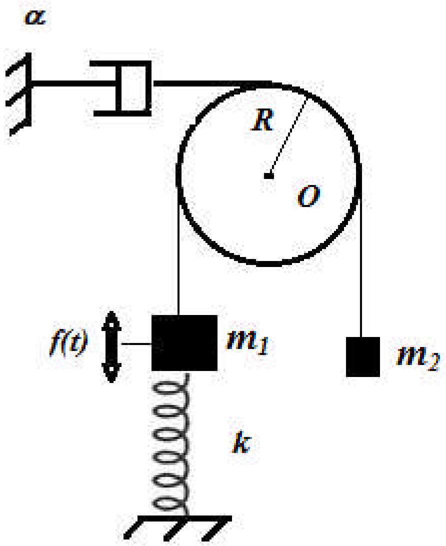


Figure 4.13: Mouvement forcé

Mode libre :

Dans le cas des oscillations libres

- Déterminer le Lagrangien du système
- Etablir l'équation différentielle du mouvement.
- En déduire la pulsation propre
- Donner la solution générale avec les conditions suivantes :

$$\theta(t=0)=0\,,\dot{\theta}(t=0)=\theta_0\,.$$

Mode forcé :

On admet que les frottements existent, la masse m_1 effectue des oscillations forcées sous l'effet d'une force sinusoïdale : $f(t)=f_0\cos\Omega t$

- Etablir la nouvelle équation du mouvement.
- Déterminer le module de la solution permanente de l'équation différentielle.

- Quelle est la fréquence pour que le module de l'amplitude soit maximum.
- Donner la bande passante et le facteur de qualité Q pour les faibles amortissements.
- ***Application numérique*** : on donne $m_1=2Kg$, $m_2=1Kg$, $k=10N/m$ et $\lambda=0.1N.s/m$. Calculer Q.

Chapitre 5 :

Mouvement à plusieurs degrés de liberté

Rappel théorique

On définit les systèmes à plusieurs degrés de libertés par les systèmes qui nécessitent plusieurs coordonnées indépendantes pour spécifier leurs. Le nombre de degré de liberté détermine les modes propres.

Il existe deux types de systèmes :

- Systèmes simples à plusieurs sous systèmes découplés comme le montre la figure 5.1:

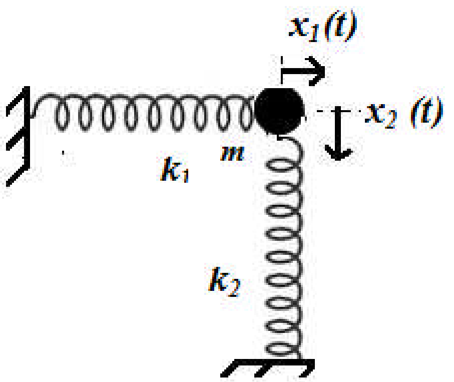


Figure 5.1: Mouvement à deugrès de liberté

- Il existe deux degrés de liberté, x_1, x_2
- Le lagrangien du système s'écrit alors :

$$L = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} k_i x_i^2$$

- Les deux sous systèmes sont indépendants et découplés :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_{01}^2 x_1 = 0 \\ \ddot{x}_2 + \omega_{02}^2 x_2 = 0 \end{cases} avec \quad \omega_{01}^2 = \frac{k_1}{m_1}, \omega_{02}^2 = \frac{k_1}{m_1}$$

- Les deux solutions des sous systèmes sont indépendantes de formes :

$$\begin{cases} x_1(t) = A\cos(\omega_{01} t + \varphi_1) \\ x_2(t) = B\cos(\omega_{02} t + \varphi_2) \end{cases}$$

- Systèmes complexe à plusieurs sous systèmes couplés comme le montre la figure 5.2:

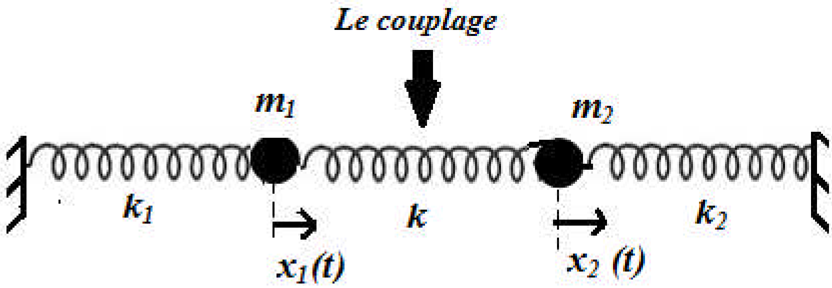


Figure 5.2: Mouvement couplé à deux degrés de liberté

Le Lagrangien s'écrit comme suit :

$$L = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 - \frac{1}{2} k(x_1 - x_2)^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} k_i x_i^2$$

- Le système différentiel couplé devient alors **:**

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_2 - k_1 x_1 = 0 \end{cases}$$

  - La solution s'écrit sous forme d'une superposition des deux modes propres, comme suit :

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1 \cos(\omega_{01} t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_{02} t + \varphi_2) \\ x_2(t) = B_1 \cos(\omega_{01} t + \varphi_1) + B_2 \cos(\omega_{02} t + \varphi_2) \end{cases}$$

  - Il existe plusieurs types de couplage :

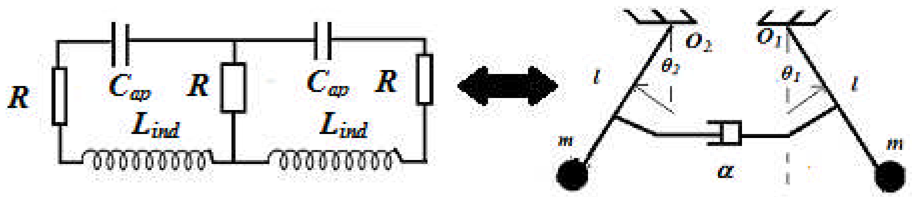


Figure 5.3: Couplage équivalent, Resistance-Force de frottement

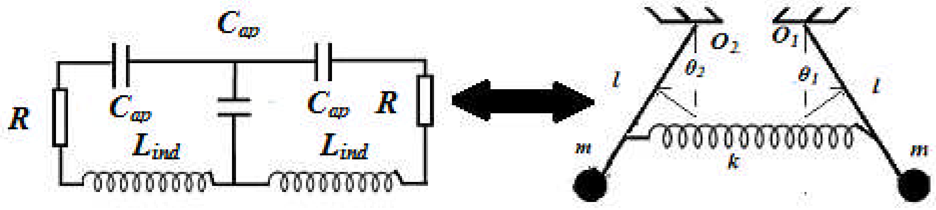


Figure 5.4: Couplage équivalent, Ressort-Capacité

Applications :

Problème 1 :

Partie1 :

On représente le système mécanique comme suit :

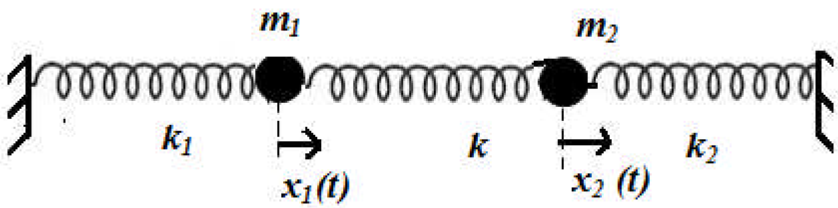


Figure 5.5: Couplage de deux ressorts

- Quel est le nombre de degré de liberté ?
- Déterminer le Lagrangien du système
- Etablir les équations différentielles du mouvement.
- En déduire les modes fondamentales

Partie2 :

On pose les paramètres suivants : $k_1=k_2=k$ et $m_1=m_2=m$, et on lance le système sans vitesses initiales avec *les conditions initiales suivantes*: $x_1(t)=C$, $x_2(t)=0$.

- Etablir les nouvelles équations différentielles du mouvement.
- En déduire les pulsations propres
- Donner les solutions générales.
- Quelle est la nature du phénomène étudié **?**

Parie3 :

On impose une force sinusoïdale extérieure $f(t) = f_0 \cos \omega t$ au premier sous système.

- Déterminer les nouvelles équations du mouvement.
- En déduire le module des amplitudes.
- Quelles est la nature du phénomène étudié ?

Solutions :

Partie1 :

- Le nombre de degré de liberté du système est de 2
- Le Lagrangien du système est :

$$L = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 - \frac{1}{2} k(x_1 - x_2)^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} k_i x_i^2$$

- Le système différentiel s'écrit :

$$\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k)x_1 - kx_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + (k_2 + k)x_2 - kx_1 = 0 \end{cases}$$

- Les pulsations propres :
  - ❖ On considère les solutions du système de type sinusoïdal :

$$\begin{cases} x_1(t) = Ae^{j(\omega_p t + \varphi)} \\ x_2(t) = Be^{j(\omega_p t + \varphi)} \end{cases}$$

  - ❖ En remplaçant les solutions dans le système différentiel, On obtient un système linéaire suivant :

$$\begin{cases} (-m_1\omega_p^2 + k_1 + k)A - kB = 0 \\ (-m_2\omega_p^2 + k_2 + k)B - kA = 0 \end{cases}$$

  - ❖ Le système admet des solutions non nulles si seulement si :

$$det = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -m_1\omega_p^2 + k + k_1 & -k \\ -k & -m_2\omega_p^2 + k_2 + k \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \omega_p^4 - (\omega_1^2 + \omega_2^2)\omega_p^2 + \omega_1^2\omega_2^2(1 - K^2) = 0$$

$$Avec \quad \omega_1^2 = \frac{k_1}{m_1} \quad \omega_2^2 = \frac{k_2}{m_2} \quad K^2 = \frac{k^2}{(k_1 + k)(k_2 + k)}$$

K est appelée le coefficient du couplage

  - ❖ Les deux pulsations propres sont :

$$\begin{cases} \omega_{1p}^2 = \dfrac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4K^2\omega_1^2\omega_2^2} \\ \omega_{2p}^2 = \dfrac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4K^2\omega_1^2\omega_2^2} \end{cases}$$

Partie 2 :

- Les nouvelles équations du mouvement s'écrivent comme suit :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 + 2kx_2 - kx_1 = 0 \end{cases}$$

- Les pulsations propres :
  - ❖ Les solutions du système sont de types sinusoïdaux :

$$\begin{cases} x_1(t) = Ae^{j(\omega_p t+\varphi)} \\ x_2(t) = Be^{j(\omega_p t+\varphi)} \end{cases}$$

  - ❖ En remplaçant les solutions dans le système différentiel, On obtient un système linéaire symétrique suivant :

$$\begin{cases} (-m\omega_p^2 + 2k)A - kB = 0 \\ (-m\omega_p^2 + 2k)B - kA = 0 \end{cases}$$

  - ❖ Le système admet des solutions non nulles si seulement si :

$$det = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -m\omega_p^2 + 2k & -k \\ -k & -m\omega_p^2 + 2k \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (-m\omega_p^2 + 2k)^2 - k^2 = 0$$

  - ❖ Les deux pulsations propres sont :

$$\begin{cases} \omega_{1p}^2 = \dfrac{k}{m} \\ \omega_{2p}^2 = 3\dfrac{k}{m} \end{cases}$$

- Les solutions générales :

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1 cos(\omega_{1p}t + \varphi) + A_2 cos(\omega_{2p}t + \varphi) \\ x_2(t) = B_1 cos(\omega_{1p}t + \varphi) + B_2 cos(\omega_{2p}t + \varphi) \end{cases}$$

  - ❖ En appliquant les conditions initiales, on trouve :

$$\begin{cases} x_1(t) = C\cos\dfrac{\omega_{1p} + \omega_{2p}}{2}t \cos\dfrac{\omega_{1p} - \omega_{2p}}{2}t \\ x_2(t) = -C\sin\dfrac{\omega_{1p} + \omega_{2p}}{2}t \sin\dfrac{\omega_{1p} - \omega_{2p}}{2}t \end{cases}$$

- Le phénomène étudié est le battement ou modulation d'amplitude.

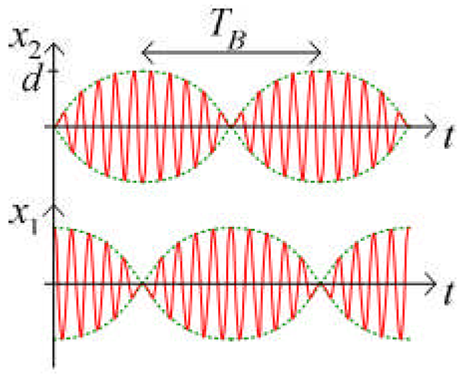


Figure 5.6: Modulation d'amplitude

Partie 3 :

- Les équations du mouvement s'écrivent comme suit :

$$\begin{array}{l} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_1}=0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_2}=0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1+2kx_1-kx_2=f(t)=R_e\left\{f_0e^{j\omega t}\right\} \\ m\ddot{x}_2+2kx_2-kx_1=0 \end{cases}$$

- Les solutions particulières sont :

$$\begin{cases} x_1(t)=x_{1p}(t)=Ae^{j(\omega_p t+\varphi)} \\ x_2(t)=x_{2p}(t)=Be^{j(\omega_p t+\varphi)} \end{cases}$$

  - ❖ En remplaçant les solutions dans le système différentiel, On obtient un système linéaire forcé suivant :

$$\begin{cases} (-m\omega_p^2+2k)\tilde{A}-k\tilde{B}=f_0 \\ (-m\omega_p^2+2k)\tilde{B}-k\tilde{A}=0 \end{cases}$$

$$Avec \quad \tilde{A}=Ae^{j\varphi} \qquad \tilde{B}=Be^{j\varphi}$$

  - ❖ Les modules des amplitudes sont :

$$\begin{cases} A=\dfrac{\begin{vmatrix} f_0 & -k \\ 0 & -m\omega_p^2+2k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -m\omega_p^2+2k & -k \\ -k & -m\omega_p^2+2k \end{vmatrix}}=\dfrac{\frac{f_0}{m}\left(-\omega^2+\frac{k}{m}\right)}{(\omega^2-\omega_{1p}^2)(\omega^2-\omega_{2p}^2)} \\ B=\dfrac{\begin{vmatrix} -m\omega_p^2+2k & f_0 \\ -k & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -m\omega_p^2+2k & -k \\ -k & -m\omega_p^2+2k \end{vmatrix}}=\dfrac{\frac{f_0k}{m^2}}{(\omega^2-\omega_{1p}^2)(\omega^2-\omega_{2p}^2)} \end{cases}$$

- Les phénomènes étudiés sont :
  - ❖ la résonance

$$\begin{cases} A \to \infty \\ B \to \infty \end{cases} quand \quad \omega \to \omega_{1p} \quad \omega \to \omega_{2p}$$

- ❖ anti résonance.

$$\begin{cases} A \to 0 \\ B \to constante \end{cases} quand \quad \omega \to \frac{k}{m}$$

Problème 2 :

On considère deux circuits électriques (R, L_{ind}, C_{ap}) couplés représenté par la figure 5.7 comme suit:

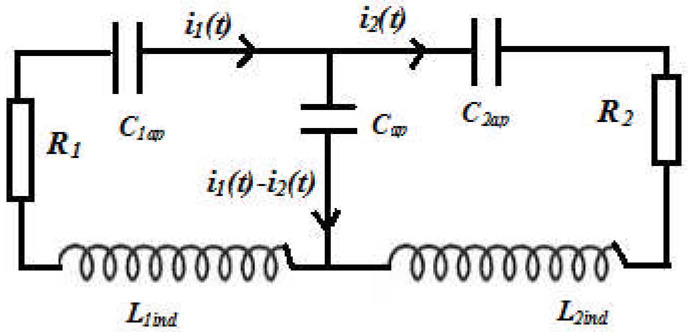


Figure 5.8: Deux circuit couplés par une capacité

- Quel est le nombre de degré de liberté ?
- Déterminer le Lagrangien du système.
- Donner les équations du mouvement

On néglige les résistances des deux circuits. On prend les nouvelles grandeurs physiques tel que: $L_{1ind} = L_{2ind} = L_{ind}$ et $C_{1ap} = C_{2ap} = C_{ap}$ et $\omega_0^2 = \frac{1}{L_{ind} C_{ap}}$.

- Etablir les nouvelles équations différentielles du mouvement.
- En déduire les pulsations propres du système en fonction de ω_0.
- Donner les solutions générales.
- Quel est le modèle mécanique équivalent ?

Solutions :

- Nombre de degré de liberté est 2 car les deux courants parcourus dans les deux circuits sont différents.
- Le Lagrangien du système est exprimé comme suit :

$$\hat{L} = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2} L_{iind}\, \dot{q}_i^2 - \frac{1}{2C_{ap}}(q_1 - q_2)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} \frac{1}{C_{iap}}\, q_i^2$$

- Le système différentiel :

$$\begin{cases} L_{1ind}\,\ddot{q}_1 + (\frac{1}{C_{1ap}} + \frac{1}{C_{ap}})q_1 - \frac{1}{C_{ap}} q_2 = 0 \\ L_{2ind}\,\ddot{q}_2 + (\frac{1}{C_{2ap}} + \frac{1}{C_{ap}})q_2 - \frac{1}{C_{ap}} q_1 = 0 \end{cases}$$

Partie 2 :

- Les nouvelles équations du mouvement :

$$\begin{cases} L_{ind}\,\ddot{q}_1 + \frac{2}{C_{ap}} q_1 - \frac{1}{C_{ap}} q_2 = 0 \\ L_{ind}\,\ddot{q}_2 + \frac{2}{C_{ap}} q_2 - \frac{1}{C_{ap}} q_1 = 0 \end{cases}$$

- Les pulsations propres :
  - ❖ On considère les solutions du système de type sinusoïdal :

$$\begin{cases} q_1(t) = Ae^{j(\omega_p t + \varphi)} \\ q_2(t) = Be^{j(\omega_p t + \varphi)} \end{cases}$$

  - ❖ En remplaçant les solutions dans le système différentiel, On obtient un système linéaire symétrique suivant :

$$\begin{cases} (-L_{ind}\,\omega_p^2 + \frac{2}{C_{ap}})A - \frac{1}{C_{ap}} B = 0 \\ (-L_{ap}\,\omega_p^2 + \frac{2}{C_{ap}})B - \frac{1}{C_{ap}} A = 0 \end{cases}$$

  - ❖ Le système admet des solutions non nulles si seulement si :

$$det = 0 \quad \Rightarrow \quad (-L_{ind}\,\omega_p^2 + \frac{1}{C_{ap}})^2 - (\frac{1}{C_{ap}})^2 = 0$$

  - ❖ Les deux pulsations propres sont :

$$\begin{cases} \omega_{1p}^2 = \frac{1}{L_{ind}\, C_{ap}} \\ \omega_{2p}^2 = \frac{3}{L_{ind}\, C_{ap}} \end{cases}$$

- Les solutions générales :

$$\begin{cases} q_1(t) = A_1 \cos(\omega_{1p} t + \varphi) + A_2 \cos(\omega_{2p} t + \varphi) \\ q_2(t) = B_1 \cos(\omega_{1p} t + \varphi) + B_2 \cos(\omega_{2p} t + \varphi) \end{cases}$$

- Le système mécanique équivalent est représenté par la figure 5.9 comme suit:

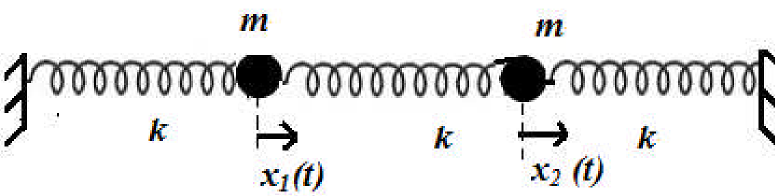


Figure 5.9: Deux systèmes identiques couplés à deux degrés de liberté

Problème 3 :

On a un système mécanique constitué par trois masses couplés par deux ressorts identiques de constante de raideur *k* représenté dans la figure 5.10 comme suit:

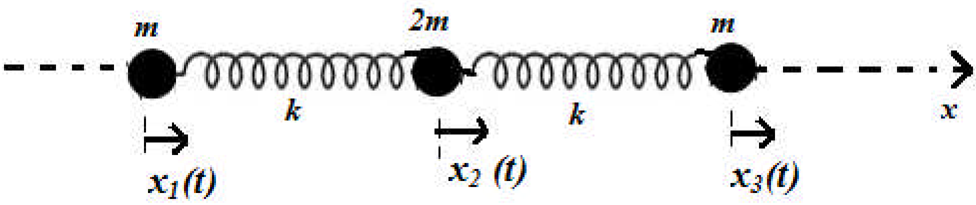


Figure 5.10: Mouvement couplé

- Etablir le Lagrangien du système.
- Déterminer les équations différentielles du mouvement.
- En déduire les pulsations propres ainsi la nature du mouvement.
- Donner la matrice de passage.
- Donner les solutions générales.

Solutions :

- Le Lagrangien du système **:**

$$L = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 - \frac{1}{2} k (x_1 - x_2)^2 - \frac{1}{2} k (x_2 - x_3)^2$$

- L'équation différentielle :

$$\begin{array}{l} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_1}=0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_2}=0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_3}=0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1+kx_1-kx_2=0 \\ 2m\ddot{x}_2++2kx_2-kx_1-kx_3=0 \\ m\ddot{x}_3+kx_3-kx_2=0 \end{cases}$$

- Les pulsations propres :
  - On considère les solutions du système de type sinusoïdal :

$$\begin{cases} x_1(t)=Ae^{j(\omega_p t+\varphi)} \\ x_2(t)=Be^{j(\omega_p t+\varphi)} \\ x_3(t)=Ce^{j(\omega_p t+\varphi)} \end{cases}$$

  - En remplaçant les solutions dans le système différentiel, On obtient un système linéaire suivant :

$$\begin{cases} (-m\omega_p^2+k)A-kB=0 \\ (-2m\omega_p^2+2k)B-kA-kC=0 \\ (-m\omega_p^2+k)C-kB=0 \end{cases}$$

  - Le système admet des solutions non nulles si seulement si :

$$det=0 \quad \Rightarrow \quad (-m\omega_p^2+k)[(-m\omega_p^2+k)^2-k^2]=0$$

  - Les pulsations propres sont :

$$\begin{cases} \omega_{1p}^2=\frac{k}{m} \\ \omega_{2p}^2=0 \\ \omega_{3p}^2=\frac{2k}{m} \end{cases}$$

- La matrice de passage s'écrit:

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- La solution générale est :

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_1(t) \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} cos(\omega_{1p}t+\varphi_1) \\ cos(\omega_{2p}t+\varphi_2) \\ cos(\omega_{3p}t+\varphi_3) \end{pmatrix}$$

Problème 4 :

Sur un arbre *OO'* horizontal et fixe, de masse négligeable, encastré à ses extrémités *O* et *O'*, sont fixés trois disques (D_1), (D_2) et (D_3) de centres respectifs O_1, O_2 et O_3 et de même moment d'inertie *J* par rapport à leur axe commun *OO'*. On désignera $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ et $\theta_3(t)$, les angles angulaires de rotation de chacun des trois disques par rapport à leur position de repos, figure 5.11 :

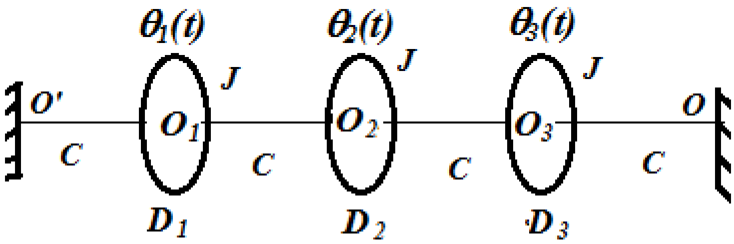


Figure 5.11: Mouvement couplés des disques à 3 degrés de liberté

Les quatre partis OO_1, O_1O_2, O_2O_3 et O_3O'de l'arbre ont même constante de torsion *C*.

On posera $\omega_0^2 = \frac{C}{J}$.

Régime libre :

- Déterminer le Lagrangien de ce système.
- Etablir les équations différentielles du second ordre vérifiées par les angles $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ et $\theta_3(t)$.
- En déduire les trois pulsations propres ω_{1p}, ω_{2p} et ω_{3p} de ce système en fonction de ω_0.
- Déterminer pour chaque des trois modes propres, les amplitudes angulaires des disques D_2 et D_3 si l'amplitude angulaire du disque D_1 est $A = 1$ *radian*.
- Calculer l'énergie mécanique totale E_T de cette chaîne de trois disques, pour chacun des modes propres, en fonction de C et de l'amplitude angulaire θ_{10} du disque D_1.

Régime forcé :

On applique au seul disque (D_1) un couple moteur sinusoïdal de moment $\Gamma(t) = \Gamma_0 \cos(\omega t)$, de pulsation ω réglable et d'amplitude Γ_0.

- Etablir en fonction du paramètre $X = (\frac{\omega}{\omega_0})^2$, les amplitudes angulaires A_1, A_2 *et* A_3 de chacun des disques en régime forcé.
- Pour quelles valeurs de X ce système est il en résonance ?

Solutions :

Régime libre :

- Le Lagrangien de ce système.

$$L = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} J\dot{\theta}_i^2 - \frac{1}{2}C(\theta_1 - \theta_2)^2 - \frac{1}{2}C(\theta_2 - \theta_3)^2 - \frac{1}{2}C\theta_3^2 - \frac{1}{2}C\theta_1^2$$

- Les équations différentielles sont :

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_3} = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \omega_0^2(2\theta_1 - \theta_2) = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \omega_0^2(2\theta_2 - \theta_1 - \theta_3) = 0 \\ \ddot{\theta}_3 + \omega_0^2(2\theta_3 - \theta_2) = 0 \end{cases}$$

- Les pulsations propres :
  - ❖ On considère les solutions du système de type sinusoïdal :

$$\begin{cases} \theta_1(t) = Ae^{j(\omega_p t + \varphi)} \\ \theta_2(t) = Be^{j(\omega_p t + \varphi)} \\ \theta_3(t) = Ce^{j(\omega_p t + \varphi)} \end{cases}$$

  - ❖ En remplaçant les solutions dans le système différentiel, On obtient un système linéaire suivant :

$$\begin{cases} (-\omega_p^2 + 2\omega_0^2)A - \omega_0^2 B = 0 \\ (-\omega_p^2 + 2\omega_0^2)B - \omega_0^2 A - \omega_0^2 C = 0 \\ (-\omega_p^2 + 2\omega_0^2)C - \omega_0^2 B = 0 \end{cases}$$

  - ❖ Le système admet des solutions non nulles si seulement si :

$$det = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\omega_p^2 + 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 & 0 \\ -\omega_0^2 & -\omega_p^2 + 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ 0 & -\omega_0^2 & -\omega_p^2 + 2\omega_0^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (-2\omega_p^2 + 2\omega_0^2)[(2\omega_0^2 - \omega_p^2)^2 - (\sqrt{2}\omega_0^2)^2] = 0$$

- ❖ Les pulsations propres sont :

$$\omega_{1p} = \omega_0 \sqrt{2}$$
$$\omega_{2p} = \omega_0 \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$
$$\omega_{3p} = \omega_0 \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

- Les amplitudes angulaires des disques D_2 *et* D_3

$$\omega_p = \omega_{1p} = \omega_0\sqrt{2} \qquad \theta_2 = 0 \qquad \theta_3 = -\theta_2$$
$$\omega_p = \omega_{2p} = \omega_0\sqrt{2-\sqrt{2}} \qquad \theta_2 = \sqrt{2}\theta_1 \qquad \theta_2 = \sqrt{2}\theta_3$$
$$\omega_p = \omega_{3p} = \omega_0\sqrt{2+\sqrt{2}} \qquad \theta_2 = -\sqrt{2}\theta_1 \qquad \theta_2 = -\sqrt{2}\theta_3$$

- L'énergie mécanique totale E_T :

$$E_T = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} J\dot{\theta}_i^2 + \frac{1}{2}C(\theta_1 - \theta_2)^2 + \frac{1}{2}C(\theta_2 - \theta_3)^2 + \frac{1}{2}C\theta_3^2 + \frac{1}{2}C\theta_1^2$$

Régime forcé :

- Les amplitudes angulaires A_1, A_2 *et* A_3 :

$$\begin{array}{l} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_3} = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} J\ddot{\theta}_1 = -C\theta_1 - C(\theta_1 - \theta_2) + \Gamma_0 \cos(\omega t) \\ \ddot{\theta}_2 + \omega_0^2(2\theta_2 - \theta_1 - \theta_3) = 0 \\ \ddot{\theta}_3 + \omega_0^2(2\theta_3 - \theta_2) = 0 \end{cases}$$

- ❖ En régime forcé les solutions sont du type :

$$\begin{cases} \theta_1(t) = A_1 e^{j\omega t} \\ \theta_2(t) = A_2 e^{j\omega t} \\ \theta_3(t) = A_3 e^{j\omega t} \end{cases}$$

- ❖ En remplaçant dans le système différentiel, on obtient le résultat suivant :

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{\Gamma_0}{C}\dfrac{(1-X)(3-X)}{(2-X)(2+\sqrt{2}-X)(2-\sqrt{2}-X)} \\ A_2 = \dfrac{\Gamma_0}{C}\dfrac{1}{(2+\sqrt{2}-X)(2-\sqrt{2}-X)} \\ A_3 = \dfrac{\Gamma_0}{C}\dfrac{1}{(2-X)(2+\sqrt{2}-X)(2-\sqrt{2}-X)} \end{cases}$$

- Ce système entre en résonnance pour les valeurs de *X* suivantes :

$$X = 2$$
$$X = 2-\sqrt{2}$$
$$X = 2+\sqrt{2}$$

Problème 5 :

On considère trois pendules simples identiques, de masses *m*, de longueur *l*, présentés dans la figure 5.12. Les masses sont reliées entre elles par l'intermédiaire de deux ressorts identiques, de raideur *k*. A l'équilibre, les pendules sont verticaux, les trois masses sont équidistantes sur une même, et les ressorts ont leur longueur naturelle. Le système en mouvement est défini, à l'instant *t*, par les élongations angulaires $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ des pendules avec la verticale descendante. On posera $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ et $\Omega_0^2 = \dfrac{g}{l}$.

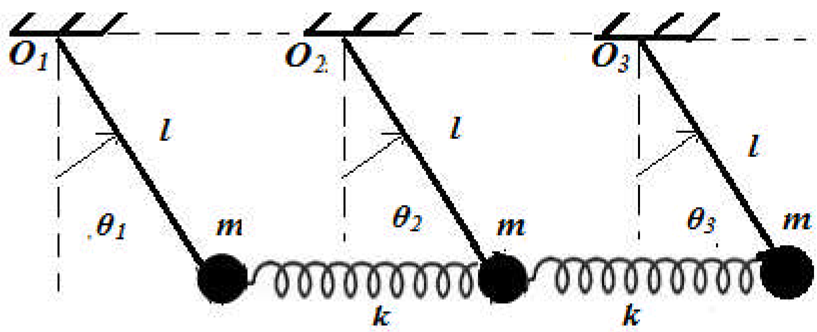


Figure 5.12: Couplage de trois pendules simples

- Déterminer le Lagrangien du système
- Etablir les équations différentielles du second ordre vérifiées par les élongations angulaires $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$, et $\theta_3(t)$ pour les petites oscillations du système.
- Déterminer les pulsations propres du système.
- ***Application numérique*** : $m=1kg$, $k=10N/m$; $l=1m$, $g=10m\ s^{-2}$.

- Déterminer le rapport des amplitudes angulaires $\frac{B}{A}$ *et* $\frac{C}{A}$ pour chacun des modes propres de ce système.

Solutions :

- Le Lagrangien du système **:**

$$L = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}_i^2 - \frac{1}{2} k(l\theta_1 - l\theta_2)^2 - \frac{1}{2} k(l\theta_2 - l\theta_3)^2 + \sum_{i=1}^{3} mgl \cos\theta_i$$

- L'équation différentielle :

$$\begin{array}{l} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_3} = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta}_1 + (\Omega_0^2 + \omega_0^2)\theta_1 - \omega_0^2 \theta_2 = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + (\Omega_0^2 + 2\omega_0^2)\theta_2 - \omega_0^2 \theta_1 - \omega_0^2 \theta_3 = 0 \\ \ddot{\theta}_3 + (\Omega_0^2 + \omega_0^2)\theta_3 - \omega_0^2 \theta_2 = 0 \end{cases}$$

- Les pulsations propres :
  - On considère les solutions du système de type sinusoïdal :

$$\begin{cases} \theta_1(t) = Ae^{j(\omega_p t + \varphi)} \\ \theta_2(t) = Be^{j(\omega_p t + \varphi)} \\ \theta_3(t) = Ce^{j(\omega_p t + \varphi)} \end{cases}$$

  - En remplaçant les solutions dans le système différentiel, On obtient un système linéaire suivant :

$$\begin{cases} (-\omega_p^2 + \Omega_0^2 + \omega_0^2)A - \omega_0^2 B = 0 \\ (-\omega_p^2 + \Omega_0^2 + 2\omega_0^2)B - \omega_0^2 A - \omega_0^2 C = 0 \\ (-\omega_p^2 + \Omega_0^2 + \omega_0^2)C - \omega_0^2 B = 0 \end{cases}$$

  - Le système admet des solutions non nulles si seulement

$$det = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\omega_p^2 + \omega_0^2 + \Omega_0^2 & -\omega_0^2 & 0 \\ -\omega_0^2 & -\omega_p^2 + 2\omega_0^2 + \Omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ 0 & -\omega_0^2 & -\omega_p^2 + \omega_0^2 + \Omega_0^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (-\omega_p^2 + \Omega_0^2 + \omega_0^2)[\omega_p^4 - (2\Omega_0^2 + 3\omega_0^2)\omega_p^2 + \Omega_0^4 + 3\omega_0^2\Omega_0^2] = 0$$

  - Les pulsations propres sont alors:

$$\begin{cases} \omega_{1p} = \Omega_0 & \Rightarrow \quad \omega_p = 3.16\ rad/s \\ \omega_{2p} = \sqrt{\Omega_0^2 + \omega_0^2} & \Rightarrow \quad \omega_p = 4.46\ rad/s \\ \omega_{3p} = \sqrt{\Omega_0^2 + 3\omega_0^2} & \Rightarrow \quad \omega_p = 6.32\ rad/s \end{cases}$$

- Les rapports des amplitudes sont :

$$\omega_{1p} = \Omega_0 \qquad \frac{B}{A} = 1 \qquad \frac{C}{A} = 1$$

$$\omega_{2p} = \sqrt{\Omega_0^2 + \omega_0^2} \qquad \frac{B}{A} = 0 \qquad \frac{C}{A} = -1$$

$$\omega_{3p} = \sqrt{\Omega_0^2 + 3\omega_0^2} \qquad \frac{B}{A} = -2 \qquad \frac{C}{A} = 1$$

<u>Problème 6:</u>

Soit le système mécanique, constitué de deux pendules simples de longueur l et de masses m_1, m_2 représentés dans la figure 5.13 comme suit :

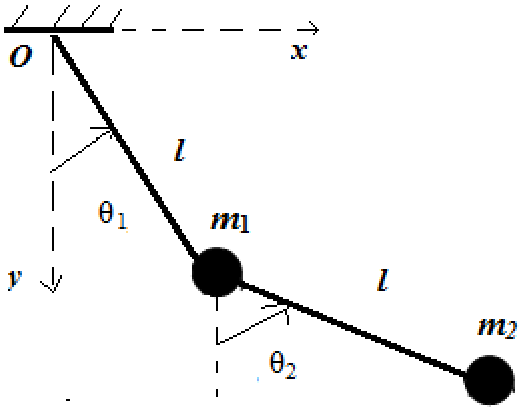


Figure 5.13: Couplage de deux pendules simples

- Etablir le Lagrangien du système
- Donner les équations différentielles du mouvement pour les faibles oscillations.
- On pose $\omega_0^2 = \dfrac{g}{l}$ et $\mu = \dfrac{m_1}{m_2}$. Déterminer ω_{1p} *et* ω_{2p} les pulsations propres du système en fonction des paramètres μ *et* ω_0.

<u>Solutions:</u>

- Le Lagrangien du système :
  - ❖ L'énergie cinétique s'écrit :

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 V_{m_1}^2 + \frac{1}{2} m_2 V_{m_2}^2$$

En calculant les vitesses par rapport au repère fixe :

$$O\vec{m}_1 = \begin{pmatrix} x_{m_1} = l\sin\theta_1 \\ y_{m_1} = l\cos\theta_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{V}_{m_1} = \begin{pmatrix} \dot{x}_{m_1} = l\dot{\theta}_1\cos\theta_1 \\ y_{m_1} = -l\dot{\theta}_1\sin\theta_1 \end{pmatrix}$$

$$O\vec{m}_2 = \begin{pmatrix} x_{m_2} = l(\sin\theta_1 + \sin\theta_2) \\ y_{m_2} = l(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{V}_{m_2} = \begin{pmatrix} \dot{x}_{m_2} = l(\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + \dot{\theta}_1\cos\theta_2) \\ \dot{y}_{m_2} = -l(\dot{\theta}_1\sin\theta_1 + \dot{\theta}_2\sin\theta_2) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} V_{m_1}^2 = \dot{x}_{m_1}^2 + \dot{y}_{m_1}^2 \\ V_{m_2}^2 = \dot{x}_{m_2}^2 + \dot{y}_{m_2}^2 \end{matrix}$$

- ❖ L'énergie potentielle s'écrit :

$$E_p = m_1 gl\cos\theta_1 + m_2 gl(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$$

- ❖ Alors le Lagrangien devient alors:

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l^2\dot{\theta}_2^2 + m_2 l^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)$$
$$+ m_1 gl\cos\theta_1 + m_2 gl(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$$

- Le système différentiel devient :

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)l\ddot{\theta}_1 + m_2 l\ddot{\theta}_2(m_1 + m_2)g\theta_1 = 0 \\ l\ddot{\theta}_2 + l\ddot{\theta}_1 + g\theta_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1+\mu)\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2(1+\mu)\omega_0^2\theta_1 = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1 + \omega_0^2\theta_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Avec} \quad \mu = \frac{m_1}{m_2} \text{ et } \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

- Les pulsations propres :
  - ❖ On considère les solutions du système de type sinusoïdal :

$$\begin{cases} \theta_1(t) = Ae^{j(\omega_p t + \varphi)} \\ \theta_2(t) = Be^{j(\omega_p t + \varphi)} \end{cases}$$

  - ❖ En remplaçant les solutions dans le système différentiel, On obtient un système linéaire symétrique suivant :

$$\begin{cases} (-\omega_p^2 + \omega_0^2)(1+\mu)A - \omega_p^2 B = 0 \\ -\omega_p^2 A + (-\omega_p^2 + \omega_0^2)B = 0 \end{cases}$$

  - ❖ Le système admet des solutions non nulles si seulement si :

$$det = 0 \quad \Rightarrow \quad (-\omega_p^2 + \omega_0^2)^2(1+\mu) - \omega_p^4 = 0$$

  - ❖ Les deux pulsations propres sont ω_{1p} *et* ω_{2p} exprimées comme suit :

$$\begin{cases} \omega_{1p}^2 = \dfrac{\sqrt{1+\mu}}{1+\sqrt{1+\mu}}\omega_0^2 \\ \omega_{1p}^2 = \dfrac{\sqrt{1+\mu}}{-1+\sqrt{1+\mu}}\omega_0^2 \end{cases}$$

- Les solutions générales sont :

$$\begin{cases} \theta_1(t) = A_1\cos(\omega_{1p}t + \varphi) + A_2\cos(\omega_{2p}t + \varphi) \\ \theta_2(t) = B_1\cos(\omega_{1p}t + \varphi) + B_2\cos(\omega_{2p}t + \varphi) \end{cases}$$

***Problème 7*:**

Un ressort est relie par ses deux extrémités a deux points matériels, *B* de masse *M* et *P* de masse *m*, figure 5.14. Ce dernier peut se déplacer sans frottement le long de l'axe *Ox* tandis que *B* est fixe à l'extrémité inferieur d'un fil inextensible, de longueur *l=OA*, de masse négligeable, accroche en a un support horizontal et pouvant tourner librement autour de l'axe *Az* . Le ressort a une masse négligeable, une raideur *k* et une longueur a vide également négligeable. Il a la possibilité, avec *P*, d'être à gauche ou à droite de *B*. le champ de pesanteur est de la forme $\vec{g} = -g\vec{u}_y$ et on suppose que l'angle θ défini par l'attitude du fil relativement à la verticale reste petit.

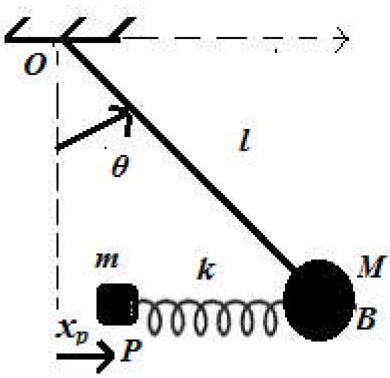


Figure 5.14: Mouvement à deux degrés de liberté

- Etablir le Lagrangien du système
- Déterminer les équations du mouvement
- On pose $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$, $\omega_1^2 = \frac{k}{m}$, $\omega_2^2 = \frac{k}{M}$ et $r = \frac{\omega_0^2}{2\omega_1^2}$.

  Mettre les équations du mouvement en fonction les paramètres ω_0, ω_1 *et* ω_2.
- On cherche une solution de la forme : $x_p = Xe^{j\omega_p t}$ et $l\theta = Ye^{j\omega_p t}$ **.**

  Déterminer les modes propres ω_{1p} *et* ω_{2p}
- On n'admet désormais que *m=M*.

  Exprimer les deux pulsations propres ω_{1p} *et* ω_{2p} en fonction de *r* et ω_1.
- En déduire la solution générale**.**

Solutions :

- Le Lagrangien du système :

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_p^2 + \frac{1}{2}M(l\dot{\theta})^2 - \frac{1}{2}k(x_p - l\theta)^2 + Mgl\cos\theta$$

- Les équations du mouvement :

$$\begin{cases} l\ddot{\theta} + (\omega_2^2 + \omega_0^2)l\theta - \omega_2^2 x_p = 0 \\ \ddot{x}_p + \omega_1^2 x_p - \omega_1^2 l\theta = 0 \end{cases}$$

- Les solutions sont de forme :

$x_p = Xe^{j\omega t}$ et $l\theta = Ye^{j\omega t}$.

❖ En remplaçant les solutions dans le système différentiel, On obtient un système linéaire symétrique suivant :

$$\begin{cases} -\omega_2^2 X + (-\omega_p^2 + \omega_0^2 + \omega_2^2)Y = 0 \\ (-\omega_p^2 + \omega_1^2)X - \omega_1^2 Y = 0 \end{cases}$$

❖ Le système admet des solutions non nulles si seulement si :

$$det = 0 \quad \Rightarrow \quad (-\omega_p^2 + \omega_0^2 + \omega_2^2)(-\omega_p^2 + \omega_1^2) - \omega_1^2\omega_2^2 = 0$$

❖ Les deux pulsations propres sont :

$$\begin{cases} \omega_{1p}^2 = \dfrac{\omega_0^2 + 2\omega_1^2 + \sqrt{(\omega_0^2 + 2\omega_1^2)^2 - 4\omega_0^2\omega_1^2}}{2} \Rightarrow \quad \omega_{1p} = \omega_1\sqrt{r + 1 + \sqrt{r^2 + 1}} \\ \omega_{2p}^2 = \dfrac{\omega_0^2 + 2\omega_1^2 - \sqrt{(\omega_0^2 + 2\omega_1^2)^2 - 4\omega_0^2\omega_1^2}}{2} \Rightarrow \quad \omega_{2p} = \omega_1\sqrt{r + 1 - \sqrt{r^2 + 1}} \end{cases} \quad avec \quad r = \frac{\omega_0^2}{2\omega_1^2}$$

- Les solutions générales :

$$\begin{cases} x_p(t) = X_1 \cos(\omega_{1p}t + \varphi) + X_2 \cos(\omega_{2p}t + \varphi) \\ Y(t) = Y_1 \cos(\omega_{1p}t + \varphi) + Y_2 \cos(\omega_{2p}t + \varphi) \end{cases}$$

Problème 8 :

Partie A : Régime libre

Soient deux circuits $(L_{ind} - C_{ap})$ identiques de résistances négligeables, figure 5.15. Le couplage par inductance mutuelle M est caractérisé par le coefficient de couplage $k = \dfrac{M}{L_{ind}}$. On posera $\omega_0^2 = \dfrac{1}{L_{ind} C_{ap}}$.

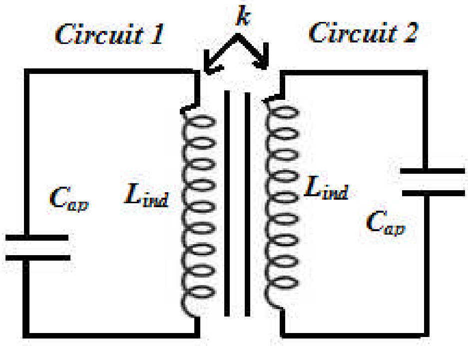


Figure 5.15: Couplage mutuel de deux circuit identiques

Ecrire les deux équations différentielles vérifiées par les charges $q_1(t)$ *et* $q_2(t)$ des condensateurs des circuits (1) et (2).

- Déterminer les équations différentielles vérifiées par la somme $S(t)=q_1+q_2$ et la différence $D(t)=q_1-q_2$.
- En déduire les pulsations propres ω' et ω'' de ce système couplé, en fonction des paramètres ω_0 et k.

On admet le couplage faible ($k = \frac{M}{L_{ind}} \ll 1$). A l'instant $t = 0$ où on ferme l'interrupteur, le condensateur du circuit (1) porte la charge q_{10} et celui du circuit (2) est déchargé.

- Montrer que la charge du condensateur du circuit (1) évolue au cours du temps suivant la loi:

  $q_1(t) = q_{10} \cos \varpi t \cos \omega_0 t$

  Où le paramètre ϖ sera exprimé en fonction de ω_0 et k.
- En déduire la loi d'évolution de la charge $q_2(t)$ du circuit (2).
- Quelle est la nature du phénomène étudié ? Commenter.

<u>Partie B : Régime forcé :</u>

Le circuit primaire (1), Figure 5.16 est maintenant alimenté par un générateur sinusoïdal de f.é.m. tel que $u(t) = u_0 \sin \omega t$.

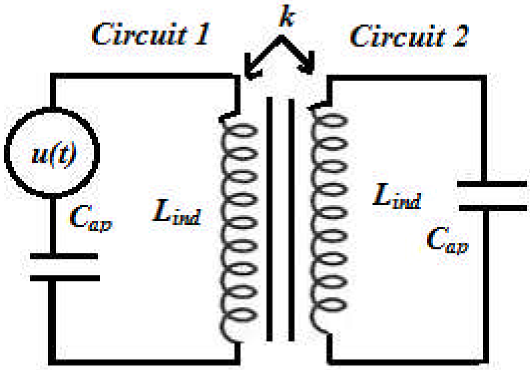


Figure 5.16: Mouvement forcé

On étudie le circuit couplé en régime permanent.

- Exprimer les charges $q_1(t)$ et $q_2(t)$ sous la forme

$q_1(t) = A(\omega)\cos\omega t$ et $q_2(t) = B(\omega)\cos\omega t$

Où on déterminera les amplitudes $q_1(\omega)$ et $q_2(\omega)$ en fonction de u_0, L_{ind}, ω_0 et k.

- Déterminer la pulsation ω_a d'anti résonance pour laquelle $q_1(\omega_a) = 0$. En déduire l'amplitude $q_2(\omega_a)$.
- Tracer l'allure des graphes $|q_1(\omega)|$ et $|q_2(\omega)|$.

Solutions :

- Les deux équations différentielles :

$$\begin{cases} Circuit\ 1 \Rightarrow \dfrac{q_1}{C_{ap}} + L_{ind}\dfrac{di_1}{dt} + M\dfrac{di_2}{dt} = 0 \\ Circuit\ 2 \Rightarrow \dfrac{q_2}{C_{ap}} + L_{ind}\dfrac{di_2}{dt} + M\dfrac{di_1}{dt} = 0 \end{cases}$$

❖ En introduisant le couplage $k = \dfrac{M}{L_{ind}}$, on obtient :

$$\begin{cases} Circuit\ 1 \Rightarrow \ddot{q}_1 + \omega_0^2 q_1 + k\ddot{q}_2 = 0 \\ Circuit\ 2 \Rightarrow \ddot{q}_2 + \omega_0^2 q_2 + k\ddot{q}_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{S} + \dfrac{\omega_0^2}{1+k}S = 0 \\ \ddot{D} + \dfrac{\omega_0^2}{1-k}D = 0 \end{cases}$$

- Les pulsations propres ω' et ω'' sont :

$$\omega' = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}} \quad et \quad \omega'' = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}}$$

- Les lois d'évolution des charges $q_2(t)$ et $q_2(t)$:

$$\begin{cases} q_1(t) = q_{1_0}\cos\dfrac{k\omega_0}{2}t\cos\omega_0 t \\ q_2(t) = q_{1_0}\sin\dfrac{k\omega_0}{2}t\sin\omega_0 t \end{cases} \quad Avec \quad \varpi = \frac{k\omega_0}{2}$$

- La nature du mouvement : Les battements

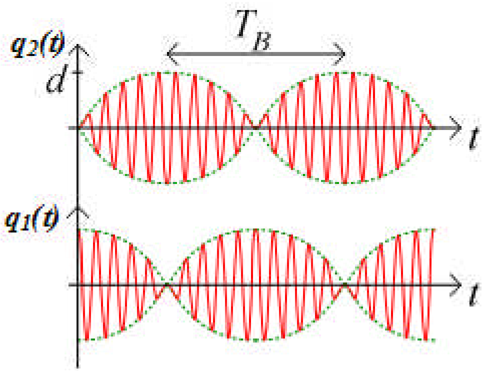


Figure 5.17: Phénomène les battements

Partie B : Régime forcé :

- Les charges $q_1(t)$ et $q_2(t)$:

$$\begin{cases} Circuit\ 1 \Rightarrow \dfrac{q_1}{C_{ap}} + L_{ind}\dfrac{di_1}{dt} + M\dfrac{di_2}{dt} = u_0 e^{j\omega t} \\ Circuit\ 2 \Rightarrow \dfrac{q_2}{C_{ap}} + L_{ind}\dfrac{di_2}{dt} + M\dfrac{di_1}{dt} = 0 \end{cases}$$

❖ En introduisant le couplage $k = \dfrac{M}{L_{ind}}$, on obtient :

$$\begin{cases} Circuit\ 1 \Rightarrow \ddot{q}_1 + \omega_0^2 q_1 + k\ddot{q}_2 = \dfrac{u_0}{L}e^{j\omega t} \\ Circuit\ 2 \Rightarrow \ddot{q}_2 + \omega_0^2 q_2 + k\ddot{q}_1 = 0 \end{cases}$$

❖ Les solutions particulières :

$q_1(t) = A(\omega)\cos\Omega t$ et $q_2(t) = B(\omega)\cos\Omega t$

❖ En remplaçant dans le système différentiel, on obtient alors :

$$\begin{cases} Circuit\ 1 \Rightarrow (-\omega^2 + \omega_0^2)A - k\omega^2 B = \dfrac{u_0}{L} \\ Circuit\ 2 \Rightarrow (-\omega^2 + \omega_0^2)B - k\omega^2 A = 0 \end{cases}$$

❖ Alors après le calcul, on aura :

$$A(\omega) = \frac{u_0}{L_{ind}} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - (k\omega^2)^2}$$

$$B(\omega) = \frac{u_0}{L_{ind}} \frac{k\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - (k\omega^2)^2}$$

- La pulsation ω_a d'anti résonance :

$$\omega_A = \omega_0 \quad \Rightarrow \quad B(\omega_A) = -\frac{u_0}{L_{ind}} \frac{1}{k\omega_0^2}$$

Problème 09 :

Deux pendules simples identiques O_1A_1 et O_2A_2 de masse m et de longueur l, sont couplés par un ressort horizontal de raideur k qui relie les deux masses A_1 et A_2, **figure** 5.18. A l'équilibre, le ressort horizontal a sa longueur naturelle l_0 tel que $l_0 = O_1 O_2$.

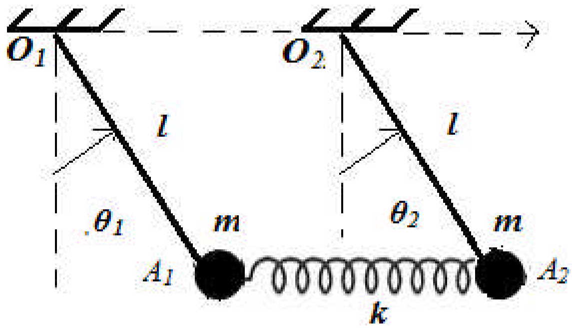


Figure 5.18: Couplage de deux pendules identiques

Les deux pendules sont repérés, à l'instant t, par leurs élongations angulaires θ_1 et θ_2 supposées petites par rapport à leur position verticale d'équilibre. On désignera g l'accélération de la pesanteur.

Modes propres :

- Déterminer le Lagrangien du système.
- Etablir les équations différentielles couplées vérifiées par les deux élongations angulaires instantanées θ_1 et θ_2
- Exprimer en fonction de g, k, l *et* m, les deux pulsations propres ω_{1p} et ω_{2p} de ce système.
- ***Applications numériques*** : Calculer ω_{1p} et ω_{2p} sachant que:

$$m = 100g \; ; \; l = 80cm \; ; \; k = 9.2\ N/m \text{ et } g = 9.8m/s^2.$$

On lâche sans vitesses initiales le système à l'instant $t=0$ dans les conditions initiales suivantes : $\theta_1=\theta_0$ et $\theta_2=0$

- En déduire les lois d'évolution. θ_1 et θ_2 aux instants t >0.
- Quel est le phénomène étudié.

Modes forcés :

La masse A est soumise à une force excitatrice horizontale de forme :

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t)$$

- Ecrire les nouvelles équations différentielles couplées en θ_1 et θ_2.
- Exprimer les relations complexes qui concernent les vitesses linéaires V_1 et V_2 des points A_1 et A_2 en régime forcé.
- En déduire l'impédance d'entrée complexe $\overline{Z}_e = \dfrac{F}{\tilde{V}_1}$.

Solutions :

- Le Lagrangien du système :

$$L = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2} ml^2\dot{\theta}_i^2 - \frac{1}{2}k(l\theta_1 - l\theta_2)^2 + \sum_{i=1}^{2} mgl\cos\theta_i$$

- Les équations différentielles couplées :

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + (\frac{g}{l} + \frac{k}{m})\theta_1 = \frac{k}{m}\theta_2 \\ \ddot{\theta}_2 + (\frac{g}{l} + \frac{k}{m})\theta_2 = \frac{k}{m}\theta_1 \end{cases}$$

- Les pulsations propres ω_{1p} et ω_{2p}:
  - ❖ On considère les solutions du système de type sinusoïdal :

$$\begin{cases} \theta_1(t) = Ae^{j(\omega_p t+\varphi)} \\ \theta_2(t) = Be^{j(\omega_p t+\varphi)} \end{cases}$$

  - ❖ En remplaçant les solutions dans le système différentiel, On obtient un système linéaire symétrique suivant :

$$\begin{cases} (-\omega_p^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m})A - \frac{k}{m}B = 0 \\ -\frac{k}{m}A + (-\omega_p^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m})B = 0 \end{cases}$$

  - ❖ Le système admet des solutions non nulles si seulement si :

$$det = 0 \quad \Rightarrow \quad (-\omega_p^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m})^2 - (\frac{k}{m})^2 = 0$$

❖ Les deux pulsations propres sont :

$$\begin{cases} \omega_{1p}^2 = \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow \quad \omega_{1p} = 3.5\, rad\ / s \\ \omega_{2p}^2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}} \Rightarrow \quad \omega_{2p} = 14\, rad\ / s \end{cases}$$

- Les solutions générales :

$$\begin{cases} \theta_1(t) = A_1 \cos(\omega_{1p} t + \varphi) + A_2 \cos(\omega_{2p} t + \varphi) \\ \theta_2(t) = B_1 \cos(\omega_{1p} t + \varphi) + B_2 \cos(\omega_{2p} t + \varphi) \end{cases}$$

❖ En appliquant les conditions initiales, on trouve :

$$\begin{cases} x_1(t) = C \cos \frac{\omega_{1p} + \omega_{2p}}{2} t \cos \frac{\omega_{1p} - \omega_{2p}}{2} t \\ x_2(t) = -C \sin \frac{\omega_{1p} + \omega_{2p}}{2} t \sin \frac{\omega_{1p} - \omega_{2p}}{2} t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = c \cos \Delta\omega t \cos \omega t \\ x_2(t) = c \sin \Delta\omega t \sin \omega t \\ Avec \quad \Delta\omega = \frac{\omega_{2p} - \omega_{1p}}{2} t \quad \Delta\omega = \frac{\omega_{2p} + \omega_{1p}}{2} t \end{cases}$$

- Le phénomène étudié est les battements.

Modes forcés :

- Les nouvelles équations différentielles couplées :

$$\begin{cases} ml\, \ddot{\theta}_1 + (mg + kl)\theta_1 - kl\,\theta_2 = F_0 \cos \omega t \\ ml\, \ddot{\theta}_2 + (mg + kl)\theta_2 - kl\,\theta_1 = 0 \end{cases}$$

- Les relations complexes qui concernent les vitesses linéaires V_1 et V_2 :

❖ Les solutions particulières sont :

$$\begin{cases} \tilde{V}_1(t) = j\omega l \theta_1 \\ \tilde{V}_2(t) = j\omega l \theta_2 \end{cases}$$

❖ En remplaçant les solutions dans le système différentiel, On obtient un

$$\begin{cases} (-\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m})\tilde{V}_1 - \frac{k}{m}\tilde{V}_2 = j\omega \frac{F_0}{m} e^{j\omega t} \\ -\frac{k}{m}\tilde{V}_1 + (-\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m})\tilde{V}_2 = 0 \end{cases}$$

- L'impédance d'entrée complexe :

$$\overline{Z}_e = \frac{F}{\tilde{V}_1} = \frac{j}{\omega} \left[\frac{k^2}{\frac{mg}{l} + k - m\omega^2} - (\frac{mg}{l} + k - m\omega^2) \right]$$

- Ce système mécanique fonctionne comme un filtre de fréquence puisque son impédance varie en fonction de la fréquence.

Problème 10 :

Soit un pendule de masse m et de longueur l pivote autour de M qui glisse sans frottement sur le plan horizontal, comme le montre la figure 4.16, comme suit :

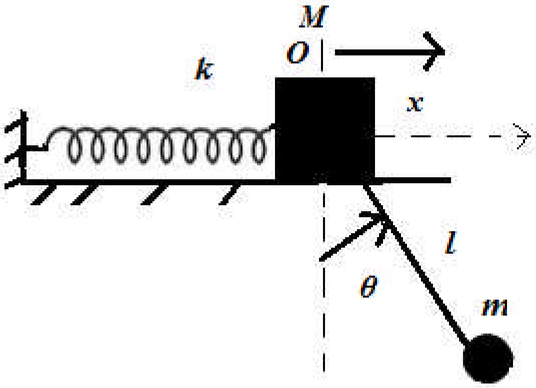


Figure 5.19: Couplage pendule simple-Oscillateur Harmonique

Partie A :

- Déterminer le Lagrangien du système ?
- En déduire les équations différentielles de mouvements.
- Déterminer les pulsations propres du système.
- Trouver le rapport d'amplitude dans les modes normaux.
- Donner les solutions générales lorsque : M tend vers l'infini et l tend vers 0. Discuter.

Partie B :

On impose au point s un mouvement sinusoïdal de type $x_s = a \sin \Omega t$ comme le montre la figure 5.20 :

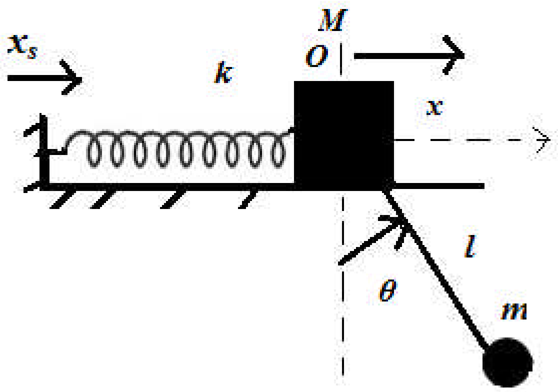


Figure 5.20: Mouvement forcé

- En déduire les nouvelles équations du mouvement.
- Donner le module des amplitudes.
- Quelle est la nature du mouvement.

Solutions

Partie A :

- Le Lagrangien du système :

$$L = \frac{1}{2}MV_M^2 + \frac{1}{2}mV_m^2 - \frac{1}{2}kx^2 + mgl\cos\theta$$

❖ En calculant les vitesses par rapport au repère fixe :

$$\begin{cases} O\vec{m} = \begin{pmatrix} x_m = x + l\sin\theta \\ y_m = l\cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \vec{V}_m = \begin{pmatrix} \dot{x}_m = \dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y}_m = -l\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix} \end{cases} \\ O\vec{M} = \begin{pmatrix} x_M = x \\ y_M = 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \vec{V}_M = \begin{pmatrix} \dot{x}_M = \dot{x} \\ \dot{y}_M = 0 \end{pmatrix} \end{cases} \end{cases}$$

❖ Après le calcul, le Lagrangien sera égale à :

$$L = \frac{1}{2}[(M+m)\dot{x}^2 + m(l\dot{\theta})^2] + m\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta - \frac{1}{2}kx^2 + mgl\cos\theta$$

- Le système différentiel est donné comme suit :

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} + kx = 0 \\ ml^2\ddot{\theta} + mgl\theta + ml\ddot{x} = 0 \end{cases}$$

- Les pulsations propres ω_{1p} et ω_{2p}:

❖ On considère les solutions du système de type sinusoïdal :

$$\begin{cases} \theta(t) = Be^{j(\omega_p t + \varphi)} \\ x(t) = Ae^{j(\omega_p t + \varphi)} \end{cases}$$

- En remplaçant les solutions dans le système différentiel, On obtient un système linéaire symétrique suivant :

$$\begin{cases} [-(M+m)\omega_p^2+k]A-ml\,\omega_p^2 B=0 \\ -\omega_p^2 A+[-\omega_p^2 l+g]B=0 \end{cases}$$

- Le système admet des solutions non nulles si seulement si :

$$det=0 \quad \Rightarrow \quad [-(M+m)\omega_p^2+k][-\omega_p^2 l+g]-ml\,\omega_p^4=0$$

On obtient alors :

$$Ml\omega_p^4-[(M+m)g+kl]\omega_p^2+kg=0 \quad Avec \quad \Delta=[(M+m)g+kl]^2-4kgM\succ 0$$ Il

existe donc deux pulsations propres sont ω_{1p}^2 et ω_{2p}^2 comme suit :

$$\begin{cases} \omega_{1p}^2=\dfrac{1}{2}[(M+m)g+kl+\sqrt{[(M+m)g+kl]^2-4kgM}\;] \\ \omega_{1p}^2=\dfrac{1}{2}[(M+m)g+kl-\sqrt{[(M+m)g+kl]^2-4kgM}\;] \end{cases}$$

- Les rapports d'amplitudes sont :

$$\begin{cases} \left.\dfrac{A}{B}\right|_{\omega_p=\omega_{1p}}=\dfrac{ml\,\omega_{1p}^2}{-(M+m)\omega_{1p}^2+k} \\ \left.\dfrac{A}{B}\right|_{\omega_p=\omega_{2p}}=\dfrac{ml\,\omega_{2p}^2}{-(M+m)\omega_{2p}^2+k} \end{cases}$$

- Les solutions générales :

$$\begin{cases} x(t)=A_1\cos(\omega_{1p}t+\varphi)+A_2\cos(\omega_{2p}t+\varphi) \\ \theta(t)=B_1\cos(\omega_{1p}t+\varphi)+B_2\cos(\omega_{2p}t+\varphi) \end{cases}$$

- Les solutions générales lorsque :
  - *M* tend vers l'infini :

    Le système devient un pendule simple comme suit :

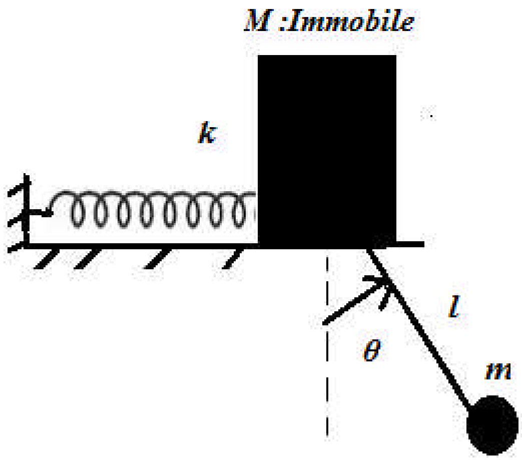


Figure 5.21: Système équivalent à un pendule simple

❖ *l* tend vers *0* :

Le système devient un simple oscillateur harmonique comme suit :

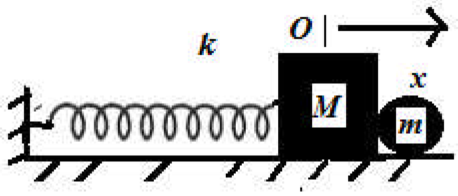


Figure 5.21: Système équivalent à un oscillateur libre

Partie B :

- Les nouvelles équations du mouvement sont :

$$\begin{cases}(M+m)\ddot{x}+ml\ddot{\theta}+kx=kx_s=kae^{i\Omega t}\\ ml^2\ddot{\theta}+mgl\,\theta+ml\ddot{x}=0\end{cases}$$

- Les solutions particulières en régime permanant sont :

$x(t)=A(\omega)e^{i(\Omega t+\varphi)}$ et $\theta(t)=B(\omega)e^{i(\Omega t+\varphi)}$

❖ En remplaçant dans le système différentiel, on obtient alors :

$$\begin{cases}[-(M+m)\Omega^2+k]A-ml\,\Omega^2 B=ka\\ -\Omega^2 A+[-\Omega^2 l+g]B=0\end{cases}$$

❖ Les modules des amplitudes sont :

$$\begin{cases} A = \dfrac{ka(-\Omega^2 + \frac{g}{l})}{(\Omega^2 - \omega_{1p}^2)(\Omega^2 - \omega_{2p}^2)} \\ B = \dfrac{\Omega^2 ka}{(\Omega^2 - \omega_{1p}^2)(\Omega^2 - \omega_{2p}^2)} \end{cases}$$

- Les phénomènes étudiés sont :
    - ❖ la résonance

$$\begin{cases} A \to \infty \\ B \to \infty \end{cases} quand \quad \Omega \to \omega_{1p} \quad \Omega \to \omega_{2p}$$

- ❖ anti résonance.

$$\begin{cases} A \to 0 \\ B \to constante \end{cases} quand \quad \Omega \to \frac{g}{l}$$

- La figure 5.22 représente les phénomènes étudiés.

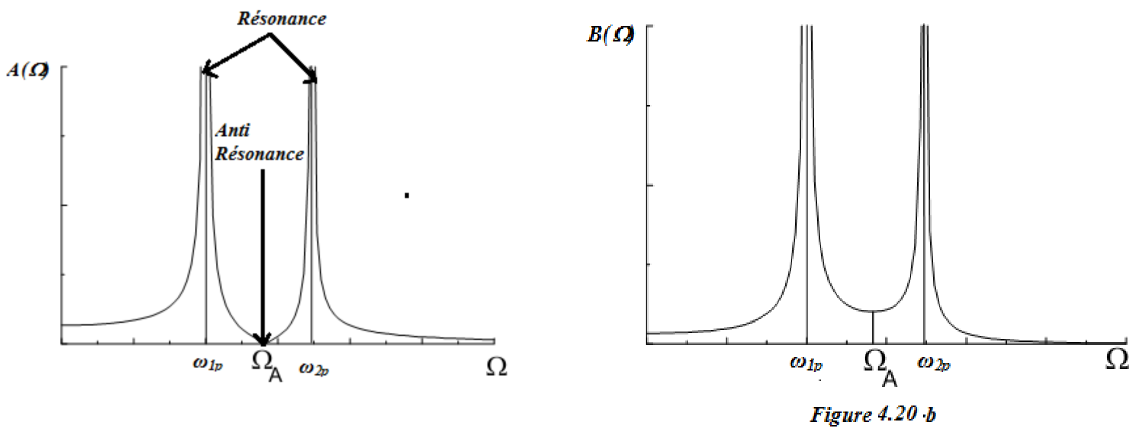


Figure 5.22: Phénomène de résonance à deux degrés de liberté

<u>*Problème 11 :*</u>

<u>*Partie A :*</u>

On considère une barre homogène de masse M, de longueur l, moment d'inertie $J_g = \frac{1}{12} Ml^2$, mobile d'un axe fixe à une de ses extrémités O. A l'autre extrémité A est fixé un ressort de raideur $k_1$comme la montre la figure 5.23:

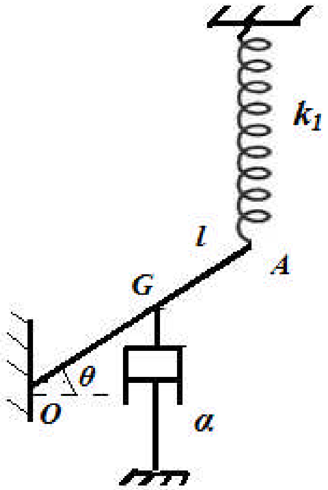


Figure 5.23: Mouvement amorti

De plus le système est amorti par le biais d'un amortisseur au lieu de la barre G dont le coefficient de frottement α. En position d'équilibre la barre est horizontale.

Dans le cas des petites oscillations :

- Donner le Lagrangien du système.
- Etablir l'équation différentielle du mouvement.
- Donner le cas d'un faible amortissement l'expression de la solution générale $\theta(t)$ avec les conditions initiales : $\theta(t=0)=0$ et $\dot{\theta}(t=0)=\dot{\theta}_0$.
- Tracer le graphe de $\theta(t)$

Partie B :

On enlève l'amortisseur du milieu G de la barre, et on place un ressort k_2 et une masse m, représenté dans la figure 5.24:

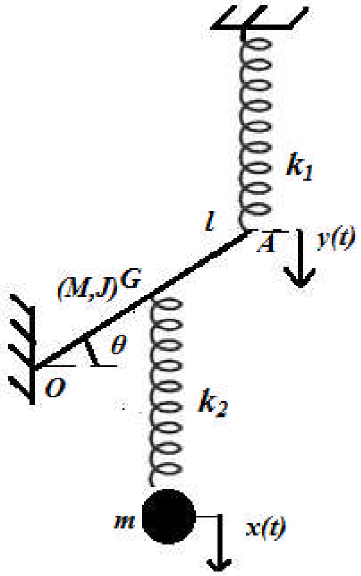


Figure 5.24: Mouvement libre couplé à deux degrés de liberté

- Ecrire le Lagrangien du système.

On pose $k_1=k$, $k_2=4k$ et $M=3m$.

- Etablir les équations différentielles du mouvement.
- Donner les pulsations propres.
- Déterminer les rapports d'amplitudes aux modes propres du système.
- Donner les solutions générales.
- En déduire la matrice de passage.

Solutions :

Partie A :

- Le Lagrangien du système :

$$L = \frac{1}{2} J_{/O}\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k_1(l\theta)^2 \text{ avec } \quad J_{/O} = J_{/G} + M(\frac{l}{2})^2$$

- L'équation différentielle :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\left|\vec{M}_{frot}\right| \text{avec} \quad J_{/O}\ddot{\theta} + k_1 l^2\theta = -\alpha\frac{l^2}{2}\dot{\theta} \Rightarrow \begin{array}{l} \ddot{\theta} + \alpha\dfrac{l^2}{2J_{/O}}\dot{\theta} + \dfrac{k_1 l^2}{J_{/O}}\theta = 0 \\ \text{Alors} \\ \ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \end{array}$$

- La solution générale :
  - ❖ La résolution de cette équation différentielle est de forme :

$$\theta(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \varphi) = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega}e^{-\lambda t}\sin\omega t \qquad \omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2$$

Elle est représentée dans la figure 5.26 comme suit:

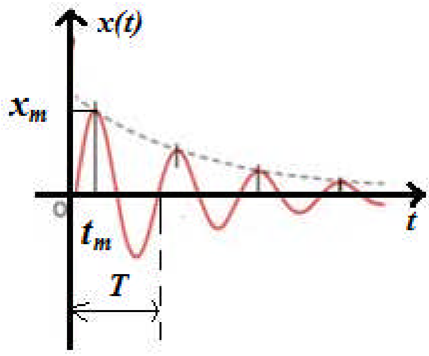


Figure 5.26: Amplitude amortie

Partie B :

- Le Lagrangien du système :

$$L = \frac{1}{2}J_{/O}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k_2(x - \frac{l\theta}{2})^2 - \frac{1}{2}k_1(l\theta)^2 \; avec \qquad J_{/O} = J_{/G} + M(\frac{l}{2})^2$$

- Les nouvelles équations différentielles du mouvement :

$$\begin{cases} m\ddot{x} + 4kx - 2ky = 0 \\ m\ddot{y} + 2ky - 2kx = 0 \end{cases} avec \qquad y = l\theta$$

- Les pulsations propres :
  - ❖ Les solutions sont de formes :

$$x = Ae^{j\omega_p t}, \; y = l\theta = Be^{j\omega_p t}.$$

  - ❖ En remplaçant les solutions dans le système différentiel, On obtient un système linéaire symétrique suivant :

$$\begin{cases} (-m\omega_p^2 + 4k)A - 2kB = 0 \\ (-m\omega_p^2 + 2k)B - 2kA = 0 \end{cases} avec \qquad y = l\theta$$

  - ❖ Le système admet des solutions non nulles si seulement si :

$$det = 0 \quad \Rightarrow \quad (-m\omega_p^2 + 4k)(-m\omega_p^2 + 2k) - (2k)^2 = 0$$

$$D'où \quad m^2\omega_p^4 - 6m\omega^2 + 4k^2 = 0 \; avec \quad \Delta' = 5k^2m^2 \succ 0$$

Donc, il existe deux pulsations propres:

$$\begin{cases} \omega_{1p}^2 = \dfrac{k}{m}(3+\sqrt{5}) \\ \omega_{2p}^2 = \dfrac{k}{m}(3-\sqrt{5}) \end{cases}$$

- Les rapports d'amplitude aux modes propres sont :

$$\begin{cases} \omega_{1p}^2 = \dfrac{k}{m}(3+\sqrt{5}) & \Rightarrow \left.\dfrac{A}{B}\right|_{\omega=\omega_{1p}} = \dfrac{2}{1-\sqrt{5}} \\ \omega_{2p}^2 = \dfrac{k}{m}(3-\sqrt{5}) & \Rightarrow \left.\dfrac{A}{B}\right|_{\omega=\omega_{2p}} = \dfrac{2}{1+\sqrt{5}} \end{cases}$$

- Les solutions sont :

$$\begin{cases} x(t) = A\cos\omega_{1p}t + B\cos\omega_{2p}t \\ x(t) = A\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\cos\omega_{1p}t + B\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\cos\omega_{2p}t \end{cases}$$

- La Matrice de passage est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} & \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

Problème 12 :

Dans le montage représenté dans la figure 5.27, le pendule de longueur $l = OA$ et de masse m est couplé par l'intermédiaire du ressort horizontal, de *raideu*r k_1, au système oscillant constitué d'une masse m et du ressort de raideur k_2 dont l'extrémité O' est fixée. L'extrémité O du pendule est fixée.

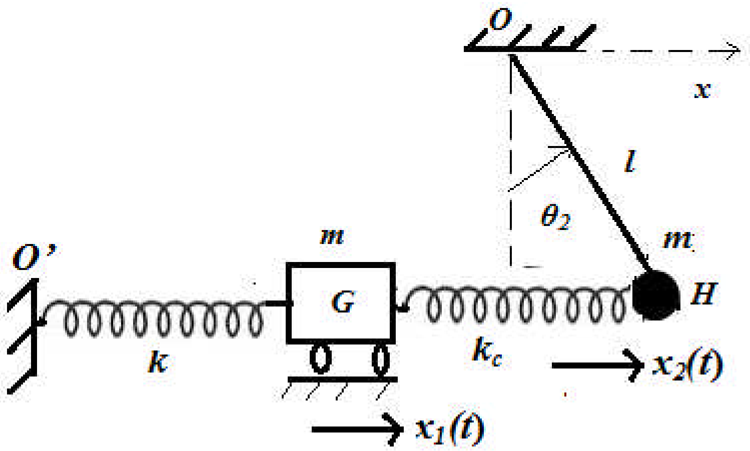


Figure 5.27: Couplage Chariot-Pendule simple

A l'équilibre, le pendule est vertical et deux ressorts ont leurs longueurs naturelles (ressorts non déformés). On posera $\omega_1^2 = \frac{k}{m}$, $\omega_2^2 = \frac{g}{l}$ et $\Omega^2 = \frac{k_c}{m}$.

Les déplacements $x_1(t)$ du centre de masse G du chariot et $x_2(t)$ de l'extrémité H du pendule, à partir de leur position d'équilibre, sont suffisamment petits pour admettre que les deux ressorts demeurent pratiquement horizontaux.

Régime 1 **:**

- Etablir Le Lagrangien du système.
- Ecrire les équations différentielles du mouvement.
- Déterminer les pulsations propres du système ω_{p1} ω_{p2}.
- Calculer en fonction des paramètres Ω, ω_{p1} ω_{p2} **,** ω_1 et ω_2, le rapport $\frac{B}{A}$ des amplitudes des oscillations de la masse H et du centre de masse G du chariot, pour chacun des deux modes propres du système.
- Déterminer la solution générale.
- Quelle est la nature du régime 1 ?

Régime 2 :

- L'extrémité O' du ressort de raideur k maintenant soumise à un excitateur qui lui communique un mouvement sinusoïdal d'amplitude a_0 et de pulsation ω que l'on peut faire varier : $x_{0'}(t) = a_0 \cos \omega t$
- Etablir les nouvelles équations différentielles du mouvement.
- Déterminer les amplitudes en complexes des mouvements de G et H en fonction de la pulsation ω de l'excitation et des paramètres Ω, ω_1, ω_2, a_0.
- On donne $g= 9.8$ *S.I*, $l= 0.66$ *S.I* $m= 0.1$ *S.I* et $k_2= 1$ *S.I.*
  Calculer la période T de l'excitateur pour laquelle le chariot demeurera immobile.
- Quelle est la nature du régime 2 ?

Solutions :

Régime 1 **:**

- Le Lagrangien du système :

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}k_c(x_2 - x_1)^2 + mgl\cos\theta$$

- Les équations différentielles du mouvement :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + (\omega_1^2 + \Omega^2)x_1 = \Omega^2 x_2 \\ \ddot{x}_2 + (\omega_2^2 + \Omega^2)x_2 = \Omega^2 x_1 \end{cases}$$

- Les pulsations propres :
  - ❖ On considère les solutions du système de type sinusoïdal :

$$x_1(t) = Ae^{j(\omega_p t + \varphi)}$$
$$x_2(t) = Be^{j(\omega_p t + \varphi)}$$

  - ❖ En remplaçant les solutions dans le système différentiel, On obtient un système linéaire suivant :

$$\begin{cases} (-\omega_p^2 + \omega_1^2 + \Omega^2)A - \Omega^2 B = 0 \\ -\Omega^2 A + (-\omega_p^2 + \omega_2^2 + \Omega^2)B = 0 \end{cases}$$

  - ❖ Le système admet des solutions non nulles si seulement si :

$$det = 0 \Rightarrow \quad \omega_p^4 - (2\Omega^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2)\omega_p^2 + \Omega^2(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \omega_1^2\omega_2^2 = 0$$

  - ❖ Les pulsations propres sont :

$$\begin{cases} \omega_{1p}^2 = \dfrac{2\Omega^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{(2\Omega^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 4(\Omega^2(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \omega_1^2\omega_2^2)} \\ \omega_{2p}^2 = \dfrac{2\Omega^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{(2\Omega^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 4(\Omega^2(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \omega_1^2\omega_2^2)} \end{cases}$$

- Le rapport $\frac{B}{A}$ des amplitudes des oscillations :

$$\begin{cases} \dfrac{B_1}{A_1} = \dfrac{-\omega_{1p}^2 + \omega_1^2 + \Omega^2}{\Omega^2} \Rightarrow \quad \omega_p = \omega_{1p} \\ \dfrac{B_2}{A_2} = \dfrac{-\omega_{2p}^2 + \omega_2^2 + \Omega^2}{\Omega^2} \Rightarrow \quad \omega_p = \omega_{2p} \end{cases}$$

- La solution générale :

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1\cos(\omega_{1p}t + \varphi) + A_2\cos(\omega_{2p}t + \varphi) \\ x_2(t) = B_1\cos(\omega_{1p}t + \varphi) + B_2\cos(\omega_{2p}t + \varphi) \end{cases}$$

- La nature du mouvement : le système a un mouvement libre couplé à deux degrés de libertés.

***Régime 2* :**

- Les nouvelles équations différentielles du mouvement :
  - ❖ Le Lagrangien du système :

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k(x_1 - x_{o'})^2 - \frac{1}{2}k_c(x_2 - x_1)^2 + mgl\cos\theta$$

❖ Le système différentiel :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + (\omega_1^2 + \Omega^2)x_1 - \Omega^2 x_2 = \omega_1^2 a_0 \cos\omega t \\ \ddot{x}_2 + (\omega_2^2 + \Omega^2)x_2 - \Omega^2 x_1 = 0 \end{cases}$$

- Les amplitudes en complexes des mouvements de *G* et *H :*

❖ Les solutions particulières sont de type :

$$x_1(t) = x_{1p}(t) = Ae^{j(\omega t+\varphi)}$$

$$x_2(t) = x_{2p}(t) = Be^{j(\omega t+\varphi)}$$

❖ En remplaçant les solutions dans le système différentiel, On obtient :

$$\begin{cases} (-\omega^2 + \omega_1^2 + \Omega^2)\tilde{A} - \Omega^2\tilde{B} = a_0\omega_1^2 \\ -\Omega^2\tilde{A} + (-\omega^2 + \omega_2^2 + \Omega^2)\tilde{B} = 0 \end{cases}$$

$$Avec \quad \tilde{A} = Ae^{j\omega t} \quad \tilde{B} = Be^{j\omega t}$$

❖ Alors :

$$\tilde{A} = Ae^{j\varphi_1} = \frac{\omega_1^2(-\omega^2 + \omega_2^2 + \Omega^2)}{(-\omega^2 + \omega_1^2 + \Omega^2)(-\omega^2 + \omega_2^2 + \Omega^2) - \Omega^4}$$

$$\tilde{B} = Be^{j\varphi_2} = \frac{\omega_1^2\Omega^2}{(-\omega^2 + \omega_1^2 + \Omega^2)(-\omega^2 + \omega_2^2 + \Omega^2) - \Omega^4}$$

- La période *T* de l'excitateur pour laquelle le chariot demeurera immobile :

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_2^2 + \Omega^2}} = 1.26\ s$$

<u>Problèmes supplémentaires:</u>

<u>Problème 13</u>:

Nous étudions le cas, important en radioélectricité, de deux circuits $(R - L_{ind} - C_{ap})$ identiques couplés par induction mutuelle comme le montre la figure 5.28 :

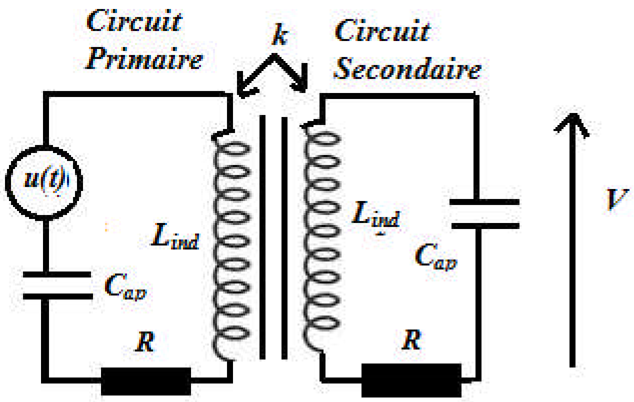


Figure 5.28: Couplage mutuel de deux circuit RLC en régime forcé

Dans l'un primaire, on introduit un générateur de tension sinusoïdale *:*

$$u(t) = u_0 \cos \omega t$$

- Etablir les équations différentielles du mouvement
- En déduire les modules des courants parcourus dans chaque circuit.

Nous voulons examiner les résultats dans un intervalle de pulsation étroit autour de la valeur ω_0 de la pulsation propre aux circuits ; soit $\omega = \omega_0(1 \pm \varepsilon)$.

- En déduire l'impédance Z des circuits dans ce cas.
- Etablir la tension V aux bornes de la capacité du deuxième circuit.

En introduisant le coefficient de couplage $k = \dfrac{M}{L_{ind}}$ et le facteur de qualité $Q = \dfrac{L_{ind}\,\omega_0}{R}$

- Exprimer la fonction de transfert F définit comme suit : $F = \dfrac{V}{u}$ en fonction de k, Q et ε. En déduire son amplitude.
- Etudier les variations de F en fonction de ε. Commenter les résultats.

<u>Problème 14 :</u>

Soit le modèle physique d'un véhicule de longueur l représenté dans la figure 5.29 comme suit :

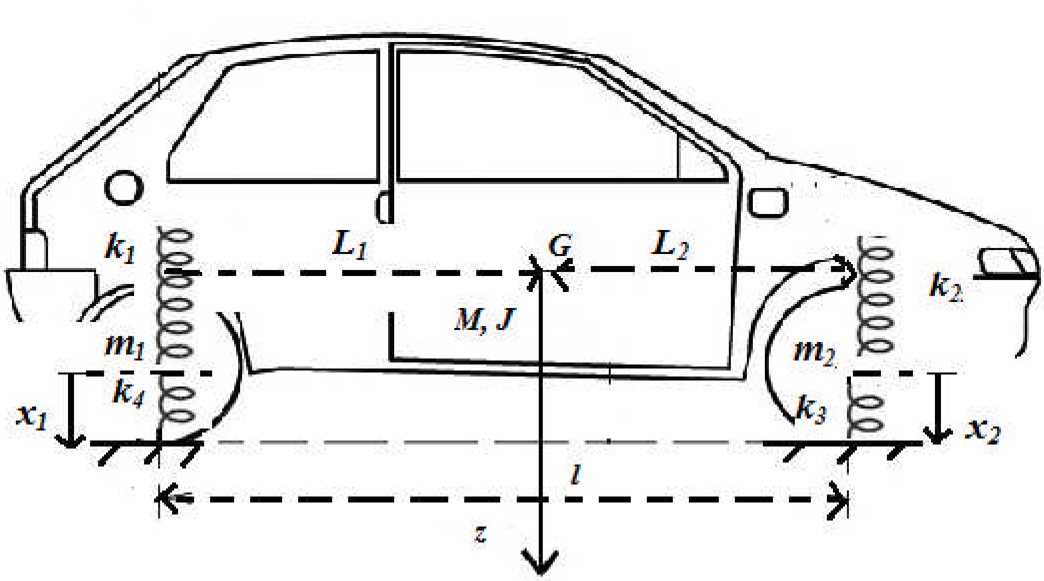


Figure 5.29: Modèlisation physique des oscillations d'un vehicul

Où M représente la masse du véhicule ainsi les passagers.

Les grandeurs (k_1, m_1) et (k_2, m_2**)** représentent successivement la raideur et la masse des roues avant et arrière de véhicule. Les ressorts k_3 et k_4 décrivent un modèle simple à toutes les vibrations extérieures.

On s'intéresse qu'aux vibrations verticales. On considère que les masses m_1 et m_2 sont des points matériels.

- Quel le nombre de degré de liberté ?
- Etablir le Lagrangien du système.
- Déterminer les équations différentielles des mouvements.
- Déterminer les pulsations propres.

Problème 15 :

Deux particules m_1 et m_2 ponctuelles, de masses respectives m_1 *et* m_2, sont reliées par un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0, figure 5.30. Les deux masses, mobiles sans frottement sur une tige horizontale, sont écartées de leur position d'équilibre puis relâchées sans vitesse ; elles sont repérées à chaque instant t par les abscisses $x_1(t)=GM_1$ et $x_2(t)=GM_2$, où G désigne le centre de masse des particules m_1 et m_2.

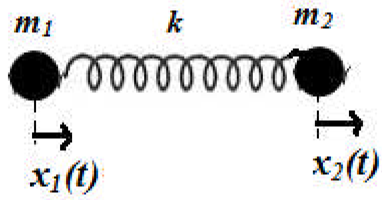


Figure 5.30: Modèlisation physique des oscillations "molecule diatomique"

- On pose $X(t)=x_2(t) - x_1(t)$, *Etablir* le Lagrangien du système.
- Déterminer l'équation différentielle du second ordre dont $X(t)$ est la solution
- Exprimer, en fonction de m_1, m_2 et k, la période T avec laquelle les masses oscillent l'une part rapport à l'autre.
- Deux masses égales $m_1=m_2=m=0.1kg$ couplées oscillent avec une période de $1s$; calculer la raideur k du ressort de couplage.

Le système étudié modélise les vibrations longitudinales d'une molécule diatomique d'oxyde de carbone **CO** dont la fréquence propre f_0 est $f_0 = 6.5\ 10^{13} Hz$.

- Calculer la constante de rappelle k de la liaison carbone – oxygène.
- ***Application numérique*** :

  On donne : C = 12, O = 16 ; Nombre d'Avogadro N=6. 10^{23}.

Problème 16 :

On veut étudier les vibrations longitudinales d'une molécule triatomique linéaire **ABA'** représentée dans la figure 5.31. Les atomes **A, B, A'** ont pour masses respectives m_1, m_2, m_3 ; on désignera x_1, x_2, x_3 les déplacements des atomes **A, B, A'** à partir de leurs position d'équilibre. On suppose que chaque atome est rappelé à sa position d'équilibre par une force proportionnelle à l'écart, la constante de la force de rappelle étant k pour la liaison **A-B** et k' pour la liaison **B-A'**.

On admettra que la molécule, dans son ensemble n'est pas animée par un mouvement de translation.

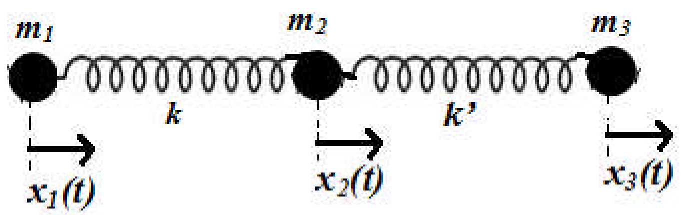


Figure 5.31: Modèlisation physique des oscillations molécule triatomique

***Partie A* :**

- Etablir le Lagrangien du système.
- Ecrire les équations différentielles du mouvement en $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_3(t)$.
- Ecrire les équations différentielles du mouvement en $X(t)$ et $X'(t)$, en effectuant le changement de variable $X(t)=x_2(t)–x_1(t)$ et $X'(t)= x_2(t)–x_3(t)$.
- Montrer que $X(t)$et $X'(t)$ peuvent varier sinusoïdalement avec le temps pour deux valeurs ω_{01} et ω_{02} de la pulsation propre qu'on déterminera en fonction de k, k', m_2 et des pulsations fondamentales ω_0 *et* ω_0' de chacune des vibrations de valence des liaisons **A–B** et **B–A'** si elle était seule (en absence de l'interaction de couplage).
- ***Applications numériques*** *: Expérimentalement* on détermine les fréquences propres de la molécule linéaire d'acide cyanhydrique**,** soient $\omega_{01} = 6{,}25.10^{14}$ *rd/s* et $\omega_{02}=3{,}9510^{14} rd/s$. Calculer les fréquences fondamentales des liaisons **H–C** et **C≡N** sachant que ($\omega_{C\text{-}H} > \omega_{C\equiv N}$).
- En déduire la constante la force de rappelle de la liaison **C–H** de la molécule étudiée et la comparer à celle de la liaison **C–H** des alcanes ($k = 500\ SI$).

Partie B :

On considère maintenant que la molécule triatomique est symétrique, **A-B-A**, c'est-à-dire, $k=k'$ *et* $m_1=m_3$.

- Quelles sont les expressions des pulsations propres en fonction de k, m_1 et m_2. ?
- Donner un exemple concret qui vérifie ce modèle.

<u>Problème 17 :</u>

On définit un étouffeur dynamique représente dans la figure 5.32, comme un système physique qui comprend deux masses couplées *m* et *m* oscillent a la verticale, deux ressorts *k*, *k* et un amortisseur α. On impose une force extérieure sinusoïdale de type :

$$F(t) = F_0 \cos \Omega t$$

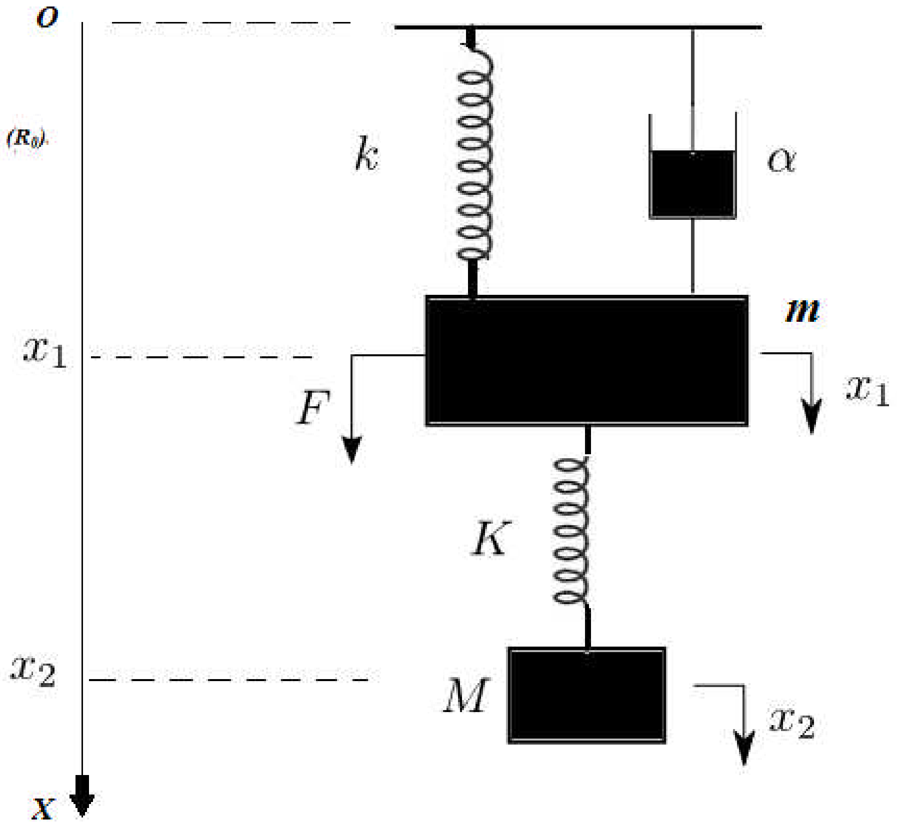


Figure 5.32: Modèlisation physique "Etoufeur dynamique des vibrations"

- Etablir le Lagrangien du système.
- Déterminer les équations différentielles du mouvement.
- Déterminer les solutions $x_1(t), x_2(t)$ en régime permanent.
- Quelle est la condition pour avoir l'annulation du mouvement de *m*. commenter.

PARTIE II

ONDES MECANIQUES

Chapitre 6

Généralités sur le phénomène de propagation

Rappel théorique

- L'onde mécanique est une perturbation locale temporaire qui se déplace dans un milieu matériel élastique, homogène et isotrope sans transport de matière, comme le montre la figure 5.1.

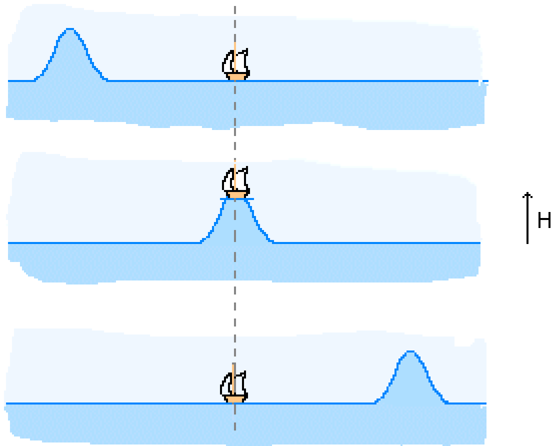


Figure 5.1

- L'onde mécanique se propage avec transport d'énergie.
- Il existe deux types de milieux :
  - ❖ Milieu dispersif : La célérité de l'onde dépend des caractéristiques du milieu et de la longueur d'onde.

    Exemple : ce phénomène se perçoit par exemple dans l'air lorsque l'amplitude est importante (dans le cas du tonnerre, les ondes de haute fréquence se propagent plus rapidement que les ondes de basse fréquence, l'air est dispersif)
  - ❖ Milieu non dispersif : La célérité dépend uniquement des propriétés du milieu de propagation.
- Il existe deux types d'onde :
  - ❖ Onde longitudinale : L'ébranlement est parallèle à la direction de propagation, comme le montre la figure 5.2.

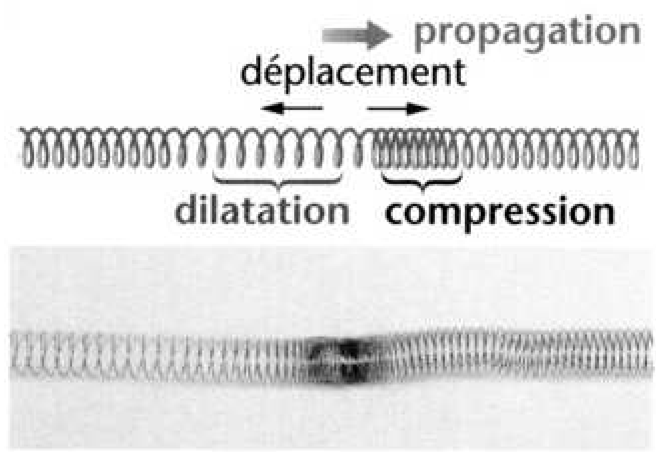


Figure 5.2

- ❖ Onde transversale : L'ébranlement est perpendiculaire à la direction de propagation comme le montre la figure 5.3.

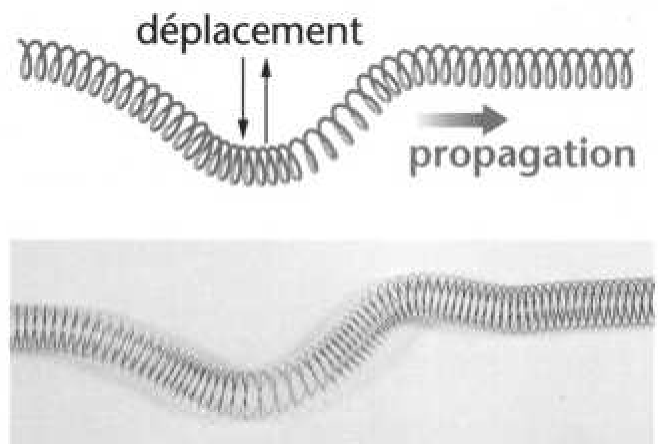


Figure 5.3

- La célérité de l'onde est constante dans un milieu linéaire, homogène, isotrope et non dispersif. Elle dépend de l'inertie, de la rigidité et de la température du milieu.
- L'onde mécanique se propage à partir d'une source sous différentes formes :
  - ❖ A une dimension : Mouvement le long d'une corde, d'un ressort.
  - ❖ A deux dimensions : Mouvement circulaire à la surface d'eau.

Exemple *:* Lorsqu'on jette une pierre sur une surface d'eau, comme la montre la figure 5.4 ci-dessous :

Figure 5.4

Le phénomène apparent dans l'image est une onde circulaire se propageant dans un plan

- ❖ A trois dimension : Ondes sonores.

- Les ondes mécaniques présentent une double périodicité :
  - ❖ Périodicité temporelle : Caractérisée par la période *T (s).*
  - ❖ Périodicité spatiale : Caractérisée par la longueur d'onde λ_w *(m).*
- le phénomène de diffraction est caractéristique des ondes. il se manifeste lorsqu'une onde rencontre un obstacle ou une ouverture dont les dimensions sont du même ordre de grandeur que la longueur d'onde, voire la figure 5.5 :

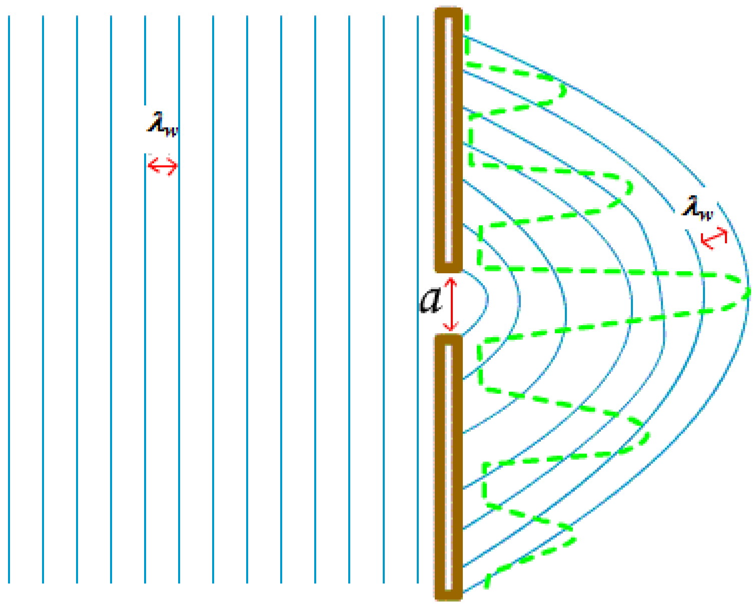


Figure 5.5

- Si deux ondes identiques se rencontrent, on va voir qu'elles ne se renforcent pas forcement, au contraire ! elles peuvent s'annuler : c'est le phénomène d'interférence, voire la figure 5.6 :

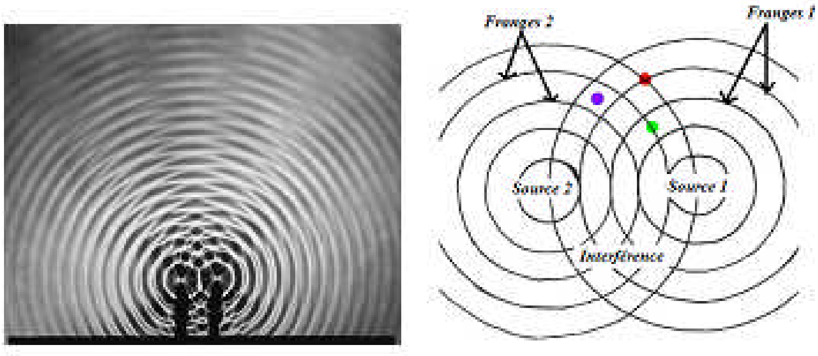


Figure 5.6

- D'autres exemples pour le phénomène d'interférence sont :
  - ❖ L'expérience de Young : la lumière passe à travers deux trous séparés par une distance *d*. Il apparait sur l'écran alors des interférences circulaires comme le montre la figure 5.7 ci-dessus :

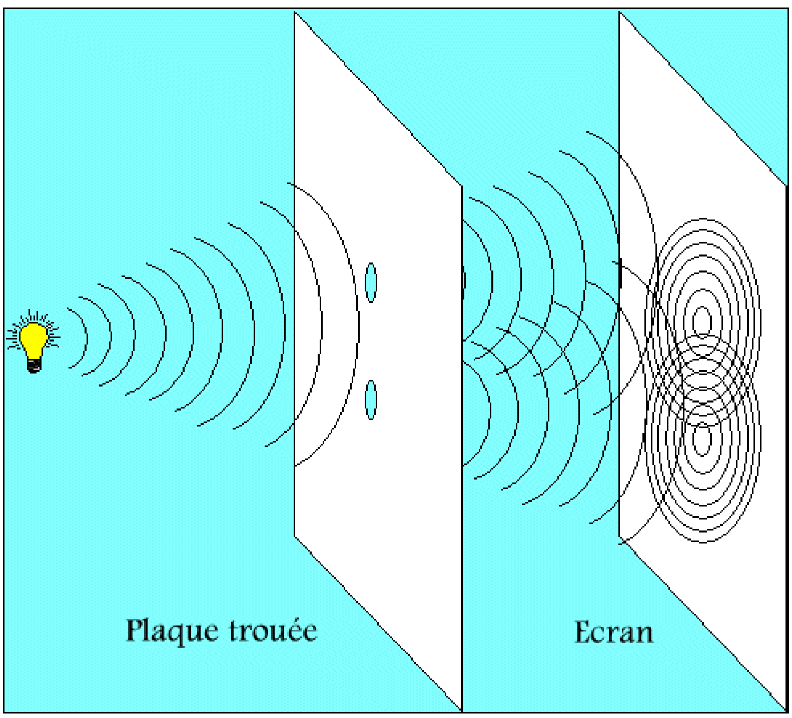


Figure 5.7

- Les ondes émises par deux hauts parleurs comme le montre la figure 5.8 :

Figure 5.8

Applications :

Problème 1 :

Une source émet une onde mécanique ψ de fréquence ν se propageant dans la direction $0x$ avec une vitesse V constante.

- Ecrire l'équation de propagation

Posant les variables suivantes : $p = t + \frac{x}{V}$ et $q = t - \frac{x}{V}$.

- Montrer que la solution de l'équation est la somme de types de signaux.
- En déduire la forme de la solution dans le cas d'un milieu homogène linéaire et infini en régime sinusoïdal

Solutions :

- L'équation de propagation :

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

C'est une équation aux dérivées partielles unidimensionnelles.

- Les solutions générales en utilisant la méthode du changement des variables sont:

$$\left\langle \begin{array}{l} p = t + \frac{x}{V} \\ q = t - \frac{x}{V} \end{array} \right\rangle \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{\partial^2\psi}{\partial p \partial q} = 0 \Rightarrow \quad \psi_1(q) \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial q \partial p} = 0 \Rightarrow \quad \psi_2(p) \end{array} \Rightarrow \quad \psi_T = \psi_1(q) + \psi_2(p)$$

- En régime sinusoïdal, la solution est de forme :

$$\psi(t,x) = A \cos \omega(t - \frac{\omega}{V} x)$$

Problème2 :

Une onde mécanique S de fréquence ν se propageant dans un espace cartésien $Oxyz$ avec une vitesse V constante.

- Ecrire l'équation de propagation de S

- Déterminer les solutions de l'équation différentielle par la méthode de séparation des variables.

On définit le vecteur d'onde k_o et la pulsation ω.

- En déduire la forme de la solution générale.
- Donner une relation entre k_o et ω

L'espace de propagation est une cavité parallépépidique de dimension (a, b, c). On considère qu'à l'instant initial $\dot{S}(t=0)=0$.

- Déterminer les solutions finales.

Solutions :

- L'équation de propagation à trois dimensions:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = V^2 \Delta S$$

- Les solutions de l'équation différentielle par la méthode de séparation des variables :

$$S(t,x) = A(x)B(y)T(t) \Rightarrow \frac{\ddot{A}(x)}{A(x)} + \frac{\ddot{B}(x)}{B(x)} + \frac{\ddot{C}(x)}{C(x)} = \frac{1}{V^2}\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = Cste$$

❖ Après le calcul on obtient alors :

$$\begin{aligned} &\ddot{A}(x) + k_x^2 A(x) = O \\ &\ddot{B}(y) + k_y^2 B(y) = 0 \\ &\ddot{C}(z) + k_z^2 C(z) = 0 \\ &\ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0 \end{aligned} \quad avec \quad \begin{aligned} &k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \\ &k_o = \frac{\omega}{V} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &A(x) = A_1 \cos k_x x + A_2 \sin k_x x \\ &B(y) = B_1 \cos k_y y + B_2 \sin k_y y \\ &C(z) = C_1 \cos k_z z + C_2 \sin k_z z \\ &T(t) = T_1 \cos \omega t + T_2 \sin \omega t \end{aligned}$$

- L'espace de propagation est limité (fini), on obtient des ondes stationnaires dans les trois directions.

❖ En appliquant les conditions aux limites On obtient :

$$\begin{aligned} &A(x=0) = A(x=a) = 0 \\ &B(y=0) = B(y=b) = 0 \\ &C(x=0) = C(x=c) = 0 \\ &\dot{S}(t=0) = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} &A_1 = 0 \text{ et } \quad k_x^{(n)} = \frac{n\pi}{a} \\ &B_1 = 0 \text{ et } \quad k_y^{(m)} = \frac{m\pi}{b} \\ &C_1 = 0 \text{ et } \quad k_z^{(m)} = \frac{p\pi}{c} \\ &T_2 = 0 \end{aligned}$$

- Les solutions alors sont de formes :

$$\begin{aligned} A(x) &= A_2 \sin k_x x \\ B(y) &= B_2 \sin k_y y \\ C(z) &= C_2 \sin k_z z \\ T(t) &= T_1 \cos \omega t \end{aligned} \Rightarrow \quad S_{n,m,p}(x,y,z,t) = A_2 B_2 C_2 T_1 \sin k_x^{(n)} x \sin k_y^{(m)} y \sin k_z^{(p)} z \cos \omega_{n,m,p} t$$

- Ainsi la solution finale pour tous les modes propres est :

$$S_T(x,y,z,t) = \sum_n \sum_m \sum_p \Lambda \sin k_x^{(n)} x \sin k_y^{(m)} y \sin k_z^{(p)} z \cos \omega_{n,m,p} t \; avec \quad \Lambda = A_2 B_2 C_2 T_1$$

<u>Problème 3 :</u>

Une onde mécanique S de fréquence ν se propageant dans un milieu a symétrie radiale avec une vitesse V constante.

- Ecrire l'équation de propagation de S.
- Résoudre l'équation aux dérivées partielles.
- Exprimer la solution générale dans le cas d'un milieu infini en régime sinusoïdal. Interpréter les résultats.

<u>Solutions :</u>

- L'équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = V^2 \Delta S$$

- La solution générale dans le cas d'un régime sinusoïdal :

$$S(r,t) = \frac{1}{r}\left[f(t - \frac{r}{V}) + g(t + \frac{r}{V}) \right] avec \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

- La solution générale dans le cas d'un régime sinusoïdal :

$$S(r,t) = \frac{1}{r} \cos \omega (t - \frac{r}{V}) \, avec \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

On obtient une onde sphérique incidente sinusoïdale comme le montre la figure

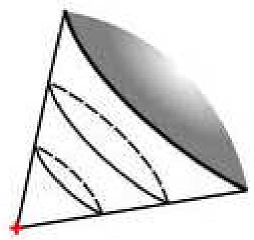


Figure 5.9

Le facteur $\frac{1}{r}$ représente l'amortissement de l'amplitude de l'onde sphérique qui est due à la répartition énergétique de l'onde dans toutes les directions de la même manière.

Problème 4 :

Soit une onde mécanique ψ de fréquence ν se propageant dans le plan ($0xy$) avec une vitesse V constante.

- Ecrire l'équation de propagation.
- Déterminer les solutions en utilisant la méthode de séparation des variables.

On pose les conditions suivantes :

$$\psi(x=0)=0, \frac{\partial \psi}{\partial y}(y=0)=0$$

- Déterminer les solutions générales.

Solutions :

- L'équation de propagation à deux dimensions:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=V^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)$$

- Les solutions de l'équation différentielle par la méthode de séparation des variables :

$$S(t,x,y)=A(x)B(y)T(t) \Rightarrow \quad \frac{\ddot{A}(x)}{A(x)}+\frac{\ddot{B}(y)}{B(y)}=\frac{1}{V^2}\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)}=Cste$$

❖ Après le calcul on obtient alors :

$$\begin{aligned}&\ddot{A}(x)+k_x^2A(x)=O\\&\ddot{B}(y)+k_y^2B(y)=0 \ avec\\&\ddot{T}(t)+\omega^2T(t)=0\end{aligned} \qquad \begin{aligned}k_O^2&=k_x^2+k_y^2\\k_o&=\frac{\omega}{V}\end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned}A(x)&=A_1\cos k_xx+A_2\sin k_xx\\B(y)&=B_1\cos k_yy+B_2\sin k_yy\\T(t)&=T_1\cos\omega t+T_2\sin\omega t\end{aligned}$$

- L'espace de propagation est limité (fini), on obtient des ondes stationnaires dans les trois directions.

❖ En appliquant les conditions aux limites On obtient :

$$\begin{aligned}&\psi(x=0)=0\\&\frac{\partial\psi}{\partial y}(y=0)=0\end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned}A_1&=0\\B_2&=0\end{aligned} \ et \quad k_x^{(n)}=\frac{n\pi}{a} \Rightarrow \begin{aligned}A(x)&=A_2\sin k_x^{(n)}x\\B(y)&=B_1\cos k_yy\end{aligned}$$

❖ Les solutions générales sont :

$$S_T(x,y,t)=\sum_n \Lambda\sin k_x^{(n)}x\cos k_y^{(m)}yT(t)avec \quad \Lambda=A_2B_2$$

Chapitre 7

Application : l’équation de propagation mécanique dans différents milieux

Chapitre 7: Propagation d'ondes mécaniques dans différents milieux

Rappel théorique :

Nous allons voir comment une onde peut progresser dans une corde.

Soit un fil de longueur *l* et de masse *m*, la masse linéique du fil (supposée constante le long de celui-ci) est alors :

$$\mu = \frac{m}{l} = \frac{dm}{dx}$$

Par un léger choc, créons une petite perturbation transversale (afin de ne pas déformer le câble et maintenir constant sa masse linéique). Isolons, dans la zone perturbée, un élément de fil, de longueur dl :

Approximations :

- Chaque élément de la corde peut être découpé de façon infinitésimale de façon à être presque parallèle à l'axe *x*. Les angles $\theta(x,t), \theta(x+dx,t)$ sont donc considérés comme petits
- La corde est considérée comme déformable mais non allongeable donc la norme des forces dans la corde est constante en tout point quelque soit la déformation.

Pour la suite du raisonnement, nous nous servons de la figure 6.1 ci-dessous :

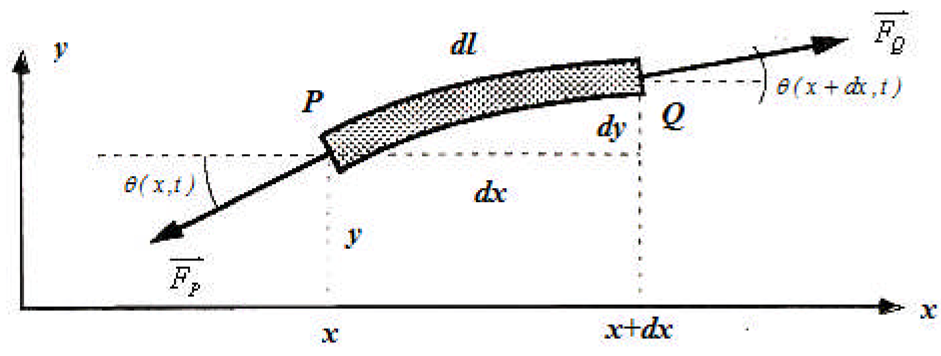


Figure 6.1

Le bilan des forces donne :

$$\sum \vec{F} = dm\vec{a} \quad \Rightarrow \begin{matrix} F\,[\cos\theta_{x+dx} - \cos\theta_x\,] \cong 0 \\ F\,[\sin\theta_{x+dx} - \sin\theta_x\,] \cong dm\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} \text{ avec } \quad dm = \mu dl \end{matrix}$$

Ce qui signifie qu'il n'y pas de déplacements selon *x*, *et* $\vec{a}$ représente l'accélération selon *y*. Si les angles sont vraiment petits, nous avons le premier terme du développement qui donne :

$$\sin x \cong \tan x \cong \frac{\partial y}{\partial x}$$
$$dl \cong dx$$

La loi de Newton appliquée à la masse $dm = \mu dx$ donne (nous considérons que chaque point de masse se déplace seulement selon *y* car il n'y a pas allongement) :
Les tangentes sont données par les dérivées partielles de la fonction *y*(*x*) :

$$F\left[\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+dx} - \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x}\right] \cong \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Il en résulte l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{F}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Rightarrow \quad V = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Elle se nomme "l'équation des cordes vibrantes".

Nous vérifions les unités de $\frac{F}{\mu}$ sont celles du carré d'une vitesse $(m/s)^2$, comme l'exige l'analyse dimensionnelle. Pour simplifier l'écriture, nous posons :

$$V = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Applications :

Problème 1 :

Soit une corde vibrant transversalement dans le plan Oxy . L'équation de mouvement est de forme $y = f(x,t)$. Soient T et μ la tension et la masse linéique de la corde à l'équilibre**.**

- Ecrire l'équation de propagation de l'onde.
- En déduire la célérité V des oscillations.

On considère que l'ébranlement original est sinusoïdal.

- Déterminer les solutions de l'équation de propagation en utilisant la méthode des séparations des variables.

Maintenant la corde est fixée par les deux extrémités de distance *a*, lâchée sans vitesse initiale.

- Déterminer la forme de la solution générale.
- Montrer que les fréquences de vibration de la corde sont multiples entier d'une fréquence fondamentale f_1.

Application numérique : Pour la troisième corde de la guitare de longueur $a=63cm$ en nylon, de masse volumique $\rho=1200kg/m^3$ et de section $S=0.42mm^2$.

- Calculer la tension de cette corde pour qu'elle puisse émettre le son fondamental $f_1=147Hz$ *(note ré).*

Solutions :

- L'équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Rightarrow \quad V = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

- Les solutions de l'équation de propagation de l'onde libre :

$$y = A(x)T(t) \Rightarrow \quad \frac{\ddot{A}(x)}{A(x)} = V^2\frac{\ddot{B}(t)}{B(t)} \Rightarrow \quad \begin{array}{c} A(x) = A_1 \cos\frac{\omega}{V}x + A_2 \sin\frac{\omega}{V}x \\ B(t) = B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t \end{array}$$

- La corde est maintenant fixée, les conditions aux limites nous donnent :

$$\begin{matrix} y(x=0)=y(x=a)=0 \\ \dot{y}(t=0)=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} A_1=0 \\ B_2=0 \end{matrix} \; et \quad k_x^{(n)}=\left(\frac{\omega}{V}\right)_x \frac{n\pi}{a} \Rightarrow \begin{matrix} A(x)=A_2 \sin k_x^{(n)}x \\ B(t)=B_1 \cos \omega_n t \end{matrix}$$

Ainsi la solution finale :

$$y_T(x,t)=\sum_n \Lambda \sin k_x^{(n)} x \cos \omega_n t \; avec \quad \Lambda = A_2 B_1$$

- Les fréquences de vibration de la corde :

$$k_x^{(n)}=\frac{\omega_n}{V}=\frac{2\pi f_n}{V}=\frac{n\pi}{a} \Rightarrow \quad f_n = nf_1 \; avec \quad f_1=\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

- ***Application numérique :***

$$f_1=\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow \quad T = 4a^2\rho S f_1^2 \quad \Rightarrow \quad T=17.3N$$

<u>Problème 2:</u>

Une corde vibrante homogène et sans raideur, de masse linéique μ, tendue par une force de tension d'intensité F constante. La corde au repos est horizontale et matérialisée par l'axe Ox .

Au cours de la propagation d'une onde, le point M de la corde, d'abscisse x au repos subit le déplacement transversal $y(x, t)$ à l'instant t. On néglige l'influence de la pesanteur sur la corde, mais on tient compte de la force d'amortissement dirigée suivant l'axe Ox , $Ox \perp Oy$ et de valeur algébrique **:** $-bV(x,t)$ par unité de longueur (avec b>0), où $V(x,t)=\frac{\partial y}{\partial t}$ est la vitesse transversale de l'élément de la corde d'abscisse x à l'instant t.

- Etablir l'équation aux dérivées partielles du déplacement $y(x, t)$.

On définit k le vecteur d'onde de cette onde. On supposera l'amortissement faible **(**$b \ll \mu\omega$).

- Etablir la relation de dispersion sous la forme : $k(\omega)=\omega\frac{[1-jg(\omega)]}{c}$
- Exprimer les coefficients g et c en fonction des données F, μ *et* b.
- En déduire l'équation de l'onde $y(x, t)$. Que peut on dire sur $y(x, t)$?

On définit l’impédance mécanique complexe

$$\tilde{Z} = \frac{T_y}{V(x,t)}$$

Où T_y désigne la projection sur Oy de la tension de la corde en $M(x)$.

- Exprimer l’impédance mécanique complexe $\tilde{Z}$ de la corde en fonction de F, μ, b. et ω.

Solutions :

- L’équation aux dérivées partielles du déplacement $y(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{b}{F}\frac{\partial y}{\partial t} \quad avec \quad V = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

- La relation de dispersion :

$$y(t,x) = Ae^{j(\omega t - kx)} \Rightarrow \quad k(\omega) \cong \frac{\omega}{c}\left(1 - j\frac{b}{2\mu\omega}\right) avec \quad c = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad g(\omega) = \frac{b}{2\mu\omega}$$

- l’équation de l’onde $y(x, t)$:

$$y(t,x) = Ae^{-\frac{bx}{2\mu c}} e^{j(\omega t - \frac{x}{c})}$$

C’est une onde progressive amortie.

- L’impédance mécanique complexe :

$$\tilde{Z} = \frac{T_y}{V(x,t)} = F\frac{\frac{\partial y}{\partial x}}{\frac{\partial y}{\partial t}} \Rightarrow \quad \tilde{Z} = -\sqrt{\mu F}\left(1 - j\frac{b}{2\mu\omega}\right)$$

Problème 3 :

Partie A : Equation de la corde vibrante :

Une corde Homogène et inextensible, de masse linéique μ, est tendue horizontalement suivant l’axe Ox avec une tension F constante, voire la figure 6.2.

La corde, déplacée de sa position d'équilibre, acquiert un mouvement décrit à l'instant *t* par le déplacement quasi vertical $y(x, t)$, compté à partir de sa position d'équilibre, d'un point *M* d'abscisse x au repos.

A l'instant *t*, la tension $T(x,t)$ exercée par la partie de la corde à droite de *M* sur la partie de la corde à gauche de *M*, fait un petit angle $\theta(x,t)$ avec l'horizontale.

On admettra θ petit, faible courbure de la corde, et on négligera les forces de pesanteur.

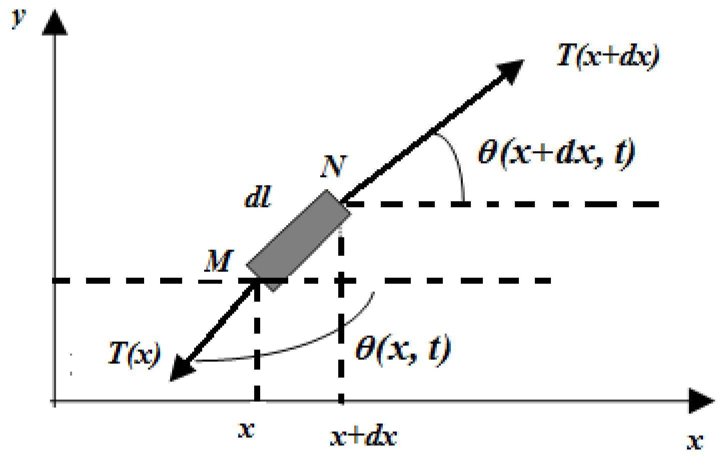


Figure 6.2

Equation des cordes vibrantes : On considère le tronçon de la corde compris entre les abscisses $x, x+dx$.

- Etablir l'équation de propagation de l'onde de la corde vibrante.
- En déduire la célérité *V* de l'onde en fonction de μ *et F*.

<u>Partie B : Analogie électrique :</u>

Soit une tranche d'une cellule électrique sans perte représentée dans la figure 6.3 comme suit :

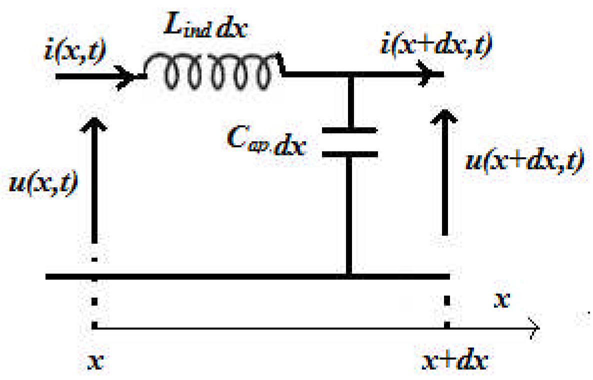


Figure 6.3

- Montrer que la cellule électrique représentée ci dessus constitue un circuit analogique d'un élément de corde vibrante de longueur dx
- Exprimer les correspondants mécaniques de l'inductance linéique L_{ind}, de la capacité linéique C_{ap}, de l'intensité du courant $i(x, t)$ et de la tension électrique $u(x, t)$.

Solutions :

Partie A :

- L'équation de propagation de l'onde de la corde vibrante :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad T(x,t) = T(x+dx) = F \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{F}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \text{avec} \quad V = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Partie B :

- L'équation de propagation de l'onde dans la cellule électrique :

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial i}{\partial x} = -C^*_{ap}\dfrac{\partial u}{\partial t} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = -L^*_{ind}\dfrac{\partial i}{\partial t} \end{matrix} \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = L^*_{ind}C^*_{ap}\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

- L'équivalence mécanique-électricité :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = L^*_{ind} C^*_{ap} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Avec

$$L^*_{ind} \quad \Leftrightarrow \quad \mu$$

$$C^*_{ap} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{F}$$

$$i((x,t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial y}{\partial t}$$

Problème 4 :

Deux cordes, de masses linéiques μ_1 et μ_2, sont attachées à la jonction O pour former une longue corde tendue horizontalement suivant l'axe Ox avec une force de tension d'intensité F. On choisit l'abscisse $x=0$ à la jonction O des deux cordes.

Une onde incidente sinusoïdale transversale de faible amplitude a_i et venant de la gauche (région $x<0$) de la forme :

$$y_i(x,t) = a_i \cos(\omega t - k_1 x)$$

A la jonction O il y a une onde réfléchie dans la région $x<0$ et une onde transmise vers la région $x>0$. On définit k_1 et k_2 respectivement comme étant les vecteurs d'ondes dans les régions $x<0$ et $x>0$:

- Exprimer les deux équations de continuité au niveau de la jonction O deux relations qui lient les amplitudes a_i, a_t, a_r et le rapport $\frac{k_1}{k_2}$.
- En déduire les coefficients de réflexion $R = \frac{a_r}{a_i}$ et de transmission $T = \frac{a_t}{a_i}$ pour l'amplitude en fonction de k_1 et k_2, puis en fonction de μ_1 et μ_2. Commenter.

<u>Application numérique :</u> On attache en O un fil d'acier(1) de diamètre $d_1=2\ mm$ et un fil d'acier *(2)* de diamètre $d_2=1.2mm$.

- Calculer, pour l'onde qui se propage du fil (1) vers le fil (2), les coefficients R et T.

Solutions :

- Les deux équations de continuité :

$$y_i(0,t)+y_r(0,t)=y_t(0,t) \quad \Rightarrow \quad a_i+a_r=a_t$$
$$\left[\frac{\partial[y_i(x,t)+y_r(x,t)=y_t(x,t)]}{\partial x}\right]_{x=0}=\left[\frac{\partial y_t(x,t)}{\partial x}\right]_{x=0} \quad \Rightarrow \quad a_i-a_r=\frac{k_2}{k_1}a_t$$

- Les coefficients de réflexion et de transmission :

$$R=\frac{a_r}{a_i} \Rightarrow R=\frac{k_{01}-k_{02}}{k_{01}+k_{02}} \Rightarrow R=\frac{\sqrt{\mu_1}-\sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1}+\sqrt{\mu_2}}$$
$$T=\frac{a_t}{a_i} \Rightarrow T=\frac{2k_{01}}{k_{01}+k_{02}} \Rightarrow T=\frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1}+\sqrt{\mu_2}}$$

❖ Commentaire :

$$\begin{matrix}\mu_1 \succ \mu_2 \Rightarrow R \succ 0 \\ \mu_1 \prec \mu_2 \Rightarrow R \prec 0\end{matrix} \quad et \quad \begin{matrix}\mu_1 \succ \mu_2 \\ \mu_1 \prec \mu_2\end{matrix} \Rightarrow T \succ 0$$

- ***Application numérique*** **:**

$$R=\frac{a_r}{a_i} \Rightarrow R=\frac{k_{01}-k_{02}}{k_{01}+k_{02}} \Rightarrow R=\frac{d_1-d_2}{d_1+d_2} \Rightarrow R=25\,\%$$
$$T=\frac{a_t}{a_i} \Rightarrow T=\frac{2k_{01}}{k_{01}+k_{02}} \Rightarrow T=\frac{2d_1}{d_1+d_2} \Rightarrow T=75\,\%$$

Problème 5:

Un barreau cylindrique d'aluminium, de masse volumique ρ de longueur l et de section droite Σ, subit un allongement relatif :

$$\frac{\Delta l}{l}=\frac{F}{E\Sigma}$$

Sous l'effet d'une force F d'étirement dans le sens de l'axe $0x$ du barreau ; la constante E est le module d'Young du métal. On négligera les variations de la section du barreau. Lors du passage d'une onde acoustique, l'élément de barreau compris entre les plans de section voisins d'abscisses $x, x+dx$ se déplacent respectivement de $s(x,t)$ et $s(x+dx,t)$ à l'instant t par rapport à leur position d'équilibre ;

- Montrer que l'élongation $s(x,t)$ obéit à une équation de propagation d'ondes.
- Calculer la célérité V de ces ondes dans le barreau d'aluminium pour lequel :

$$\rho = 2700 kg/m^3 \text{ et } E = 7 10^{10} Pa$$

Soit une onde plane progressive acoustique d'amplitude a_0 :

$$s(x,t) = a_0 co\omega(t - \frac{x}{V})$$

- Calculer dans ce cas la variation relative maximale δ_{max} de volume de l'élément de barreau $(x, x+dx)$ entre les instants 0 et t ;
- La tension $T(x, t)$ du barreau au niveau de sa section droite d'abscisse x, à l'instant t.

Le barreau de longueur l, fixé à une de ses extrémités O, est libre à l'autre extrémité A. On cherche la solution de l'équation de propagation de l'onde sous la forme

$$s(x,t) = g(x) \sin \omega t$$

- Déterminer la fonction $g(x)$, on notera a l'amplitude de cette fonction spatiale. On prend comme conditions aux limites :

$$s(x=0,t) = 0 \; et \quad \frac{\partial s}{\partial x}(x=l,t) = 0$$

- Déterminer les fréquences propres du barreau en fonction de E, l, ρ et d'un entier N.

Dans les conditions où le son le plus grave a une fréquence $f_0 = 2KHz$,
Déterminer :

- La longueur $l = OA$ du barreau cylindrique.
- L'énergie cinétique moyenne $\overline{E}_c(t)$ de ce barreau en fonction de sa masse M et de la vitesse maximale V_{max} d'un élément du barreau.

Solution :

- L'équation de propagation d'ondes :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad T(x+dx) - T(x,t) = \rho S dx \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} avec \quad V = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

- Application numérique :

$$V = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 1610 m/s$$

- La variation relative δ_{max} et la tension $T(x, t)$:

$$\delta_{max} = \frac{a_0\omega}{V} \Rightarrow \quad T(x,t) = a_0\omega S\sqrt{E\rho}\, \sin\omega(t - \frac{x}{V})$$

- La fonction $g(x)$:

$$s(x,t) = g(x)\sin\omega t \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 g(x)}{dx^2} + (\frac{\omega}{V})^2 g(x) = 0 \Rightarrow \quad g(x) = A_1 \cos\frac{\omega}{V}x + A_2 \sin\frac{\omega}{V}x$$

Alors on aura :

$$s(0,t) = 0 \Rightarrow \quad g(0) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} g(x) = a\sin\frac{\omega}{V}x \\ A_1 = 0 \end{matrix}$$

- Les fréquences propres du barreau :

$$(\frac{\partial s}{\partial x})_{x=l} = 0 \Rightarrow \quad (\frac{\partial g}{\partial x})_{x=l} = 0 \Rightarrow \quad \cos(\frac{\omega}{V}x) = 0 \Rightarrow \quad f_N = \frac{2N+1}{4l}$$

- La longueur $l = OA$ du barreau cylindrique :

$$l = \frac{1}{4f_0}\sqrt{\frac{E}{\rho}} = 31cm$$

- L'énergie cinétique moyenne :

$$\overline{E}_c(t) = \frac{1}{2}\int v^2 dm = \frac{1}{2}\int_0^l (\frac{\partial s}{\partial t})^2 \rho S dx \qquad \Rightarrow \quad \overline{E}_c(t) = \frac{1}{8}M(a\omega)^2$$

Problème 6 :

On se propose d'étudier la propagation d'une onde transversale à la surface S d'une membrane tendue. On considère une membrane rectangulaire dans l'espace plan $Oxyz$ et dont les axes sont Ox, Oy, Oz. Soit un élément ds dont les cotes sont soumises a des tensions linéaires τ , comme le montre la figure 6.4 comme suit **:**

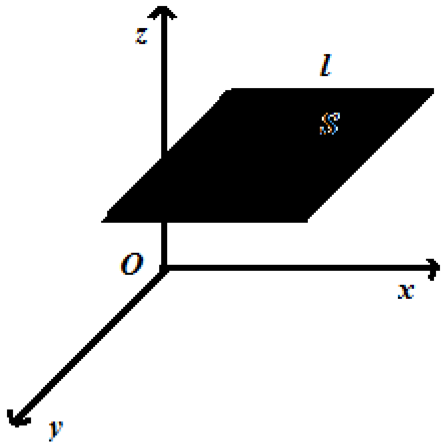


Figure 6.4

- Etablir l'équation de propagation de l'onde sachant que la membrane a une masse surfacique σ.
- Trouver les solutions de l'équation différentielle par la méthode des séparations des variables.

Application :

- Etablir l'équation de propagation dans le cas d'une membrane circulaire de rayon R.
- En déduire la forme de la solution générale de l'équation de propagation.

Solutions :

- L'équation de propagation de l'onde :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \sigma dxdy \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \tau\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)dxdy \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \Delta z = \frac{\sigma}{\tau}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \text{ avec } V = \sqrt{\frac{\tau}{\sigma}}$$

- Les solutions de l'équation différentielle par la méthode de séparation des variables :

$$z(t,x,y) = A(x)B(y)T(t) \Rightarrow \frac{\ddot{A}(x)}{A(x)} + \frac{\ddot{B}(y)}{B(y)} = \frac{1}{V^2}\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = Cste$$

❖ Après le calcul on obtient alors :

$$\begin{aligned} &\ddot{A}(x)+k_x^2A(x)=O \\ &\ddot{B}(y)+k_y^2B(y)=0 \text{ avec} \\ &\ddot{T}(t)+\omega^2T(t)=0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} k_0^2 &= k_x^2+k_y^2 \\ k_0 &= \frac{\omega}{V} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} A(x) &= A_1\cos k_x x + A_2 \sin k_x x \\ B(y) &= B_1\cos k_y y + B_2 \sin k_y y \\ T(t) &= T_1\cos \omega t + T_2 \sin \omega t \end{aligned}$$

Application :

- Dans le cas d'une membrane circulaire de rayon *R*, l'équation de propagation est sous forme *:*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\Delta z=\frac{\sigma}{\tau}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\Rightarrow \quad \Delta z(r)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial z}{\partial r})=\frac{\sigma}{\tau}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \text{ avec } \quad V=\sqrt{\frac{\tau}{\sigma}}$$

- La forme de la solution générale de l'équation de propagation :

$$z(t,x,y) = A_1 J(r) + A_2 N(r)$$

Où $J(r), N(r)$ sont les fonctions de Bessel et Neumann.

Problème 7 :

Une ligne de transmission téléphonique, parallèle à l'axe Ox, sans pertes, peut être décomposée en cellules élémentaires de longueur dx. Cette ligne est caractérisée par son inductance linéique L^*_{ind} et sa capacité linéique C^*_{ap}. Comme le montre la figure 6.5 ci dessous :

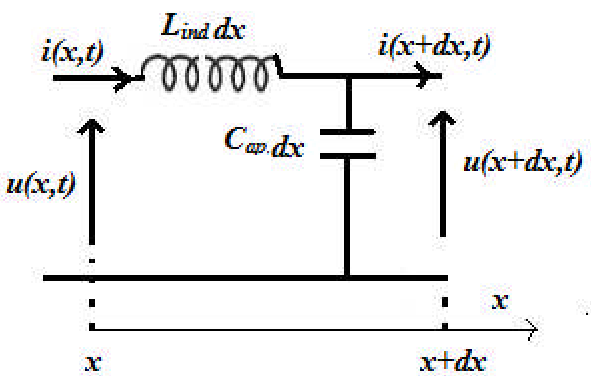


Figure 6.5

- Montrer que le courant *i(x, t)* et la tension *u(x, t)* obéissent à une même équation d'onde d'Alembert que l'on déterminera.
- Exprimer en fonction de L^*_{ind} et C^*_{ap} la célérité V de la propagation de l'onde de courant et de l'onde de tension sur cette ligne.

On admet qu'une onde progressive harmonique de courant se propage dans cette ligne, supposée infinie :

$$i(x,t) = i_0 \cos\omega(t - \frac{x}{V})$$

- Montrer qu'en tout point de la ligne, on a $u(x,t) = Z_c i(x,t)$ où l'impédance caractéristique Z_c est une constante qu'on exprimera en fonction de L^*_{ind} et C^*_{ap}.

La ligne, située dans l'espace *x<0*, s'étend jusqu'en *x=0* où elle est fermée sur une résistance *R*. On alimente la ligne par une tension par tension sinusoïdale de pulsation ω L'onde de courant s'écrit alors sous la forme :

$$i(x,t) = (Ae^{-j\frac{\omega}{V}x} + Be^{+j\frac{\omega}{V}x})e^{j\omega t}$$

- Justifier cette écriture en notation complexe.
- Exprimer l'impédance $\tilde{Z}(x,t) = \frac{u(x,t)}{i(x,t)}$ de cette ligne. On fera apparaître Z_c dans l'expression de *Z(x).*

Solutions :

- L'équation de propagation :

$$\begin{array}{l} \frac{\partial i}{\partial x} = -C^*_{ap}\frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial x} = -L^*_{ind}\frac{\partial i}{\partial t} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = L^*_{ind}C^*_{ap}\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L^*_{ind}C^*_{ap}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{array} \quad avec \quad V = \frac{1}{\sqrt{L^*_{ind}C^*_{ap}}}$$

- L'impédance caractéristique Z_c

$$u(x,t) = i_0 L^*_{ind} V\cos\omega(t - \frac{x}{V}) = L^*_{ind} V i(x,t) \quad \Rightarrow \quad Z_c = \sqrt{\frac{L^*_{ind}}{C^*_{ap}}}$$

- L'onde de courant résultante dans cette ligne fermée par la résistance *R* est due à la superposition d'une onde incidente qui se propage vers les *x>0* qui s'écrit sous la forme :

$$i_i(x,t) = Ae^{j(\omega t - \frac{\omega}{V}x)}$$

❖ Et en onde réfléchie qui se propage vers les *x<0* sous forme :

$$i_r(x,t) = Ae^{j(\omega t + \frac{\omega}{V}x)}$$

- ❖ Ainsi la résultante est donnée comme suit :

$$i(x,t) = (Ae^{-j\frac{\omega}{V}x} + Be^{+j\frac{\omega}{V}x})e^{j\omega t}$$

- L’impédance complexe de la ligne :

$$\tilde{Z}(x,t) = \frac{u(x,t)}{i(x,t)} \Rightarrow \quad \tilde{Z}(x,t) = Z_c \frac{Ae^{-j\frac{\omega}{V}x} - Be^{+j\frac{\omega}{V}x}}{Ae^{-j\frac{\omega}{V}x} + Be^{+j\frac{\omega}{V}x}}$$

Problèmes supplémentaires :

Problème 8:

Soit une chaine linéaire à un atome par maille de coté *a*. La position au repos du $n^{ième}$ atome de masse *m* est $x = na$ comme le montre la figure 6.6.

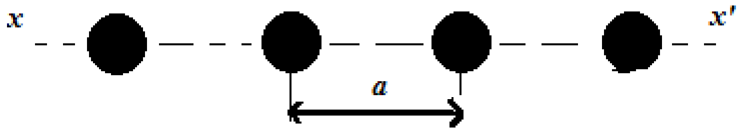


Figure 6.6

Une onde mécanique longitudinale se propageant sans amortissement le long de l'axe Ox est caractérisée par :

$$Ae^{j(q^* x - \omega t)}$$

On modélise le mouvement des atomes par un potentiel harmonique de type $\frac{1}{2}kx^2$ comme le montre la figure 6.7 avec *k* est la constante de rappelle**.**

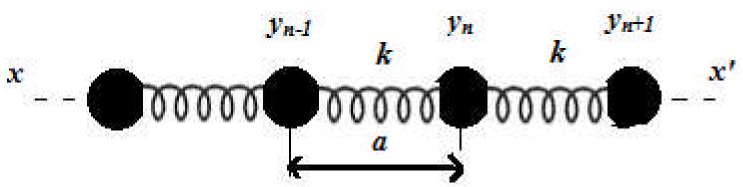


Figure 6.7

- Écrire l'équation du mouvement pour l'atome de rang *n*, en appelant y_{n-1}, y_n, y_{n+1} les déplacements des atomes de rang *n-1, n* et *n+1*.
- On cherchera la solution de forme :

$$y_n = Ae^{j(q^* x_n - \omega t)}$$

  - ❖ Déterminer la relation de dispersion $\omega(q^*)$.
  - ❖ Tracer le graphe $\omega(q^*)$**.**
  - ❖ En déduire la vitesse de la phase.
  - ❖ Donner l'expression de la vitesse du groupe.

- ❖ Que peut-on dire sur la nature du milieu aux grandes longueurs d'onde.

Problème 9:

Une conduite cylindrique de section Set d'axe horizontal Ox contient un gaz au repos, de pression P_0 , de masse volumique ρ et de coefficient de compressibilité χ_s. Une onde acoustique plane se propageant dans ce fluide. On notera $s(x,t)$ le déplacement de la tranche de fluide d'abscisse au repos x et $P(x,t) = P_0 + p^*(x,t)$ la pression du fluide a l'abscisse x, à l'instant t comme le montre la figure 6.8. On négligera les échanges de chaleur.

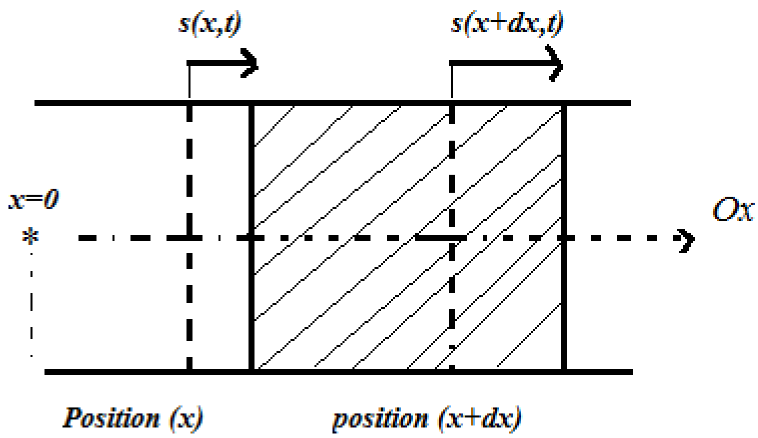


Figure 6.8 Tranche de fluide

Pour des petites oscillations :

- Etablir l'équation de propagation relative au déplacement $s(x,t)$ à partir de l'équation fondamentale de la dynamique.
- Calculer la célérité V de l'onde acoustique dans l'air caractérisé par :

$$\chi_s = 7.15.10^{-6}\, Pa^{-1} \text{ et } \rho = 1.29 kg.m^{-3}$$

REFERENCES

- [1] P. DENEVE, « Mécanique », Edition ELLIPSES, ISBN 2-7298-8751-2, 1987.
- [2] M. TAMINE, O. LAMROUS, « Vibrations et Ondes », Edition OPU, ISBN 1-02-3698, 1993.
- [3] H. LUMBROS0, « Ondes Mécaniques et Sonores », Edition DUNOD, ISBN 2-10-00468-8, 2000
- [4] J. KUNTZMANN, «Mathématiques de la physique et de la technique », Edition HERMANN, ISBN 530, 1963.
- [5] G. LANDSBERG, « Vibrations et Ondes, Optique», Edition MIR MOSCOU, ISBN 5-03-000128-X, 1988.
- [6] IAIN G. MAIN, « Vibrations and Waves in physics», Edition CAMBRIDGE LOW PRICE, ISBN 0-521-49848-1, 1993.
- [7] C. GRUBER, W. BENOIT, « Mécanique Générale», Edition PRESSES POLYTECHNIQUE ET UNIVERSITAIRES ROMANDES, ISBN 2-88074-305-2, 1998.
- [8] R. GABILLARD, « Vibrations et Phénomène de propagation », Edition DUNOD, 1972.
- [9] M. BALKANSKI, C. SEBENE, « Ondes et phénomènes vibratoires », Edition DUNOD, 1973.
- [10] L. LANDEAU ET E. LIFCHITZ, « Mécanique», Edition MIR MOSCOU, 1966.