

Sommaire

1. INTRODUCTION	3
1.1. Différents types d'antennes.....	3
1.2. Paramètres d'antennes.....	3
2. LES ANTENNES A OUVERTURES RAYONNANTES.....	4
2.1. Principe de HUYGUENS.....	4
2.2. Formule de KIRCHHOFF	4
2.3. Diffraction des ondes électromagnétiques.....	5
2.3.1. Hypothèses des densités de charges et de courants magnétiques.....	5
2.4. Formules de KOTTLER.....	6
Remarque:	6
2.5. Étude du champ a grandes distances	7
2.5.1. Classification des régions de l'espace en fonction de la distance.	7
2.6. Zones d'induction ou de rayonnement proche ($r \ll \lambda$).....	7
2.6.1. Zone de RAYLEIGH ($d \ll \frac{D^2}{2\lambda}$).....	7
2.6.2. Zone de FRESNEL ($\frac{D^2}{2\lambda} \ll d \leq \frac{2D^2}{\lambda}$).....	8
2.7. Zones de radiation ou de rayonnement lointain ($r \gg \lambda$)	8
2.7.1. Zone de FRAUNHOFER ($d \gg \frac{2D^2}{\lambda}$).....	8
2.8. Expression de la formule de KOTTLER dans la zone de FRAUNHOFER - Formules de GOUDET.....	9
Remarque	9
3. RAYONNEMENT D'UNE OUVERTURE PLANE.....	10
3.1. Etude du champ rayonné.....	10
3.2. Cas d'une ouverture équiphase	12
3.2.1. Direction de rayonnement maximal	12
3.2.2. Gain de l'ouverture	12
Remarque	13
Exemple	14
4. L'OUVERTURE RAYONNANTE RECTANGULAIRE.....	15
4.1. Champ d'une ouverture rectangulaire à illumination uniforme.	15
4.1.1. Etude générale.....	15

4.1.1.1.	Direction du maximum du lobe principal	16
4.1.1.2.	Direction des minimums	16
4.1.1.3.	Largeur à $-3dB$ du lobe principal	16
4.1.2.	Cas particulier important	17
	Remarque	17
4.1.3.	Effet d'une variation linéaire de phase.	17
4.2.	Champ d'une ouverture rectangulaire à illumination non uniforme.	18
4.2.1.	Utilisation de la transformée de FOURIER.	18
4.2.2.	Distributions non uniformes	20
5.	L'OUVERTURE RAYONNANTE CIRCULAIRE	21
5.1.	Champ d'une ouverture circulaire à illumination uniforme	21
5.1.1.	Direction du lobe principale:.....	22
5.1.2.	Direction des minimums:.....	22
5.1.3.	Direction des maximums des lobes secondaires:.....	22
5.1.4.	Largeur du lobe principal à $-3dB$	23
5.2.	Champ d'une ouverture circulaire à illumination non uniforme.....	23

1. INTRODUCTION

Ce cours porte sur une étude progressive des principaux types d'antennes et une introduction aux problèmes technologiques de leur réalisation.

Dans le domaine des fréquences élevées, on utilise comme antennes des surfaces rayonnantes qui sont assimilables du point de vue radioélectrique à une ouverture percée dans un plan opaque. La détermination de la loi de répartition des courants se ramènera dans ce cas à l'étude de la diffraction du champ électromagnétique par un trou fait dans un écran non-conducteur. L'analogie avec l'optique permet de traiter le problème par l'application du principe de Huyguens.

Le fonctionnement des antennes diélectriques est quant à lui, basé sur le principe du rayonnement d'une discontinuité entre deux (2) ondes de surface produites en introduisant une variation brutale de la constante diélectrique ou des dimensions du guide dans lequel ces ondes se propagent.

Afin d'assurer la propagation dans l'air, il est nécessaire qu'un dispositif génère une onde rayonnée. Le rôle de l'antenne d'émission est de transformer la puissance électromagnétique guidée, issue d'un générateur en une puissance rayonnée.

De façon inverse, la puissance rayonnée peut être captée par une antenne de réception. Dans ce sens, l'antenne apparaît comme un capteur et un transformateur de puissance rayonnée en puissance électromagnétique guidée. Elle joue le même rôle qu'un télescope qui capte la lumière issue des étoiles et la transforme.

Dans la plupart des cas, une antenne peut être utilisée en réception ou en émission avec les mêmes propriétés rayonnantes on dit que son fonctionnement est réciproque.

1.1. Différents types d'antennes

On va rappeler les grandes familles d'antennes à l'origine de l'ensemble des structures rayonnantes :

- les antennes filaires (dipôle, monopôle, Yagi)
- les antennes à fentes (demi ou quart d'onde)
- les antennes patches (planaires)
- les antennes à ouverture (cornet)
- les antennes à réflecteurs (paraboles)

1.2. Paramètres d'antennes

- Impédance
- Résistance de rayonnement
- Diagramme de rayonnement
- Directivité et gain d une antenne

2. LES ANTENNES A OUVERTURES RAYONNANTES

2.1. Principe de HUYGUENS

« Chaque point d'une source d'onde agit comme une nouvelle source émettant à son tour une onde dite secondaire. Toutes les ondes secondaires se composent pour former une nouvelle surface d'onde ».

Dans le cas d'une ouverture, cette surface d'onde de référence sera prise sur l'ouverture elle - même.

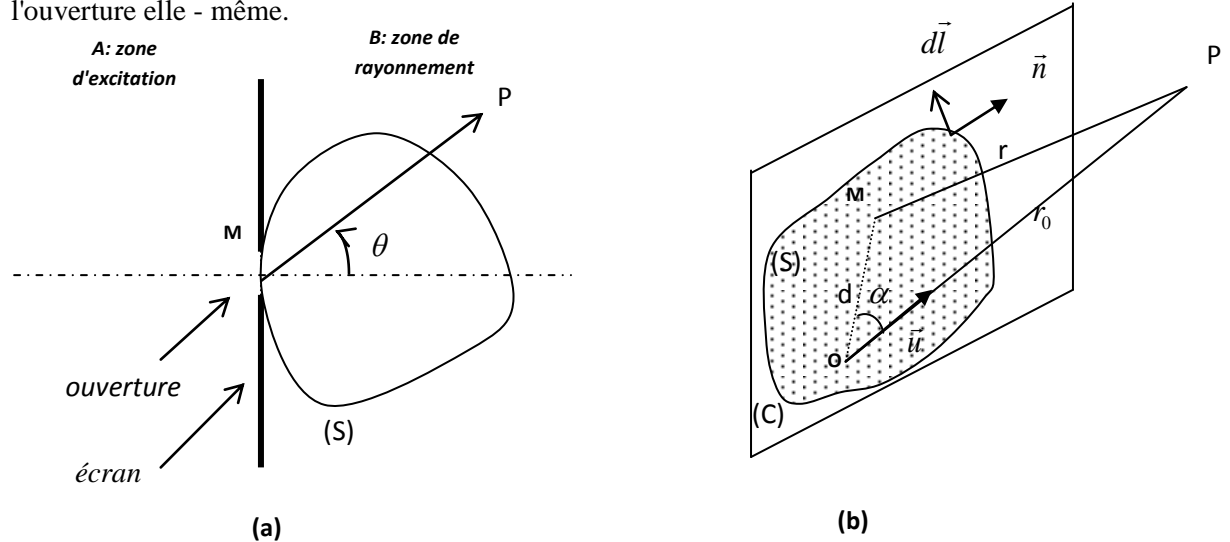


Fig.2.1 - Diffraction par une ouverture rayonnante.

On montre que la répartition de l'énergie rayonnée dans l'espace ne dépend que de la forme et des dimensions de l'ouverture, ainsi que de la distribution, en grandeur et phase du champ qui règne dans le plan de l'ouverture, indépendamment de la façon dont ce champ a été créé.

2.2. Formule de KIRCHHOFF

On admet que la lumière peut se représenter par une fonction scalaire $U(x, y, z, t)$ satisfaisant à l'équation de propagation:

$$\Delta U = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

qui s'écrit dans le cas d'une onde sinusoïdale: $\Delta U = -\beta^2 U$

Soit:

- M un point de l'ouverture appartenant à la surface S.
- P un point intérieur au volume V limité par cette surface (fig.2.1)

La fonction d'onde:

$$\psi(M) = \frac{e^{-j\beta r}}{r} \quad \text{où } r = MP$$

Cette fonction et ses deux premières dérivées sont continues dans tout le volume V (sauf au point P). On peut alors appliquer la formule de GREEN :

$$\iiint_V (X\Delta Y - Y\Delta X) dV = \iint_S \left(X \frac{\partial Y}{\partial n} - Y \frac{\partial X}{\partial n} \right)$$

qui, en posant:

$$X = U(M)$$

$$Y = \psi(M)$$

donnera la solution générale:

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\psi(M) \frac{\partial U(M)}{\partial n} - U(M) \frac{\partial \psi(M)}{\partial n} \right) ds$$

2.3. Diffraction des ondes électromagnétiques

2.3.1. Hypothèses des densités de charges et de courants magnétiques.

Considérons deux régions (A) et (B) de l'espace séparée par un plan conducteur muni d'une ouverture de surface S comme indiqué sur la figure 4.1-(a).

Le problème consiste alors, à établir les expressions des champs \vec{E} et \vec{H} dans la région (B) connaissant leurs valeurs dans la région (A).

Les sources de la région (A) créent en tout point de cette région un champ électromagnétique, et en particulier \vec{E}_S et \vec{H}_S sur la surface S.

On cherchera les densités de charges électriques et magnétiques ainsi que les densités de courants électriques et magnétiques à répartir sur cette surface S pour y créer, en l'absence des sources de la région (A), ces mêmes champs \vec{E}_S et \vec{H}_S .

Ces courants et ces charges constitueront les sources rayonnantes pour la région (B).

Les densités de charges et de courants magnétiques introduits n'ont aucune réalité physique puisqu'il n'existe pas de charge magnétique isolée. Ils représentent un artifice de calcul commode qui permet de trouver une solution en accord avec les champs réellement obtenus. On définit:

- La densité de courant électrique, en fonction des composantes tangentielles du champ magnétique:

$$\vec{J} = \vec{n} \wedge [(\vec{H}_t)_B - (\vec{H}_t)_A]$$

- La densité de charge électrique, en fonction des composantes normales de l'induction électrique:

$$\rho = \vec{n} [(\vec{D}_n)_B - (\vec{D}_n)_A]$$

- La densité de courants magnétiques (fictifs):

$$\vec{M} = \vec{n} \wedge \vec{E}_t$$

- la densité de charges magnétiques (fictives):

$$m = \vec{n} \cdot \vec{B}_n$$

Les équations de Maxwell et les hypothèses de ces densités de charges et des courants permettent de définir dans ce cas l'onde électromagnétique par:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{\xi} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}'$$

$$\vec{H} = \overrightarrow{\text{grad}}V' + \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} + \frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$$

2.4. Formules de KOTTLER.

La solution de ces équations en un point P est obtenue après détermination des potentiels vecteurs retardés de LORENTZ \vec{A} et \vec{A}' créés par les densités de courant \vec{J} et \vec{M} .

En posant:

$$\psi = \frac{e^{-j\beta r}}{r}$$

Fonction d'onde; il vient:

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iint_S \vec{J} \cdot \vec{\psi} \cdot dS \quad \text{et} \quad \vec{A}' = \frac{\xi}{4\pi} \iint_S \vec{M} \cdot \vec{\psi} \cdot dS$$

D'où les solutions exprimées par KOTTLER:

$$\begin{aligned} \vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S [(\vec{H} \wedge \vec{n}) j \omega \mu \Psi + (\vec{E} \cdot \vec{n}) \overrightarrow{\text{grad}}_M \Psi - (\vec{E} \wedge \vec{n}) \Lambda \overrightarrow{\text{grad}}_M \Psi] dS \\ - \frac{1}{4\pi j \omega \xi} \oint_C \overrightarrow{\text{grad}}_M \Psi (\vec{H} \cdot d\vec{l}) \end{aligned}$$

$$\vec{H}(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S [-(\vec{E} \wedge \vec{n}) j \omega \xi \Psi + (\vec{H} \cdot \vec{n}) \overrightarrow{\text{grad}}_M \Psi - (\vec{H} \wedge \vec{n}) \Lambda \overrightarrow{\text{grad}}_M \Psi] dS + \frac{1}{4\pi j \omega \mu} \oint_C \overrightarrow{\text{grad}}_M \Psi (\vec{E} \cdot d\vec{l})$$

Remarque:

✓ - L'indice M sur l'opérateur gradient indique une dérivation portant sur les coordonnées de M par rapport à P (fig.2.1-b).

✓ - La solution peut également s'écrire d'une manière différente; par exemple pour le champ électrique:

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S (\psi \frac{\partial \vec{E}}{\partial n} - \vec{E}_M \frac{\partial \psi}{\partial n}) ds + \frac{1}{4\pi} \oint \psi \cdot (\vec{E} \wedge d\vec{l}) - \frac{1}{4\pi j \omega} \oint \overrightarrow{\text{grad}}_M \psi \cdot (\vec{H} \cdot d\vec{l}) \quad (*)$$

✓ - On note que l'intégrale de surface représente la formule de KIRCHHOFF. La nature du champ électromagnétique introduit les deux intégrales de contour qui interviennent pour tenir compte des discontinuités sur le contour de l'ouverture.

✓ - Quand le point P se trouve à proximité de la surface rayonnante, le calcul du champ $\vec{E}(P)$ nécessite l'utilisation de la formule (*) complète.

✓ - A grande distance de l'ouverture, dans la région de rayonnement lointain ou zone de FRAUNHOFFER, les intégrales de contour tendent vers zéro et peuvent être négligées.

En effet à grande distance, le caractère vectoriel du champ électromagnétique sur l'ouverture n'a plus d'influence et la formule de KIRCHHOFF seule peut être utilisée.

2.5. Étude du champ a grandes distances

2.5.1. Classification des régions de l'espace en fonction de la distance.

Pour une ouverture rayonnante le champ rayonné en un point quelconque de l'axe de la surface rayonnante est égal à la somme vectorielle de tous les champs créés en ce point, par les éléments A_i de l'ouverture.

$$\vec{E}_p = \sum_{(s)} A_i$$

- On admet que l'on a toujours une faible ouverture telle que: $D \ll O\bar{P}$

- P suffisamment éloigné de O pour que: $M\bar{P} - O\bar{P} \ll \frac{\lambda}{16}$. La différence entre le trajet le plus long avec le trajet le plus court doit vérifier le critère de Rayleigh pour que tous les champs élémentaires puissent être considérés en phase, ce qui donne:

$$(d + \frac{\lambda}{16})^2 = \frac{D^2}{4} + d^2$$

D'où très sensiblement: $d > \frac{2D^2}{\lambda}$

Plus on se rapproche de l'ouverture plus les mesures de gains deviennent de plus en plus non valables, et les lobes secondaires de plus en plus élevés. Selon la valeur de "d", on définit deux régions; celle de RAYLEIGH et celle de FRESNEL où l'onde sphérique n'est pas encore formée.

2.6. Zones d'induction ou de rayonnement proche ($r \ll \lambda$)

2.6.1. Zone de RAYLEIGH ($d \ll \frac{D^2}{2\lambda}$)

Jusqu'à la distance $d_0 = \frac{D^2}{2\lambda}$ on retrouve l'énergie confinée sur l'ouverture. La propagation s'est donc effectuée sans perte. Jusqu'à "d₀" l'énergie est comme guidée dans un tube ayant approximativement pour section, celle de l'ouverture: C'est un véritable guidage d'onde.

C'est la zone proche où l'on doit tenir compte des variations de "r" tant pour l'amplitude que pour la phase. En général:

$$d_0 \cong \frac{D^2}{2\lambda} ; \text{ pour une ouverture carrée à illumination uniforme.}$$

$d_0 \cong 0,82 \frac{D^2}{2\lambda}$; pour une ouverture circulaire à illumination uniforme.

$d_0 \cong 0,61 \frac{D^2}{2\lambda}$; pour une ouverture circulaire à illumination parabolique.

2.6.2. Zone de FRESNEL ($\frac{D^2}{2\lambda} < d \leq \frac{2D^2}{\lambda}$)

Au-delà de la distance " d_0 ", les interférences provoquent d'importantes fluctuations. C'est la zone de réaction du milieu avec l'onde rayonnée où l'onde sphérique commence à se former.

On peut considérer encore ici que le terme " r " reste constant dans l'expression de l'amplitude mais qu'il varie dans celle de la phase.

2.7. Zones de radiation ou de rayonnement lointain ($r \gg \lambda$)

2.7.1. Zone de FRAUNHOFER ($d > \frac{2D^2}{\lambda}$)

Le champ décroît régulièrement en raison de l'inverse de la distance. L'onde rayonnée est sphérique, son centre de phase étant le point O. C'est la région de rayonnement proprement dit.

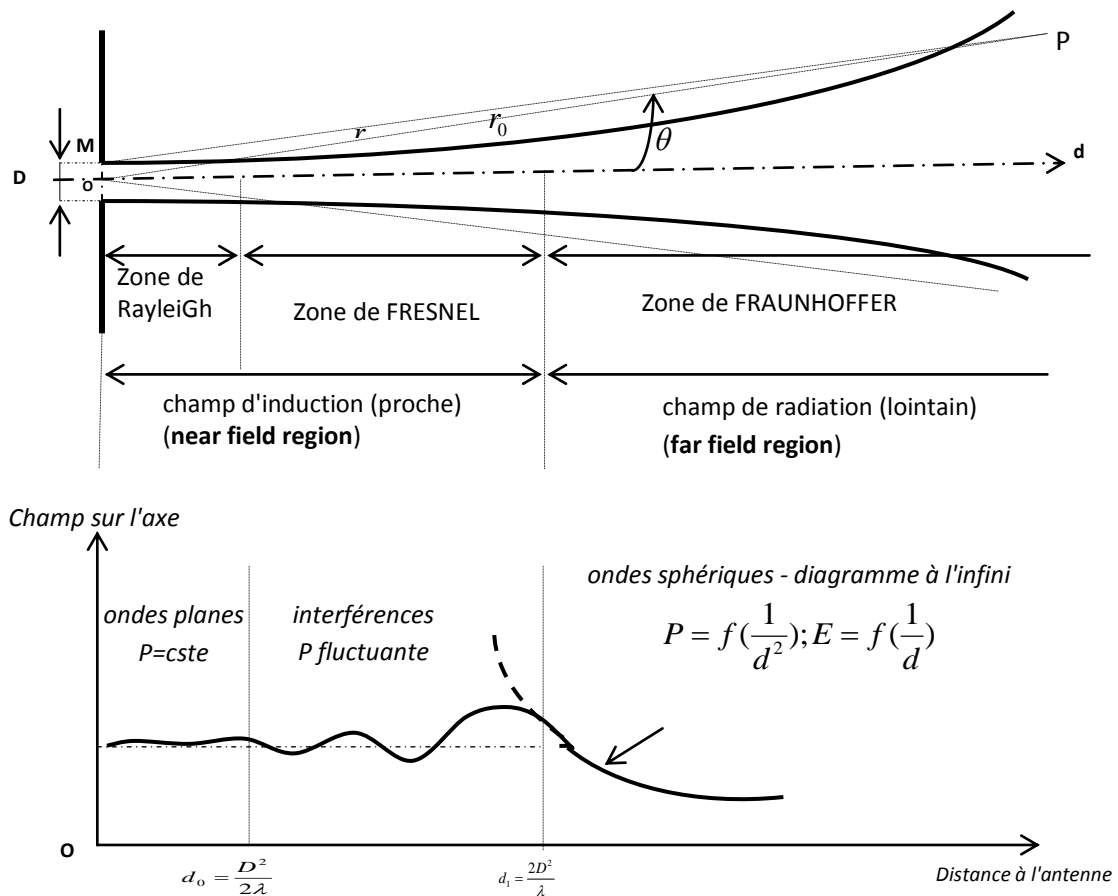


Fig.2.7 : Formation du faisceau de rayonnement.

2.8. Expression de la formule de KOTTLER dans la zone de FRAUNHOFER - Formules de GOUDET.

Posons:

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP} = \vec{u}.r_0 = \vec{u}.R \\ \overrightarrow{OM} = d \\ \overrightarrow{MP} = r \\ (\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OM}) = \alpha \end{cases}$$

Dans la zone de FRAUNHOFER , on a:

$$r \cong R \text{ pour l'amplitude}$$

$$r \cong R - d \cos \alpha \text{ pour la phase}$$

la fonction $\psi(P) = \frac{e^{-j\beta r}}{r}$ s'exprimera alors par: $\psi(P) = \frac{e^{-j\beta R}}{R} e^{j\beta d \cos \alpha}$

et l'on peut écrire alors une expression asymptotique du gradient:

$$\overrightarrow{\text{grad}}_M \psi = j \frac{2\pi}{\lambda R} e^{-j\beta R} e^{j\beta d \cos \alpha} \vec{u}$$

En appliquant ces relations à la formule de KOTTLER on obtient l'expression, déduite par GOUDET, des champs à grande distance:

$$\begin{aligned} \vec{E}(P) &= j \frac{e^{-j\beta R}}{2\lambda R} \iint_S \left[\vec{u} \wedge (\vec{E} \wedge \vec{n}) + \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} (\vec{H} \wedge \vec{n})_N \right] e^{j\beta d \cos \alpha} ds \\ \vec{H}(P) &= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} [\vec{u} \wedge \vec{E}(P)] \end{aligned}$$

Remarque

L'indice N exprime que l'on prend la composante de $(\vec{H} \wedge \vec{n})$ normale au vecteur \vec{u} et située dans le plan défini par le vecteur \vec{u} et le vecteur $(\vec{H} \wedge \vec{n})$. C'est la projection du produit vectoriel sur la normale au plan de \overrightarrow{OP} et de \vec{H} .

3. RAYONNEMENT D'UNE OUVERTURE PLANE

3.1. Etude du champ rayonné.

Soit une ouverture plane quelconque siège d'une distribution de lignes de champ telle qu'en tout point $M(x, y)$ les conditions suivantes soient vérifiées:

- Le champ \vec{E} dépend en amplitude et en phase des coordonnées du point M et varie sinusoidalement en fonction du temps.

$$\vec{E}(x, y) = A(x, y).e^{j\varphi(x, y)}$$

Cette répartition ou distribution du champ sur l'ouverture peut être:

- une illumination quelconque: $\vec{E}(x, y) = A(x, y).e^{j\varphi(x, y)}$
- une illumination uniforme: $\vec{E} = A_0 = cste$.
- une illumination équiphase: $\varphi(x, y) = cste$ (ou nulle).
- une illumination à phase linéaire: $\varphi(x, y) = kx$ (ou ky)
- Les polarisations de \vec{E} et \vec{H} sont rectilignes.
- \vec{E} et \vec{H} sont en phase dans le temps et perpendiculaires entre eux avec: $\frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$

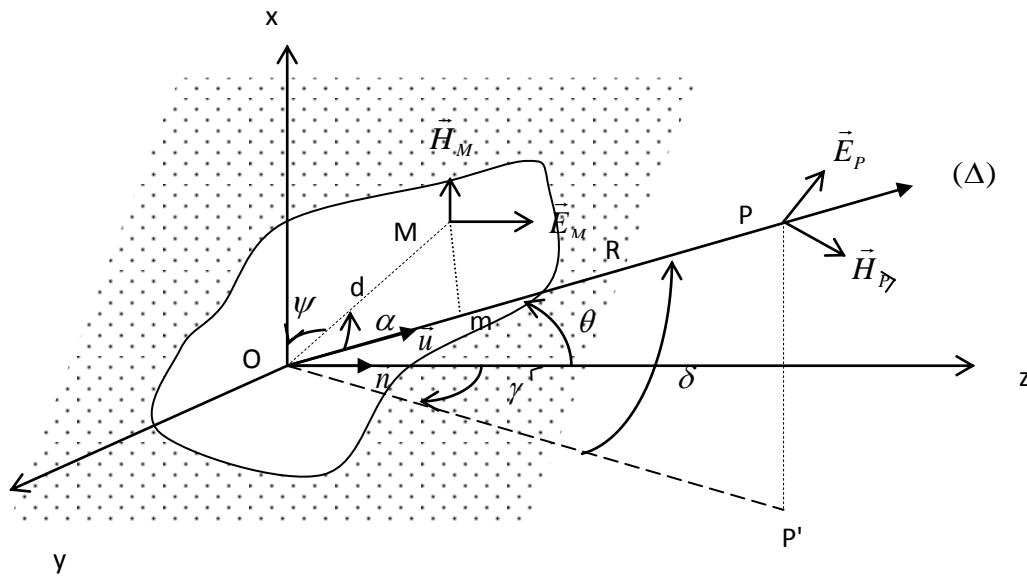


Fig.3.1-Rayonnement par une ouverture plane.

Connaissant le champ en n'importe quel point de l'ouverture, on se propose de déterminer son expression $\vec{E}_P(\theta)$ en un point P situé à très grande distance de l'origine O.

On définit:

\vec{n} ; la normale à la surface rayonnante.

\vec{u} ; vecteur unitaire de \overrightarrow{OP} .

$$\theta = (\overrightarrow{OP}, \vec{n})$$

$$\vec{H} // \overrightarrow{ox} \Rightarrow \vec{H} = \begin{pmatrix} H \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{E} // \overrightarrow{oy} \Rightarrow \vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ -E \\ 0 \end{pmatrix}$$

Appliquant la formule de GOUDET à cette configuration:

$$\vec{E}(P) = j \frac{e^{-j\beta R}}{2\lambda R} \iint_S \left[\vec{u} \wedge (\vec{E} \wedge \vec{n}) + \sqrt{\frac{\mu}{\xi}} (\vec{H} \wedge \vec{n})_N \right] e^{j\beta d \cos \alpha} ds$$

Sachant que les composantes des divers vecteurs sont:

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ -E \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{H} = \begin{pmatrix} H \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{u} = \begin{cases} a = \sin \delta \\ b = \cos \delta \sin \gamma \\ c = \cos \delta \cos \gamma = \cos \theta \end{cases}$$

et $a^2 + b^2 + c^2 = 1$,

Le calcul des produits vectoriels donne, en supposant que les conditions de l'espace libre existaient sur l'ouverture ($H = \sqrt{\frac{\xi}{\mu}} E$):

$$\vec{u} \wedge (\vec{E} \wedge \vec{n}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -cE \\ bE \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{\frac{\mu}{\xi}} (\vec{H} \wedge \vec{n})_N = \begin{pmatrix} abE \\ (b^2 - 1)E \\ bcE \end{pmatrix}$$

$\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{C}$ $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} (yw - vz) \cdot \vec{i} \\ (-xw + uz) \cdot \vec{j} \\ (xv - uy) \cdot \vec{k} \end{pmatrix}$

Il vient alors:

$$\left| \vec{u} \wedge (\vec{E} \wedge \vec{n}) + \sqrt{\frac{\mu}{\xi}} (\vec{H} \wedge \vec{n})_N \right| = E \left[a^2 b^2 + [b^2 - (c+1)]^2 + b^2 (c+1)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Qui se simplifie finalement en:

$$E(1+c) = E(1 + \cos \delta \cos \gamma)$$

On peut aussi démontrer que:

$$d \cos \alpha = x \sin \delta + y \sin \gamma \cos \delta$$

(projection d'un vecteur = somme des projections de ses composantes)

Le champ rayonné dans la direction \vec{u} (ou (Δ)) est alors donné par:

$$\vec{E}_P(\theta) = j \frac{e^{-j\beta R}}{2\lambda R} \iint_S A(x, y) \cdot e^{j\varphi(x, y)} (1 + \cos \delta \cos \gamma) e^{j\beta (x \sin \delta + y \sin \gamma \cos \delta)} dx dy$$

A partir de cette expression, on détermine le champ dans le plan yOz contenant le vecteur \vec{E} ($\delta=0$ et $\gamma=\theta$), et le champ dans le plan xOz qui contient \vec{H} ($\gamma=0$ et $\delta=\theta$).

$$\vec{E}_E(\theta) = j \frac{e^{-j\beta R}}{2\lambda R} \iint_S A(x, y) \cdot e^{j\varphi(x, y)} (1 + \cos \theta) e^{j\beta y \sin \theta} dx dy$$

$$\vec{E}_H(\theta) = j \frac{e^{-j\beta R}}{2\lambda R} \iint_S A(x, y) \cdot e^{j\varphi(x, y)} (1 + \cos \theta) e^{j\beta x \sin \theta} dx dy$$

3.2. Cas d'une ouverture équiphase

3.2.1. Direction de rayonnement maximal

L'ouverture étant équiphase :

$$e^{j\varphi(x, y)} = cste \Rightarrow E(x, y) = A(x, y)$$

L'expression du champ dans le plan yOz devient:

$$E_E(\theta) = jk \iint_S A(x, y) \cdot (1 + \cos \theta) \cdot e^{j\beta y \sin \theta} dx dy .$$

Comme dans le cas d'un alignement, cette expression traduit la somme d'un certain nombre de vecteurs déphasés de $\beta y \sin \theta$.

Leur somme sera maximale lorsqu'ils sont tous en phase, ce qui se produit pour $\theta=0$.

Quelle que soit la répartition équiphase $E(x, y) = A(x, y)$ sur la surface de l'ouverture, le champ présente dans la direction $\theta=0$, un maximum de valeur:

$$E_E(\theta=0) = \frac{1}{\lambda R} \iint_S A(x, y) \cdot dx dy$$

Le maximum de rayonnement a donc lieu suivant la normale \vec{Oz} au plan de l'ouverture. Le lobe principal sera toujours assez étroit et l'énergie rayonnée est concentrée autour de \vec{Oz} .

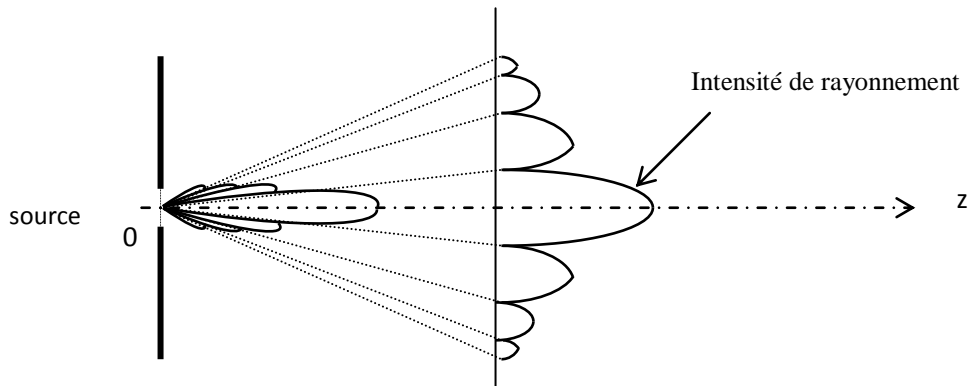


Fig.3.2 - Diffraction par une ouverture.

3.2.2. Gain de l'ouverture

Le gain étant défini par: $G_0 = \frac{U}{U_0} = \frac{P}{P_0}$

(Rapport des intensités de rayonnement de l'antenne et de la source isotropique alimentées par la même puissance).

Ou par: $G_0 = 4\pi \cdot \frac{P_{\max}}{P_i}$

(Rapport de la puissance rayonnée par unité d'angle solide dans la direction de rayonnement max. et de la puissance rayonnée par unité d'angle solide dans la même direction par la source isotropique).

Calculons le gain absolu dans la direction de champ maximal, pour cette ouverture plane à répartition équiphase de champ.

$$\bar{P}_{\max} = \frac{E_E^2(\theta=0)}{120\pi} = \frac{1}{120\pi} \cdot \frac{1}{\lambda^2 R^2} \left[\iint_S A(x, y) dx dy \right]^2$$

D'autre part on sait que dans un milieu de propagation sans pertes, la puissance ω rayonnée à une distance R est identique à la puissance ω_0 sur l'ouverture et elle s'écrit:

$$\omega_0 = \frac{1}{120\pi} \iint_S E^2(x, y) dx dy = \frac{1}{120\pi} \iint_S A^2(x, y) dx dy$$

L'antenne isotropique alimentée sous ω_0 , rayonne à la distance R une densité de puissance:

$$\bar{P}_0 = \frac{\omega_0}{4\pi R^2} = \frac{1}{4\pi R^2} \cdot \frac{1}{120\pi} \iint_S A^2(x, y) dx dy$$

On tire alors l'expression de $G_0 = \frac{\bar{P}_{\max}}{\bar{P}_0}$

$$G_0 = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot \frac{\left[\iint_S A(x, y) dx dy \right]^2}{\iint_S A^2(x, y) dx dy}$$

Remarque

✓ Cas où l'illumination est uniforme.

La répartition du champ sur l'ouverture est constante: $A(x, y) = cste$. Le gain absolu devient:

$$G_0 = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot S$$

✓ On pourra démontrer en utilisant l'inégalité de SCHWARTZ que cette valeur correspond au maximum de gain réalisable pour une ouverture. La valeur S déterminée par l'illumination uniforme est le maximum du rapport

$$K = \frac{\left[\iint_S A(x, y) dx dy \right]^2}{\iint_S A^2(x, y) dx dy}$$

✓ On déduit donc que:

a)- Le gain est maximal pour une ouverture équiphase avec une distribution uniforme.

b)- Pour une ouverture à illumination non uniforme, le gain est toujours inférieur à G_0 .

Ainsi pour une illumination quelconque, le gain absolu s'écrit:

$$G_0 = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot S \cdot f$$

où $f \leq 1$ est appelé facteur de gain.

c)- On déduit également une surface équivalente de réception d'une antenne par la relation:

$$G_0 = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot A_e$$

avec $A_e = S \cdot f$

Exemple

Pour une répartition de la forme $A(x, y) = E_0 \cos \frac{\pi x}{a}$ on obtient: $G_0 = \frac{4\pi S}{\lambda^2} \cdot \frac{8}{\pi^2}$

$$E(\theta) = K \left[\frac{e^{j\beta x \sin \delta}}{j\beta \sin \delta} \right]_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \cdot \left[\frac{e^{j\beta y \sin \gamma \cos \delta}}{j\beta \sin \gamma \cos \delta} \right]_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} = K \cdot ab \cdot \frac{\sin(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \delta)}{\frac{\pi a}{\lambda} \sin \delta} \cdot \frac{\sin(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \gamma \cos \delta)}{\frac{\pi b}{\lambda} \sin \gamma \cos \delta}$$

D'où l'expression du champ à grande distance:

$$E(\theta) = j \frac{e^{-j\beta R}}{2\lambda R} A_0 \cdot S \cdot (1 + \cos \delta \cos \gamma) \frac{\sin(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \delta)}{\frac{\pi a}{\lambda} \sin \delta} \cdot \frac{\sin(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \gamma \cos \delta)}{\frac{\pi b}{\lambda} \sin \gamma \cos \delta}$$

Dans les deux plans particuliers E ou yOz ($\delta=0; \gamma=\theta$) et H ou xOz ($\delta=\theta; \gamma=0$), cette formule se simplifie en:

$$E_E(\theta) = j \frac{e^{-j\beta R}}{2\lambda R} A_0 \cdot S \cdot (1 + \cos \theta) \frac{\sin(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta)}{\frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta}$$

$$E_H(\theta) = j \frac{e^{-j\beta R}}{2\lambda R} A_0 \cdot S \cdot (1 + \cos \theta) \frac{\sin(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta)}{\frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta}$$

De ces deux expressions on peut tirer les caractéristiques essentielles du diagramme de rayonnement.

4.1.1.1. Direction du maximum du lobe principal

Elle est déterminée par le maximum de $\frac{\sin u}{u}$, c'est à dire 1, qui correspond à $\theta = 0$.

Cette direction représente aussi le maximum de $(1 + \cos \theta)$.

$$|\bar{E}_E|_{\max} = |\bar{E}_H|_{\max} = \frac{A_0 S}{\lambda R}$$

4.1.1.2. Direction des minimums

Ils sont obtenus pour $\sin u = 0$ soit $u = k\pi$, l'angle du premier minimum vaut alors:

$$\text{- dans le plan } E : \theta_1 = \arcsin \frac{\lambda}{b}$$

$$\text{- dans le plan } H : \theta_1 = \arcsin \frac{\lambda}{a}$$

4.1.1.3. Largeur à $-3dB$ du lobe principal

Elle est définie pour $\frac{E}{E_{\max}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ce qui donne à résoudre dans le plan E ou H :

$$\cos^2 \frac{\theta_0}{2} \cdot \frac{\sin(\frac{\pi b(a)}{\lambda} \sin \theta_0)}{\frac{\pi b(a)}{\lambda} \sin \theta_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2\theta_0 = \theta_{-3dB}$$

4.1.2. Cas particulier important

Pour **a** et **b** grandes devant la longueur d'onde λ (aux fréquences élevées), le champ est concentré autour de l'axe \vec{oz} ; θ est toujours très faible. On peut alors faire au voisinage de \vec{oz} les approximations $\cos \theta \cong 1$ et $\sin \theta \cong \theta$, d'où des expressions simplifiées des champs:

$$E_{E(H)}(\theta) = j \frac{e^{-j\beta R}}{\lambda R} A_0 \cdot S \frac{\sin \frac{\pi \theta b(a)}{\lambda}}{\frac{\pi \theta b(a)}{\lambda}}$$

Les caractéristiques du diagramme de rayonnement sont alors:

- direction du maximum du lobe principal: $\theta = 0$
- direction du premier minimum: $\theta_1 = \frac{\lambda}{b(a)} \text{ rad}$ soit $\theta_1 = 57^\circ \frac{\lambda}{b(a)}$
- largeur à $3dB$ du lobe principal: $2\theta_0 = 51^\circ \frac{\lambda}{b(a)}$

(on fait $\frac{\sin u}{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, soit $u = \frac{\pi b(a)}{\lambda} \theta_0 = 1,39$)

- amplitude du premier lobe secondaire: on trouve $u = 4,51$ et l'on montre qu'il se place à $13,2 \text{ dB}$ au-dessous du max. du lobe principal.

Remarque

Pratiquement les dimensions des ouvertures rectangulaires sont souvent de l'ordre de 10λ , ce qui conduit à des valeurs de l'ordre:

$$\begin{aligned} \theta_1 &\cong 5,7^\circ \\ 2\theta_0 &\cong 5,1^\circ \end{aligned}$$

Le diagramme de rayonnement est alors tracé à partir de la courbe $\frac{\sin u}{u}$.

4.1.3. Effet d'une variation linéaire de phase.

Si l'illumination est supposée uniforme mais à variation linéaire de phase:

$$E(x, y) = A_0 \cdot e^{j\varphi(x)} \quad \text{avec} \quad \varphi(x) = kx \text{ (ou } ky \text{)}.$$

Le champ s'écrira:

$$E_H(\theta) = j \frac{e^{-j\beta R}}{2\lambda R} A_0 \cdot (1 + \cos \theta) \iint_S e^{j(\beta x \sin \theta + \varphi(x))} dx \cdot dy$$

Comme θ suffisamment petit au voisinage de $\vec{o z}$:

$$\Rightarrow E_H(\theta) = j \frac{e^{-j\beta R}}{\lambda R} A_0 \cdot \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dy \cdot \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} e^{jx(k+\beta \sin \theta)} dx$$

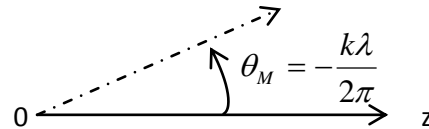
Soit:

$$E_H(\theta) = j \frac{e^{-j\beta R}}{\lambda R} A_0 b \cdot \frac{\sin \frac{a}{2}(k + \beta \sin \theta)}{\frac{a}{2}(k + \beta \sin \theta)}$$

qui varie comme la fonction $\frac{\sin u}{u}$ avec $u = \frac{a}{2}(k + \beta \sin \theta)$

La direction du maximum du lobe principal est toujours obtenue pour $\frac{\sin u}{u} = 1$ ce qui correspond à $u = 0$, soit: $\sin \theta = -\frac{k}{\beta}$ d'où l'on tire la valeur de θ correspondant à la direction du lobe principal:

$$\sin \theta_M \cong \theta_M = -\frac{k\lambda}{2\pi}$$



où il apparaît que cette direction varie avec k .

La variation linéaire de phase constitue ainsi une méthode de balayage directif de l'espace, puisque le facteur k permet de commander l'angle de pointage du lobe principal.

4.2. Champ d'une ouverture rectangulaire à illumination non uniforme.

Comme dans le cas des alignements de sources ponctuelles, on est amené à utiliser des répartitions non uniformes, afin de diminuer le niveau des lobes secondaires.

Pour chaque type de répartitions, l'étude peut s'effectuer :

- Soit par le calcul direct de l'intégrale double,
- Soit, en appliquant la méthode de la transformation de Fourier, par l'utilisation des tables de transformées.

4.2.1. Utilisation de la transformée de FOURIER.

Pour certaines distributions particulières, un processus mathématique permet d'éviter le calcul fastidieux de l'intégrale double.

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(f).e^{2j\pi ft} df \Leftrightarrow s(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t).e^{-j2\pi ft} dt$$

Il s'applique essentiellement au cas où la distribution $E(x, y)$ sur l'ouverture est le produit de deux fonctions à une seule variable $E_x(x)$ et $E_y(y)$:

$$E(x, y) = E_x(x).E_y(y)$$

Le champ à grande distance, dans le plan E et au voisinage de \vec{oZ} s'écrit alors:

$$E_E(\theta) = j \frac{e^{-j\beta R}}{\lambda R} \iint_S E_x(x).E_y(y).e^{j\beta y \sin \theta} dx.dy$$

qui peut se décomposer en deux intégrales simples:

$$E_E(\theta) = j \frac{e^{-j\beta R}}{\lambda R} \underbrace{\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} E_x(x) dx}_{I(x)} \underbrace{\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} E_y(y).e^{j\beta y \sin \theta} dy}_{I(y)}$$

En remarquant que:

a) - $I(x)$ ne dépend pas de l'angle θ : $\Rightarrow I(x) \equiv E_x$

b) - Sachant qu'il n'y a de sources qu'entre $-\frac{b}{2}$ et $+\frac{b}{2}$: $\Rightarrow I(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_y(y).e^{j\beta y \sin \theta} dy$

le champ s'écrit:

$$E_E(\theta) = E_x \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} E_y(y).e^{j\beta y \sin \theta} dy$$

on sait en outre, qu'au voisinage de l'axe \vec{oZ} :

$$\sin \theta \cong \theta \quad \Rightarrow \quad E_E(\theta) = E_E(\sin \theta)$$

d'où l'expression du champ:

$$E_E(\sin \theta) = E_x \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} E_y(y).e^{j\beta y \sin \theta} dy$$

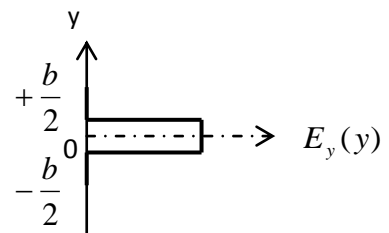
ceci montre que:

La loi de répartition du champ à grande distance $E_E(\theta)$ et la loi de répartition sur l'ouverture $E(x, y)$ sont des transformées de FOURIER l'une de l'autre.

Ainsi pour une illumination uniforme $E(x, y) = A_0$

On peut poser

$$\begin{aligned} E_x &= A_0 \\ E_y(y) &= 1 \end{aligned}$$



et l'on se ramène au calcul de la transformée de FOURIER de $E_y(y)=1$ qui est l'échelon unité

et qui vaut dans le plan E :

$$TF(1) = \frac{\sin(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta)}{\frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta}$$

ce qui nous ramène au résultat trouvé précédemment

4.2.2. Distributions non uniformes

Comme dans le cas des alignements de sources ponctuelles, on est amené à utiliser des répartitions non uniformes afin de diminuer le niveau des lobes secondaires. Pour chaque type de répartitions, l'étude peut s'effectuer,

- soit par le calcul direct de l'intégrale double,
- soit en appliquant la méthode de la transformation de FOURIER, par l'utilisation des tables des transformées.

La figure 4.2.2 montre la diminution des lobes secondaires et l'élargissement correspondant à $3dB$ du lobe principal, par rapport à l'illumination uniforme.

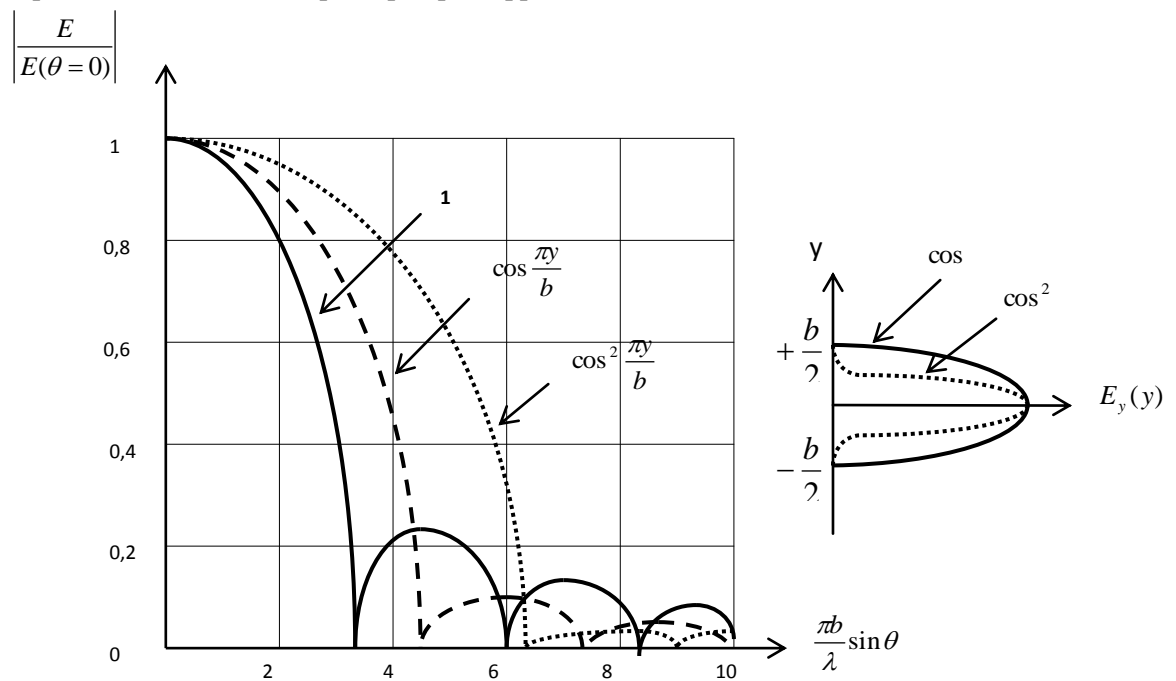


Fig.4.2.2 - Variation du niveau des lobes secondaires et de la largeur du lobe principal en fonction du type de l'illumination.

5. L'OUVERTURE RAYONNANTE CIRCULAIRE

5.1. Champ d'une ouverture circulaire à illumination uniforme

Dans de nombreux projecteurs d'ondes, l'ouverture rayonnante possède une forme circulaire. C'est le cas de réflecteurs paraboliques, de lentilles circulaires ou de cornets coniques.

On se limitera à l'étude des répartitions équiphases, répartitions qui présentent le maximum de gain:

$$E(x, y) = F(\rho, \psi).e^{j\varphi(\rho, \psi)} = E_0$$

Dans le cas général, le champ rayonné en un point P et en coordonnées polaires est donné par:

$$\vec{E}(\theta) = j \frac{e^{-j\beta R}}{2\lambda R} \iint_S F(\rho, \psi).e^{j\varphi(\rho, \psi)} (1 + \cos \delta \cos \gamma) e^{j\beta \rho (\cos \psi \sin \delta + \sin \psi \sin \gamma \cos \delta)} \rho.d\rho.d\psi$$

Ici et en posant:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \psi \\ y &= \rho \sin \psi \end{aligned}$$

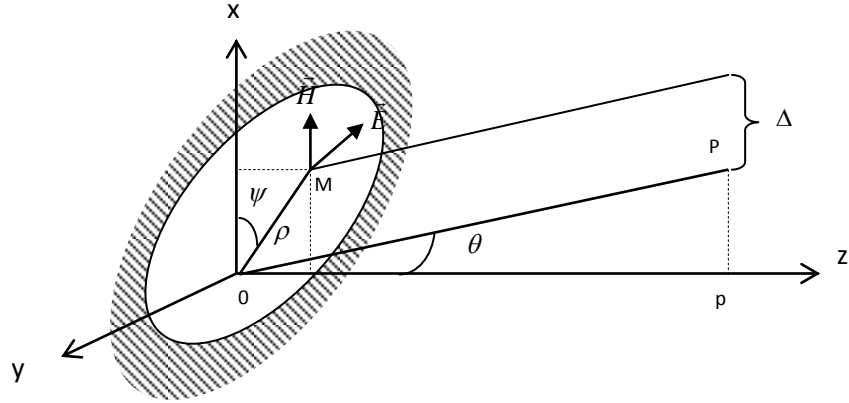


Fig.5.1 - Ouverture rayonnante circulaire.

cette expression devient dans le plan H ($\delta = \theta; \gamma = 0$) par exemple:

$$\vec{E}(\theta) = j \frac{e^{-j\beta R}}{2\lambda R} \iint_S E_0 (1 + \cos \theta) e^{j\beta \rho \cos \psi \sin \theta} \rho.d\rho.d\psi$$

$$\vec{E}(\theta) = j \frac{e^{-j\beta R}}{2\lambda R} E_0 (1 + \cos \theta) \int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} e^{j(\beta \rho \sin \theta) \cos \psi} d\psi$$

Or on remarque que:

$$I = \int_0^{2\pi} e^{j(\beta \rho \sin \theta) \cos \psi} d\psi = 2\pi J_0(\beta \rho \sin \theta)$$

Si on applique une propriété des fonctions de BESSEL:

$$\int_0^1 h J_0(\alpha h) dh = \frac{J_1(\alpha)}{\alpha} \quad \begin{cases} \alpha = \beta a \sin \theta \\ d\rho = a.dh \end{cases}$$

et on utilise l'expression du rayon vecteur:

$$h = \frac{\rho}{a}$$

L'expression du champ devient:

$$\vec{E}(\theta) = j \frac{e^{-j\beta R}}{\lambda R} \pi a^2 (1 + \cos \theta) E_0 \frac{J_1(\beta a \sin \theta)}{\beta a \sin \theta}$$

Pour des ouvertures de rayon " a " bien supérieur à la longueur d'onde, le faisceau est concentré autour de l'axe $\vec{o\hat{z}}$ et l'angle θ faible.

$$\vec{E}(\theta) = j \frac{e^{-j\beta R}}{\lambda R} 2\pi a^2 E_0 \frac{J_1(\beta a \theta)}{\beta a \theta}$$

Et, en module:

$$|\vec{E}(\theta)| = \frac{2\pi a^2 E_0}{\lambda R} \left| \frac{J_1(\beta a \theta)}{\beta a \theta} \right|$$

D'où l'on tirera les caractéristiques principales du diagramme de rayonnement:

5.1.1. Direction du lobe principale:

la répartition sur l'ouverture étant équiphase, cette direction est obtenue pour $\theta = 0$,

valeur pour laquelle $\frac{J_1(0)}{0} \cong 0,5$

ce qui donne:

$$E(\theta = 0) = E_{\max} = \frac{\pi a^2 E_0}{\lambda R}$$

et par suite, la fonction caractéristique réduite s'écrit:

$$F(\theta) = \frac{|\vec{E}(\theta)|}{|\vec{E}_{\max}|} = 2 \left| \frac{J_1(\beta a \theta)}{\beta a \theta} \right|$$

5.1.2. Direction des minimums:

Le champ $E(\theta)$ s'annule pour les valeurs de $\beta a \theta$ qui annulent $J_1(\beta a \theta)$, la fonction de BESSEL d'ordre 1, soit: $\beta a \theta = 3,832; 7,015; 10,173;$

l'angle θ_1 du premier minimum s'écrira, en particulier: $\frac{2\pi a \theta_1}{\lambda} = 3,832, \Rightarrow \theta_1^\circ = 35 \frac{\lambda}{a}$

5.1.3. Direction des maximums des lobes secondaires:

Les maximums de rayonnement correspondent aux extremums de $\frac{J_1(\beta a \theta)}{\beta a \theta}$.

On pose : $\frac{J_1(\beta a \theta)}{\beta a \theta} = \frac{J_1(r)}{r}$

et les extremums seront définis par les valeurs telles que:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{J_1(r)}{r} \right] = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [J_1(r)] - \frac{1}{r^2} J_1(r) = 0$$

en appliquant une propriété des fonctions de BESSEL,

$$\frac{d}{dr} [J_1(r)] = \frac{J_1(r)}{r} - J_2(r)$$

la condition devient:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left[\frac{J_1(r)}{r} \right] &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [J_1(r)] - \frac{1}{r^2} J_1(r) = \frac{1}{r} \left[\frac{J_1(r)}{r} - J_2(r) \right] - \frac{1}{r^2} J_1(r) = -\frac{1}{r^2} J_2(r) = 0 \\ &\Rightarrow J_2(r) = 0 \end{aligned}$$

Ce qui se produit pour: $r = \beta a \theta_n = 0; \quad 5,136; \quad 8,417; \quad 11,620;$

On retrouve la direction $\theta = 0$ du lobe principal.

5.1.4. Largeur du lobe principal à $-3dB$.

La largeur $2\theta_0$ de l'ouverture du lobe à demi puissance est définie par la relation:

$$\frac{2J_1(\beta a \theta)}{\beta a \theta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{soit} \quad \beta a \theta_0 \cong 1,6$$

ce qui donne:

$$2\theta_0^\circ \cong 29,5 \frac{\lambda}{a}$$

5.2. Champ d'une ouverture circulaire à illumination non uniforme.

Comme dans le cas des ouvertures rectangulaires, l'utilisation d'illuminations décroissantes à partir du centre vers la périphérie, permet une atténuation des lobes secondaires.

Le type de distribution le plus utilisé, car il conduit à des calculs relativement simples, peut se représenter par:

$$F(\rho, \psi) e^{j\varphi(\rho, \psi)} = E_0 \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right)^p$$

- Quand $p = 0 \Rightarrow F(\rho, \psi) e^{j\varphi(\rho, \psi)} = E_0$; c'est une illumination uniforme.

- Quand p croît, la distribution s'atténue de plus en plus sur les bords de l'ouverture et se concentre autour de l'origine O.

- La figure 5.2 permet d'observer l'amélioration apportée par la distribution non uniforme en ce qui concerne les lobes secondaires avec cependant, le lobe principal qui a tendance à s'élargir.

Le calcul de l'intégrale dans l'expression du champ:

$$E(\theta) = j \frac{e^{-j\beta R}}{\lambda R} 2\pi E_0 \int_0^a \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right)^p \rho J_0(\beta \rho \sin \theta) d\rho$$

conduit à l'expression générale suivante:

$$E(\theta) = j \frac{e^{-j\beta R}}{\lambda R} 2\pi a^2 E_0 \frac{2^p p! J_{p+1}(\beta a \sin \theta)}{(\beta a \sin \theta)^{p+1}}$$

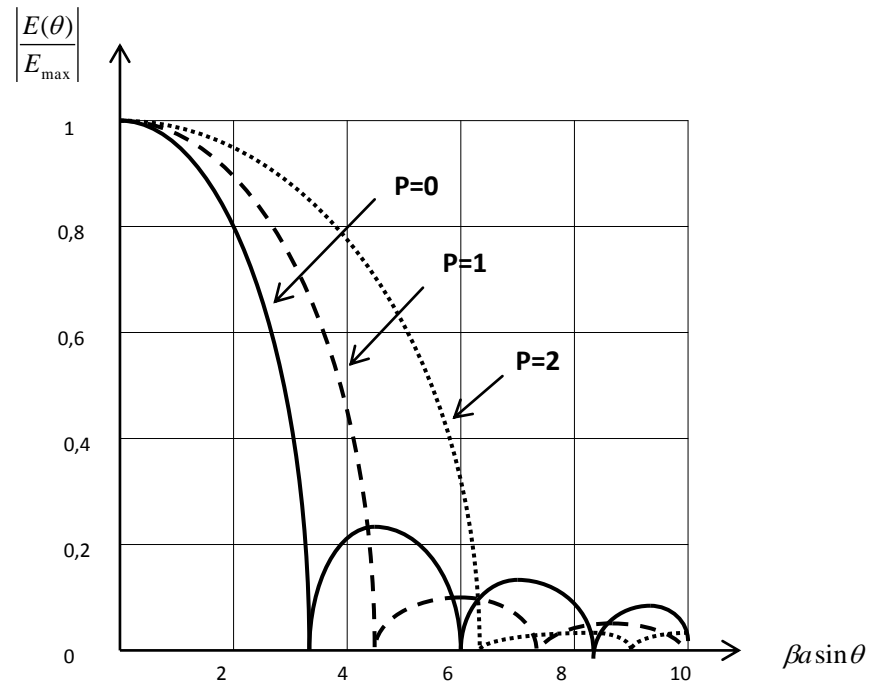


Fig.5.2 - Améliorations apportées par une distribution non uniforme.

6. ANTENNES PLANAIRES

Les communications hertziennes, les télécommunications spatiales et les radars utilisent le plus souvent des antennes à réflecteur. Ce sont des dispositifs performants qui possèdent un bon rendement, une grande pureté de polarisation et une large bande de fréquences. Dans le cas des applications mobiles, leur poids et leur encombrement deviennent deux inconvénients majeurs.

Bien avant d'être appliquée aux antennes micro ruban, dans les années soixante, la technologie dite de circuit imprimée avait été largement mise à contribution notamment dans le domaine de l'électronique. Cette technologie appliquée aux antennes micro ruban (ou antennes patch) présente un certain nombre d'avantages parmi lesquels :

- un faible coût de fabrication,
- elles sont légères et peu encombrantes,
- la possibilité de les imprimer sur des surfaces non-planes dans le cas de substrats souples,
- la possibilité de mise en réseaux pour améliorer la directivité et pour des applications de balayage électronique de l'espace,
- la possibilité de les intégrer dans des appareils électriques nomades,
- la polarisation de l'onde électromagnétique linéaire ou circulaire en ajustant la géométrie et l'excitation de l'élément rayonnant.

Malheureusement, ces antennes présentent également un certain nombre d'inconvénients qui peuvent limiter leur domaine d'applications. On peut noter :

- une bande passante limitée (de 1 à 5 %),
- un faible gain (de l'ordre de 5 dB),
- une pureté de polarisation difficile à obtenir,
- l'excitation possible d'ondes de surface dans le diélectrique,
- des puissances transportées faibles en comparaison aux antennes traditionnelles.

Dans sa version la plus simple, l'antenne micro ruban, ou antenne imprimée, représentée par la figure 6, est constituée d'une plaque de substrat entièrement métallisée d'un côté tandis qu'un film métallique de forme variable (ici carrée) et de dimensions ajustées est déposé sur son autre face. Ce dernier constitue l'élément rayonnant dont les dimensions et les caractéristiques du substrat sur lequel il est déposé fixent, entre autres, la fréquence de résonance. Le plan de masse métallique est suffisamment grand par rapport à l'élément rayonnant de façon à limiter les effets d'ondes de surface qui rayonnent sur les extrémités de la plaque.

En guise de substrat, on trouve des composites à bases de fibres de verre-téflon (polytétrafluoroéthylène $2 < \epsilon_r < 3$, $\tan \delta \approx 5 \cdot 10^{-3}$), du polypropylène ($\epsilon_r \approx 2,2$, $\tan \delta \approx 3 \cdot 10^{-4}$) mais également des mousses synthétiques contenant de nombreuses poches d'air ($\epsilon_r \approx 1,03$, $\tan \delta \approx 10^{-3}$).

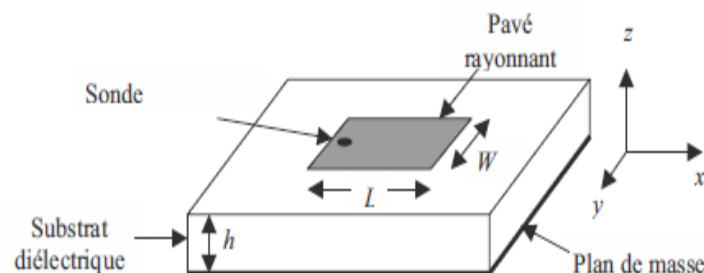


Figure 6. – Structure d'une antenne imprimée

Les dimensions typiques d'une antenne patch sont sa longueur L , sa largeur W et son épaisseur h .

D'un point de vue pratique, cette dernière est habituellement fine et bien inférieure à la longueur

d'onde de travail ($h \ll \lambda_0$), λ_0 représentant la longueur d'onde dans le vide

Une antenne imprimée peut être considérée comme une cavité résonnante ouverte constituée de

quatre murs latéraux magnétiques et de deux murs horizontaux électriques. Le rayonnement est

provoqué par la fuite du champ aux extrémités entre le patch métallique proprement dit et le plan

de masse. Le fonctionnement de l'antenne étant alors illustré à l'aide de deux fentes équivalentes

aux bords rayonnants et séparées par la distance L .

Dans sa configuration originale, le comportement de l'antenne est contrôlé à l'aide d'une sonde

de courant connectée entre le patch rayonnant et le plan de masse, ce qui va provoquer l'apparition

d'un champ électrique à l'intérieur de la cavité. Une condition de résonance qui permet de transférer une puissance maximale à l'antenne consiste à choisir la longueur L légèrement inférieure

à la demi-longueur d'onde guidée λ_g dans le diélectrique. Ce fonctionnement correspond

à l'excitation du mode fondamental (ou fréquence de résonance fondamentale) qui correspond à

la plus faible fréquence excitée.

Dans le cas d'une antenne de forme rectangulaire de dimensions L , W , les fréquences de résonances

d'un mode TM_{mn} dans la cavité sont données par la formule suivante :

Où c est la vitesse de la lumière dans le vide et ϵ_r , la permittivité du substrat.

Les conditions aux limites imposées par la nature de la cavité et le choix de la longueur L résonnante

vont imposer une répartition des composantes des champs électrique et magnétique à

l'intérieur de la cavité. Le champ électrique E_x est maximal et en opposition de phase de part et

d'autre des bords rayonnants et sa valeur est nulle au centre de la cavité, ce qui a pour conséquence

l'apparition d'un maximum de rayonnement selon la direction normale à l'antenne (figure 9.12).

En effet, les champs émis par les deux fentes équivalentes aux bords rayonnants étant, dans ce cas,

en phase. Le champ magnétique H_y est nul aux extrémités rayonnantes et, à l'inverse du champ

électrique, est maximal au centre de la cavité.

Leurs expressions simplifiées, car ne tenant pas compte en première approximation des effets de

bords, s'expriment de la façon suivante :

Une représentation simplifiée consiste à considérer l'antenne à l'aide d'un tronçon de ligne de

transmission d'impédance caractéristique Z_0 , de longueur L et chargé aux extrémités pour
afin
de tenir compte du rayonnement électromagnétique dû aux fentes équivalentes. Les
expressions
de la tension et du courant qui se répartissent le long de cette ligne peuvent s'écrire en
première

RAPPEL

1. OPERATEURS MATHEMATIQUES

1°/- Le gradient : $\overrightarrow{\text{grad}} \varphi$ ou $\vec{\nabla} \varphi$

Il transforme une **fonction scalaire** en une **fonction vectorielle**. Il représente la variation de cette grandeur dans une direction donnée.

$$\overrightarrow{\text{grad}} \varphi = \vec{\nabla} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}$$

2°/- La divergence : $\overrightarrow{\text{div}} \vec{a}$ ou $\vec{\nabla} \cdot \vec{a}$

Il transforme une **fonction vectorielle** en une **fonction scalaire**. La divergence d'un vecteur en un point de l'espace exprime la variation d ϕ du flux de ce vecteur par rapport à un volume élémentaire dv contenant ce point. Ce flux d ϕ traverse la surface fermée qui délimite ce volume.

$$\overrightarrow{\text{div}} \vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \lim_{dv \rightarrow 0} \frac{d\phi}{dv} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

3°/- Le rotationnel: $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}$ ou $\vec{\nabla} \wedge \vec{a}$

Il **conserve la nature vectorielle** d'une **fonction vectorielle**. Le rotationnel du vecteur \vec{a} , dans une direction donnée $d\vec{l}$ est la limite de la circulation de \vec{a} autour d'une surface ds normale à $d\vec{l}$ quand $ds \rightarrow 0$. Si (c) représente le contour de cette surface ds :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a} = \vec{\nabla} \wedge \vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

4°/- Le Laplacien scalaire.

$$\Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}$$

et en coordonnées cylindriques :

$$\Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2}$$

1.2. SYSTEMES DE COORDONNEES

1°/- Cylindriques :

- une hauteur, un rayon, un site : $(z, r, \theta) \Rightarrow dz, dr, r d\theta$.

2°/- Sphériques :

- un rayon, un site, un gisement : $(r, \theta, \varphi) \Rightarrow dr, r d\theta, r \sin \theta d\varphi$

3°/- Polaires :

- un rayon, un site : $(r, \theta) \Rightarrow dr, d\theta$

1.3. DEFINITION DES FORCES.

$$\text{Force de Lorentz : } \vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = q\vec{E} + q(\vec{v} \wedge \vec{B})$$

C'est la somme de deux forces s'exerçant sur une particule de charge "q" plongée dans un champ électromagnétique:

- une force indépendante de \vec{v} appelée force électrique (de Coulomb): $q \vec{E}$
- une force proportionnelle à \vec{v} appelée force magnétique ou force de Laplace : $q(\vec{v} \wedge \vec{B})$. C'est cette force qui est à l'origine des effets mécaniques que subissent les circuits placés dans une induction magnétiques.

2. EQUATIONS DE MAXWELL.

James Clerck Maxwell: Théoricien fondateur de l'électromagnétisme moderne, formula dans les années 1860, les célèbres équations qui portent son nom et qu'il publia en 1873 dans son **Traité sur l'électricité et le magnétisme**.

2.1. GRANDEURS ELECTRIQUES ET GRANDEURS MAGNETIQUES.

\vec{E} [V/m] : vecteur champ électrique.

\vec{D} [C/m²] = $\xi \vec{E}$: vecteur induction électrique (densité).

\vec{J} [A/m²] = $\sigma \vec{E}$: vecteur densité de courant.

ξ [F/m] : constante diélectrique ou permittivité

ρ [C/m³] : densité volumique de charges électriques.

σ [s/m] : conductivité.

\vec{H} [A/m] : vecteur champ magnétique.

\vec{B} [Wb/m² ou Tesla] = $\mu \vec{H}$: vecteur induction magnétique (densité).

μ [H/m] : perméabilité magnétique.

ξ , μ et σ sont des **constantes** à travers tout **milieu homogène** (variables en milieu non homogène).

ξ , μ et σ sont des **scalaires** à travers tout **milieu isotrope** (tenseurs ou vecteurs en milieu anisotrope).

Les équations de J.C.MAXWELL, qui développa en 1867 une théorie permettant de jeter **un pont entre l'électricité et l'optique**, sont groupées autour de quatre lois régissant le comportement du champ électrique et du champ magnétique :

2.2. PREMIERE LOI OU THEOREME D'AMPERE GENERALISE :

Un courant de **conduction** \vec{j}_c et/ou un courant de **déplacement** $\vec{j}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

provoquent autour d'eux un champ magnétique tel que:

$$\overrightarrow{rot} \vec{H} = \vec{j}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_c + \mu_0 \xi_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Ce théorème est la généralisation du théorème d'Ampère sous sa forme locale qui est le cas limite de la magnétostatique c'est à dire : $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_c$

Remarque:

✓ **Courant de conduction ou de convection :**

Dans un conducteur parfait ($\rho = 0; \sigma = \infty$) le courant est créé par le déplacement des électrons sous l'effet du champ \vec{E} d'où : $\vec{j}_c = \sigma \vec{E}$. (régime continu ou alternatif).

✓ **Courant de déplacement ou diélectrique :**

Dans un diélectrique parfait ($\rho = \infty; \sigma = 0$), les électrons ne peuvent sortir des molécules mais se déplacent à l'intérieur même; c'est un courant de déplacement créé par les variations du champ \vec{E} tel que : $\vec{j}_d = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. (régime alternatif)

! Dans un milieu dissipatif normal (semi-conducteur), en régime alternatif il y a les deux formes de courants.

2.3. DEUXIEME LOI OU LOI D'INDUCTION DE FARADAY :

Une densité de flux magnétique variable \vec{B} engendre un champ électrique variable \vec{E} tel que :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

C'est la relation fondamentale reliant, en régime variable, les deux composantes du champ électromagnétique.

2.4. TROISIEME LOI OU THEOREME DE GAUSS:

Le flux de l'induction électrique total \vec{D} possède une quantité de charge de densité volumique ρ telle que :

$$\text{div} \vec{D} = \rho$$

2.5. QUATRIEME LOI OU LOI DE CONSERVATION DU FLUX MAGNETIQUE :

La densité du flux magnétique est toujours à flux conservatif; autrement dit :

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

Ces quatre formules sont complétées par les relations traduisant les propriétés de la matière (milieu homogène, isotrope ou autre) ainsi que l'équation de conservation des charges qui dit que:

Le flux de charges à travers une surface fermée ds est égal à la diminution des charges dans le volume intérieur à la surface ds : Il n'y a **ni création ni destruction spontanée de charges**.

$$\text{div} \vec{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

2.6. CONDITIONS DE PASSAGE A LA SURFACE DE SEPARATION DE DEUX MILIEUX :

Les milieux sont notés 1 et 2, le vecteur unitaire normal \vec{n}_{12} est orienté du milieu 1 vers le milieu 2.

L'application des équations de Maxwell donne à la frontière des deux milieux :

$$D_{n2} - D_{n1} = \sigma$$

$$B_{n2} = B_{n1}$$

$$E_{t1} = E_{t2}$$

$$\vec{H}_{t2} - \vec{H}_{t1} = \vec{J}_S \wedge \vec{n}_{12}$$

Équations auxquelles il convient d'ajouter la continuité du potentiel qui se déduit de la continuité de la composante tangentielle du champ électrique.

3. LES POTENTIELS RETARDES DE LORENTZ.

3.1. EQUATIONS AUX POTENTIELS.

Le système d'équations :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

Admet pour solutions générales les expressions de \vec{E} et \vec{H} tels que:

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{\text{rot}} \vec{A}$$

Qui sont exprimées en fonction des potentiels scalaire V et vecteur \vec{A} de LORENTZ définis comme étant la solution générale de l'équation de propagation (*) et (**).

En effet; si $\text{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B}$ est le rotationnel d'un vecteur \vec{A} tel que:

$$\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$$

donc:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\text{rot}} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \text{ or } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\text{rot}} \vec{E}$$

Ou:

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\vec{\text{rot}} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Ce qui donne:

$$\vec{\text{rot}} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Ce qui indique que $\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$ est un vecteur qui est le gradient d'un potentiel scalaire V. On peut donc écrire :

$$(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = -\overrightarrow{\text{grad}V} \quad (\text{a})$$

D'autre part, on sait que:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}$$

C'est à dire:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{rot} \vec{A}} \quad (\text{b}).$$

A partir des équations de Maxwell, on peut démontrer que :

$$\overrightarrow{\text{rot} \vec{B}} = \overrightarrow{\text{rot}(\overrightarrow{\text{rot} \vec{A}})} = \overrightarrow{\text{grad}(\text{div} \vec{A})} - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j} + \xi_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (-\overrightarrow{\text{grad}V} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t})$$

Soit en réarrangeant, et en permutant les dérivées par rapport au temps et aux coordonnées d'espace :

$$\Delta \vec{A} - \xi_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} + \overrightarrow{\text{grad}} \left[\text{div} \vec{A} + \xi_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right]$$

D'un autre côté, de la dernière équation de Maxwell il vient :

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\xi_0} = \text{div} \left[-\overrightarrow{\text{grad}V} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right]$$

En ajoutant aux deux membres le terme $\xi_0 \mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$, on fait apparaître une analogie avec l'équation précédente:

$$\Delta V - \xi_0 \mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\xi_0} - \frac{\partial}{\partial t} \left[\text{div} \vec{A} + \xi_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right]$$

Nous voyons que la condition liant les deux potentiels et exprimée par la jauge de LORENTZ :

$$\left[\text{div} \vec{A} + \xi_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right] = 0$$

apportera une simplification considérable, d'où :

$$\Delta \vec{A} - \xi_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} \quad (*)$$

$$\Delta V - \xi_0 \mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\xi_0} \quad (**)$$

Ce couple d'équations représente les équations de propagation des potentiels qui justifient la relation entre ξ_0, μ_0 . Les solutions générales sont les **potentiel vecteur** \vec{A} et **potentielscalaire** V définis comme étant les **potentiels retardés de LORENTZ**.

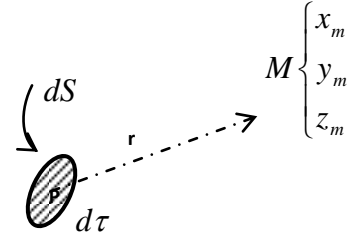
3.2.POTENTIELS RETARDES DE LORENTZ.

Considérons un élément rayonnant de volume $d\tau$ dans lequel existent une distribution (ou densité) de charges définie par la fonction $\rho(t)$ et une distribution de courant définie par le vecteur $\vec{j}(t)$, variant l'un et l'autre avec le temps "t" et avec les coordonnées $x_p; y_p; z_p$ du "point source", en restant confinées dans le **volume** $d\tau$ limité par une **surface fermée ds**

Soit v le potentiel scalaire résultant de $d\tau$ en un point M de l'espace situé à une distance "r" et définis par ses coordonnées $x_m; y_m; z_m$

Le Laplacien de v s'écrira, en fonction de "r" :

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r v}{\partial r^2}$$



A partir de l'équation (**) et en utilisant l'expression $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ on obtient, après multiplication par "r":

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 r v}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\rho}{\epsilon} = 0$$

A l'extérieur de l'élément $d\tau$, particulièrement au point M, $\rho(t) = 0$; d'où :

$$\frac{\partial^2 r v}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 r v}{\partial t^2} = 0 \quad (***)$$

C'est l'équation des ondes ou des cordes vibrantes qui admet pour intégrale générale la somme de deux ondes; l'une incidente et l'autre réfléchie telle que :

$$r v = f\left(t - \frac{r}{c}\right) + g\left(t + \frac{r}{c}\right)$$

où f et g sont deux fonctions arbitraires définies par la physique

$g\left(t + \frac{r}{c}\right)$ correspond à l'onde réfléchie qui n'existe pas dans notre cas puisque la propagation se fait à partir de la source vers l'infini. On retiendra donc la solution:

$$v = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

Pour trouver la fonction f , d'après les considérations de la physique, il faut se rapprocher **des conditions de l'électrostatique**. On va donc supposer que :

• Quand T , la période du phénomène $\rightarrow \infty$, c'est à dire quand le temps $t = \frac{r}{c}$, qui traduit le temps de propagation le long de la distance "r" à la vitesse c , devient très petit devant T ; on tend alors vers les conditions de l'électrostatique et $v \rightarrow v_s = \text{potentiel}$

électrostatique donné par l'équation de **POISSON** qui permet d'exprimer un potentiel scalaire produit par une charge "q" à une distance "r" (solution de l'équation de Poisson $\Delta v + \frac{\rho}{\epsilon} = 0$ à laquelle s'identifie(***) :

$$v \rightarrow v_s = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

$$v = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(t - \frac{r}{c}) d\tau}{r}$$

Puisque le calcul du potentiel se faisant à un instant **retardé** c'est à dire à l'instant $(t - \frac{r}{c})$. En intégrant sur la totalité du volume où se trouvent les charges, et si en plus de la densité **volumique** $\rho(t)$, il existait une densité de charges **surfactive** $\sigma(t)$, l'expression du potentiel scalaire produit par la source au point M sera :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \frac{\rho(t - \frac{r}{c})}{r} d\tau + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_s \frac{\sigma(t - \frac{r}{c})}{r} ds \quad (1)$$

Le même procédé peut être utilisé pour l'intégration de :

$$\Delta \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} \quad (*)$$

pour obtenir \vec{A} le potentiel vecteur retardé de LORENTZ :

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(t - \frac{r}{c})}{r} d\tau \quad (2)$$

(1) et (2) permettrons le calcul de :

- \vec{E} , champ électrique engendré par des **charges** réparties en volume (densité volumique ρ) et/ou en surface (densité surfactive σ).

- \vec{H} , champ magnétique engendré par la **circulation du courant** créant une induction magnétique "exprimable" en flux mais en volume uniquement.