Solution de l'Examen Final en Communications Numériques 1 (CN1)

Première année Master Télécom -- Dimanche 25 Mai 2014 à 13H00/ Salle G4

Partie 1 : Questions de cours (6 pts)

1. Le codage de source : (1 pt)

a) Contient une compression : ☐ Vrai ☐ faux ☑ pas toujours vrai

b) Optimise la longueur des paquets à transmettre après codage de canal: ☐ Vrai ☑ faux ☐ pas toujours vrai

c) Minimise la complexité du message de la source analogique : ☐ Vrai ☑ faux ☐ pas toujours vrai

d) Permet de réduire la complexité et le coût de transmission : ☑ Vrai ☐ faux ☐ pas toujours vrai

2. Les pertes d'informations suite au codage de source sont dues principalement à : (0.5 pt)

L'échantillonnage ☐ La quantification ☑ La fiabilité du capteur utilisé ☐

3. Compléter le tableau ci-dessous par les valeurs suivantes avec justification: (1 pt)
16 bits, 8 KHz, 44.1 KHz, 8 bits

Qualité du service	Bande	Echantillonnage	Quantification
HiFi	[20 Hz, 20 KHz]	**44.1 KHz**	**16 bits**
Téléphone grand public	[300 Hz, 3400 Hz]	**8 KHZ**	**8 bits**

Théorème de Shannon : La fréquence d'échantillonnage est au moins égale à 2 f_{max}. En pratique, on ajoute une certaine marge, soit : $f_{e,Téléphone} \geq 2\times$ 3400 Hz et $f_{e,HiFi} \geq 2\times$ 20 KHz.
L'erreur due à la quantification diminue en augmentant le nombre de bits B utilisés pour la quantification et donc la qualité du son numérisé s'améliore considérablement lorsque B croît. Par conséquent, le HiFi utilise 16 bits de quantification pour assurer sa haute qualité du son produit.

4. Le débit d'un canal de communication numérique dépend fortement de deux paramètres qui sont : (0.5 pt)

1) Le rapport signal sur bruit (RSB)=puissance du signal/puissance du bruit
2) La largeur de bande B en Hz.

5. Quelle est la limite de détection et de correction d'un code de Hamming non-systématique (0.5 pt)

Que se soit en version systématique ou non-systématique, le codage de Hamming est caractérisé par une distance de Hamming d=3. Puisqu'il s'agit d'un code linéaire, la limite de détection d'erreurs est égale à d-1=2 bits tandis que la limite de correction est égale à la partie entière de (d-1)/2 soit 1 bit.

6. Un signal numérique est défini comme suit : $x(0)=0$; $x(T_e)=3$, $x(2T_e)=-1$, $x(3T_e)=-3$, $x(4T_e)=3$.
Donner l'expression mathématique de $x(n)$. **(1 pt)**

En utilisant le symbole de Kronecker, $x(n)$ s'écrit : $x(n)=3\,\delta(n-1)-\delta(n-2)-3\,\delta(n-3)+3\,\delta(n-4)$

7. Quel est le rôle du filtre de mise en forme? (0.5 pt)

Son rôle est de produire des impulsions analogiques qui peuvent etre transmises à travers le canal de communication après que les symboles sont créés (c à d après codage de source et codage de canal).

8. Pourquoi considérons-nous en pratique que le bruit au niveau du récepteur est Gaussien ?(0.5 pt)

Cette conséquence est directement reliée au théorème central limite (aussi appelé théorème de la limite centrale ou centrée) qui établit la convergence en loi de la somme d'une suite de variables aléatoires vers la loi normale. Intuitivement, ce résultat affirme que toute somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées tend vers une variable aléatoire gaussienne. Ceci est toujours vérifié en pratique du fait que le bruit au niveau du récepteur provient de plusieurs sources aléatoires indépendantes dont leur contribution tend vers une distribution gaussienne.

9. Quand est-ce nous disons qu'un code *C* est linéaire ? (0.5 pt)

Un codage est dit linéaire quand le code C vérifie : C(u1+u2+….+up)=C(u1)+C(u2)+…+C(up), $\forall$ $p\geq 1$.

Partie 2 : Exercices divers (14 pts)

Exercice 1 : Code de Hamming systématique (7,4) (4 pts)

Lors d'un transfert de données, vous recevez les messages suivants codés grâce au code Hamming(7,4) (version systématique).

a. Une erreur unique a été insérée dans chaque message reçu. Corrigez les quatre messages suivants en utilisant la méthode de syndrome.

0100111
0001010
0100100

Rep. : Le code de Hamming est un code parfait lorsqu'il s'agit d'une seule erreur, c à d, il peut détecter et corriger une erreur unique quelque soit sa position. **(0.5 pt)**

En utilisant la méthode de syndrome, on peut, dans ce cas, localiser la position de l'erreur :

$$s=R.H^T$$

Avec

$$G=(I_k \mid P),\ [I_k]=k\times k,\ [P]=k\times r;\ r=n-k$$

$$H=G^T=(P^T \mid I_r),\ [P^T]=r\times k, [I_r]=r\times r;\ r=n-k$$

$$H^T=\begin{pmatrix} P \\ -- \\ I_r \end{pmatrix},\ [P]=k\times r,\ \ [I_r]=r\times r;\ \ r=n-k$$

(0.5 pt)

A.N:

$$P=\begin{pmatrix} 1&1&1 \\ 1&1&0 \\ 1&0&1 \\ 0&1&1 \end{pmatrix} \quad G=\begin{pmatrix} 1&0&0&0&1&1&1 \\ 0&1&0&0&1&1&0 \\ 0&0&1&0&1&0&1 \\ 0&0&0&1&0&1&1 \end{pmatrix} \quad H=\begin{pmatrix} 1&1&1&0&1&0&0 \\ 1&1&0&1&0&1&0 \\ 1&0&1&1&0&0&1 \end{pmatrix} \quad H^T=\begin{pmatrix} 1&1&1 \\ 1&1&0 \\ 1&0&1 \\ 0&1&1 \\ 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}$$

On trouve :

$$s_1=(0100111).H^T=(001)$$

Il existe une erreur dans le premier bit (position 1) → $R_{\text{corrigé}}$=(010011<u>0</u>) **(0.5 pt)**

$$s_2=(0001010).H^T=(001)$$

Il existe une erreur dans le premier bit (position 1) → $R_{\text{corrigé}}$=(000101<u>1</u>) **(0.5 pt)**

$$s_3=(0100100).H^T=(010)$$

Il existe une erreur dans le deuxième bit (position 2) → $R_{\text{corrigé}}$=(01001<u>1</u>0) **(0.5 pt)**

b. Décoder le message suivant : **010011000010110010101**

Rep. : Le décodage du message reçu R permet de retrouver le message de source. Il faut donc découper R en paquets de longueur n=7 **(0.5 pt)**. Ceci donne :

0100110/0001011/0010101

Le message de source est sous forme de paquets de longueur k=4, soit:

0100**0001**0010 **(0.5 pt)**

c. Discuter la détection et la correction des erreurs de ce code.

Rep. : Le code de Hamming est caractérisé par une distance minimale d=3. Il peut alors détecter d-1=2 erreurs et corriger t=partie réelle((d-1)/2)=1 erreur. Par conséquent, ce code est parfait lorsqu'une erreur unique affecte le mot reçu. Si le nombre de bits erronés est égale à 2, le code de Hamming détecte qu'il y a une erreur sans qu'il puisse la corriger. S'il y a plus que deux erreurs, le codage de Hamming ne peut ni détecter ni corriger ces erreurs. **(0.5 pt)**

Exercice 2 : Code linéaire en bloc et correction (5 pts)

Soit le code linéaire systématique défini par la matrice génératrice :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Déterminer *n* et *k*.
Rep. : On sait que la matrice génératrice d'un code linéaire systématique s'écrit d'une façon générale sous la forme :

$$G=(I_k \mid P),\ [I_k]=k\times k,\ [P]=k\times r;\ r=n-k$$

On déduit que: k=4, $r=n-k$=3, donc: $n=k+r$=7, k=4 **(0.25 pt)**. Il s'agit d'un code (7,4) **(0.25 pt)**.

b. Donner tous les mots de code valides. En déduire la distance minimale du code.
Voir le tableau ci-dessous. On trouve que la distance minimale d=min(w)=3. **(1 pt)**
(2 pts sur le tableau)

N°	Message	Mot de code	Poids (w)
1	0000	0000 000	0
2	0001	0001 101	3
3	0010	0010 111	4
4	0011	0011 010	3
5	0100	0100 110	3
6	0101	0101 011	4
7	0110	0110 001	3
8	0111	0111 100	4
9	1000	1000 011	3
10	1001	1001 110	4
11	1010	1010 100	3
12	1011	1011 001	4
13	1100	1100 101	4
14	1101	1101 000	3
15	1110	1110 010	4
16	1111	1111 111	7

c. Coder le message suivant : 10011101.
Le message se compose de k=4 bits. Il faut donc le découper en paquets de 4 bits. Ceci donne :

1001/1101 **(0.25 pt)**

D'après le tableau des mots de code valides de la question (b), on trouve le codage suivant :

1001110**1101000** **(0.25 pt)**

d. Vérifier si les messages suivants sont corrects : 1111100, 0111000, 1110101 et 1111101.
D'après le tableau, on trouve que les quatre messages sont erronés puisqu'ils ne correspondent pas à des mots de code valides **(0.5 pt)**.

e. Corriger les messages 0100101 et 1100001
La correction se base sur le calcul de la distance entre le message reçu et les mots de code valides. Cette distance doit être minimisée **(0.25 pt)**. Ceci donne les corrections suivantes :

1100101 et 1100**1**01 **(0.25 pt)**

Exercice 3 : Code de Hamming non-systématique (7,4) (3.5 pts)

a. On souhaite envoyer le message 1010. Ecrire le mot de Hamming non-systématique correspondant.

La forme générale du mot de code de Hamming est donnée comme suit :

7	6	5	4	3	2	1

D_3	D_2	D_1	C_2	D_0	C_1	C_0

On a alors : $(D_3\ D_2\ D_1\ D_0)$=(1010) ; ce qui donne :

1	0	1	C_2	0	C_1	C_0

(0.25 pt)

Avec : C_0=3+5+7 et sa position est $2^0=1$ **(0.25 pt)**
C_1=3+6+7 et sa position est $2^1=2$ **(0.25 pt)**
C_2=5+6+7 et sa position est $2^2=4$ **(0.25 pt)**

Par conséquent, le mot de code est :

1	0	1	**0**	0	**1**	**0**

(0.25 pt)

b. Y a-t-il une erreur dans le mot de Hamming suivant : 1010110
Discuter la correction de l'erreur si elle existe.

Rep. : Structure générale pour détection des erreurs :
Trouver la combinaison $C'_2\ C'_1\ C'_0$

7	6	5	4	3	2	1
1	0	1	0	1	1	0

Avec C'_0=1+3+5+7=0+1+1+1=1 **(0.25 pt)**
C'_1=2+3+6+7=1+1+0+1=1 **(0.25 pt)**
C'_2=4+5+6+7=0+1+0+1=0 **(0.25 pt)**
$C'_2\ C'_1\ C'_0=011\neq 000$ donc il existe des erreurs.

Pour la correction, puisqu'il s'agit d'un code de Hamming, la correction est parfaite s'il s'agit d'une seule erreur (position $(011)_{10}=3$) **(0.25 pt)**. Le mot corrigé est dans ce cas : 1010**0**10 **(0.25 pt)**. Autrement, l'erreur est détectée mais ne sera pas corrigée **(0.25 pt)**.

c. Donner une matrice génératrice *G* de ce code.

D'après la question (a) on a :

$C_0=D_0+D_1+D_3$ $C_1=D_0+D_2+D_3$ $C2=D_1+D_2+D_3$ **(0.25 pt)**

Le mot de code non-systématique ($v_6\ v_5\ v_4\ v_3\ v_2\ v_1\ v_0$) est donc exprimé comme suit :

$v_6=D_3$; $v_5=D_2$; $v_4=D_1$; $v_3=D_1+D_2+D_3$; $v_2=D_0$; $v_1=D_0+D_2+D_3$; $v_3=D_0+D_1+D_3$ **(0.25 pt)**

D'où :

$$G=\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&1&1\\0&1&0&1&0&1&0\\0&0&1&1&0&0&1\\0&0&0&0&1&1&1\end{pmatrix}$$

(0.25 pt)

Exercice 4 : Code par répétition (7,4) (1.5 pts)

On considère un code correcteur d'erreur $C(n,k)$ pour lequel $k = 2$ et n est un entier pair tel que $n \geq 6$, et dont les mots de codes y sont obtenus à partir des mots d'informations u = (u1, u2) en les répétant (n/2- 1) fois. En d'autres termes, le mot de code obtenu à partir de u = (u1, u2) où (u1, u2) appartient à {0,1}2 s'écrit

$$v = (u1, u2, u1, u2, \ldots, u1, u2) \qquad (*)$$

Par exemple, si $n = 8$, le mot-code obtenu à partir de (1, 0) est (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0).

a. Donnez une matrice génératrice G de ce code $C(n,2)$ (où, pour rappel, n est un entier pair supérieur ou égal à 6).

$$G=\begin{pmatrix} 1\ 0 & \underbrace{\begin{matrix} 1\ 0 & 1\ 0 & 1\ 0 \ldots & 1\ 0 \\ 0\ 1 & 0\ 1 & 0\ 1 \ldots & 0\ 1 \end{matrix}}_{(n/2\ -1)\ \text{fois}} \\ 0\ 1 & \end{pmatrix}$$

(0.25 pt)

b. Donnez une matrice de contrôle H de ce code $C(n,2)$.

$H=G^T=(h_1\ h_2)$; $h_1=(1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0 \ldots 1\ 0)^T$; $h_2=(0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1 \ldots 0\ 1)^T$. **(0.25 pt)**

c. Quel est le nombre maximal q de bits erronés que ce code garantit de pouvoir toujours détecter ?
Il est clair que la distance de Hamming est égale à $n/2$ (qui correspond aux messages 01 et 10). Puisqu'il s'agit d'un code linéaire, le nombre maximal q de bits erronés que ce code garantit de pouvoir toujours détecter est égale à d-1=n/2 -1. **(0.5 pt)**

d. Quel est le nombre maximal de bits erronés que ce code peut corriger ?
Ce nombre est égale à t=partie réelle((d-1)/2)=partie réelle((n/2-1)/2). **(0.5 pt)**

Rappels : Matrice génératrice et matrice de contrôle d'un code linéaire systématique *C*(*n*, *k*)

k : nombre de bits du message sans codage (longueur du message après codage de source)
n : nombre de bits du message après codage de canal (longueur du mot de code)
$r=n-k$: nombre de bits de contrôle (ou de redondance)

$$G=(I_k \mid P),\ [I_k]=k\times k,\ [P]=k\times r;\ r=n-k$$

$$H=G^T=(P^T \mid I_r),\ [P^T]=r\times k, [I_r]=r\times r;\ r=n-k$$

$$H^T=\begin{pmatrix} P \\ -- \\ I_r \end{pmatrix},\ [P]=k\times r,\ [I_r]=r\times r;\ r=n-k$$