

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université Hassiba Benbouali de Chlef  
Faculté de Génie Civil et d'Architecture  
Département de Génie Civil

---

---

Polycopié de

# **RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX**

Réalisé par

Professeur  
Zamila HARICHANE

---

---

Mars 2015

# PRÉFACE

Dans la présent polycopié intitulé « *Polycopié de Résistance des Matériaux* », qui s'adresse aux étudiants de deuxième année *LMD* en Génie Civil et les élèves ingénieurs des écoles préparatoires, l'accent est mis sur le dimensionnement des éléments d'une structure soumis aux sollicitations simples de sorte à permettre à l'étudiant de dimensionner tous types d'éléments de structures isostatiques simples réalisés en bois, en acier ou en béton.

Il est rédigé de manière simplifiée et beaucoup d'exemples sont introduits après avoir donné des notions afin que l'étudiant puisse assimiler le contenu du cours et ait une vision claire de son application dans la vie courante. Des problèmes sont accompagnés de leurs solutions et à la fin de chaque chapitre des exercices sans solutions sont donnés pour que l'étudiant s'y entraîne.

Ce polycopié est divisé en six chapitres. Le contenu du premier chapitre concerne une introduction générale à la résistance des matériaux. Aux chapitres 2 et 3, l'étudiant se familiarise avec les notions de sollicitation simple, de diagramme d'efforts intérieurs, de section dangereuse, de contrainte et enfin de dimensionnement. Il s'agit de la traction (ou la compression) et le cisaillement pur, respectivement. Au chapitre 4, on introduit le calcul des caractéristiques géométriques d'une section plane. En effet, pour une sollicitation de traction ou compression simple, seule la donnée de l'aire de la section droite est nécessaire pour étudier ou vérifier la résistance d'une section d'une poutre par exemple. Tandis que pour tous les autres types de sollicitations, la forme et les dimensions de la section droite de la poutre jouent un rôle prépondérant sur le comportement aux différentes sollicitations de torsion ou de flexion.

Dans le chapitre 5, on aborde le dimensionnement des barres soumises à la torsion pure. Enfin, en 6<sup>ème</sup> chapitre, on dimensionne des poutres droites isostatiques sollicitées en flexion simples.

# TABLE DES MATIÈRES

## Chapitre 1

### Introductions et Généralités

	Page
1.1. Buts et hypothèses de la résistance des matériaux	2
1.1.1. Définitions	2
1.1.2. Hypothèses de la résistance des matériaux	4
1.1.2.1. Hypothèses sur le matériau	4
1.1.2.2. Hypothèses sur les déformations	5
1.1.2.3. Hypothèses de Navier-Bernoulli	5
1.1.2.4. Hypothèse de Barré de Saint-Venant	6
1.2. Classification des solides (poutre, plaque, coque)	6
1.2.1. Poutre	6
1.2.2. Plaque	7
1.2.3. Coque	7
1.3 Différents types de chargements	8
1.4. Types de liaisons en génie civil	10
1.4.1. Appui simple	10
1.4.2. Appui élastique	11
1.4.3. Articulation	12
1.4.4. Encastrement	12
1.5 Principe Général d'équilibre – Équations d'équilibres	14
1.5.1. Enoncé du principe	14
1.5.2. Utilisations pratiques	14
1.6 Principes de la coupe (ou isolement) – Éléments de réduction	15
1.7. Définitions et conventions de signes des efforts intérieurs	17
1.8. Conclusion	19
	20

## Chapitre 2

# **Traction et Compression Simples**

2.1. Introduction	24
2.2. Définitions	24
2.3. Contrainte normale	24
2.4. Diagramme de l'effort normal (DEN)	26
2.5. Courbe contrainte - déformation	27
2.6. Condition de résistance	28
2.7. Loi de déformation élastique	29
Exercices	33

## Chapitre 3

# **Cisaillement Pur**

3.1. Introduction	38
3.2. Définition	39
3.3. Contrainte de cisaillement	39
3.4. Déformation de cisaillement	40
3.5. Loi de HOOKE	41
3.6. Condition de résistance au cisaillement	42
3.7. Applications	42
3.7.1. Assemblage par rivets	42
3.7.2. Assemblage par boulons	48
Exercices	50

## Chapitre 4

### **Caractéristiques géométriques des sections planes**

4.1. Introduction	53
4.2. Aire d'une section	53
4.3. Moment statique	55
4.4. Centre de gravité	56
4.5. Moment d'inertie	59
4.5.1. Définition	59
4.5.2. Moment d'inertie polaire	61
4.6. Variations des moments d'inertie	62
4.6.1. Translation des axes	62
4.6.2. Rotation des axes	64
4.7. Module de résistance	67
4.8. Rayon de giration	68
4.8. Conclusion	69
Exercices	70

## Chapitre 5

### **Torsion**

5.1. Définition	74
5.2. Moment de torsion	74
5.2.1. Convention de signe	74
5.2.2. Diagramme du moment de torsion	75

5.3. Contraintes de cisaillement et angle de torsion	75
5.3.1. Hypothèses	75
5.3.2. Angle de torsion	76
5.3.3. Contraintes de cisaillement	76
5.4. Dimensionnement à la torsion	78
5.4.1. Condition de résistance	78
5.4.2. Condition de rigidité	79
5.5. Torsion d'une barre à section transversale non circulaire	80
Exercices	82

## Chapitre 6

### **Flexion simple**

6.1. Système isostatique, système hyperstatique, mécanisme	86
6.2. Définition	86
6.3. Efforts tranchants, moments fléchissants	88
6.4. Diagrammes des Efforts tranchants et des moments fléchissants	89
6.5. Relation entre moment fléchissant et effort tranchant	91
6.6. Relation entre effort tranchant et chargement réparti	92
6.7. Déformée d'une poutre soumise à la flexion simple (flèche)	94
6.8. Calcul des contraintes	95
6.8.1. Cas de la flexion pure	95
6.8.2. Cas de la flexion simple	99
Exercices	109
Références Bibliographiques	112
Annexes	114

## CHAPITRE 1

---

# INTRODUCTION ET GÉNÉRALITÉS

---

## 1.1. Buts et hypothèses de la résistance des matériaux

### 1.1.1. Définitions

- **Résistance des matériaux**

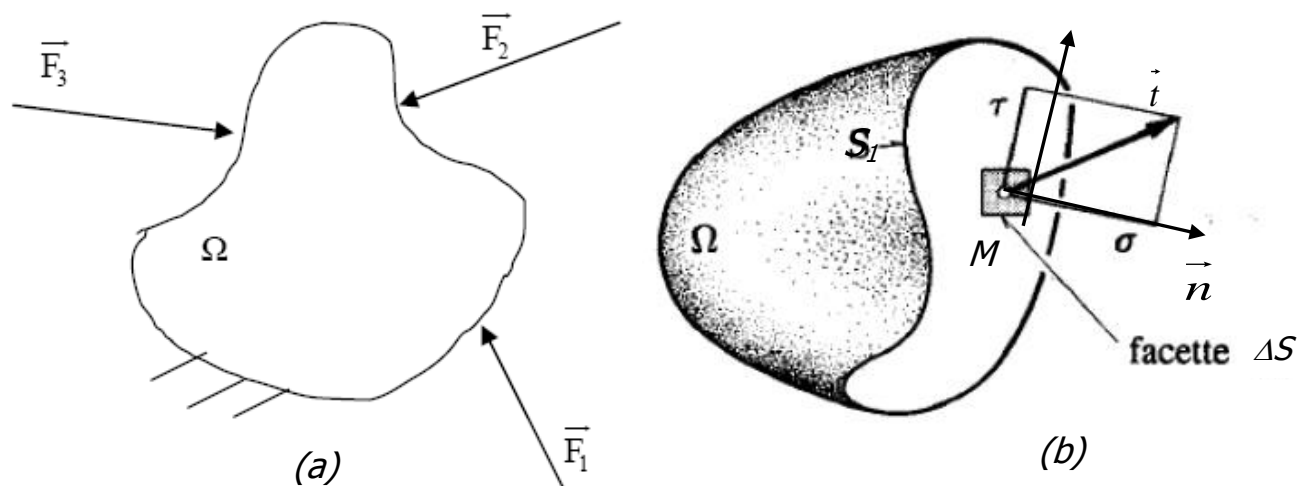
La résistance des matériaux (RDM) est une branche de la mécanique des milieux continus adaptée aux déformations des structures (machines en génie mécanique, ou bâtiment en génie civil). C'est une science expérimentale concernant les solides réels. Elle permet d'étudier dans les pièces mécaniques leur résistance, les actions mécaniques qui s'y exercent et leur déformation. Pour cela il est nécessaire au préalable de bien modéliser les différentes liaisons mécaniques possibles et les actions extérieures agissant sur le système.

La statique, quant à elle, est une branche de la mécanique qui étudie les conditions sous lesquelles un corps est en l'équilibre, compte tenu des efforts que son milieu extérieur exerce sur lui.

- **Notion de Contrainte**

Une contrainte est un effort par unité de surface qui s'exerce dans le matériau.

Soit un solide  $\Omega$  soumis à des forces (concentrées ou réparties) schématisé par la figure 1.1-a.



**Fig. 1.1-** Schématisation d'un solide chargé.

On coupe le solide  $\Omega$  en deux parties  $S_1$  et  $S_2$ . Considérons un point  $M$  entouré par une surface  $\Delta S$ . Le solide  $S_2$  exerce une action mécanique sur le solide  $S_1$   $\overrightarrow{\Delta F}_{S_2/S_1}$  que l'on peut modéliser par un effort réparti et on a:

$$\overrightarrow{\Delta F}_{S_2/S_1} = \overrightarrow{C}(M, \vec{n}) \Delta S \quad (1)$$

Le vecteur  $\overrightarrow{C}(M, \vec{n})$  est appelé vecteur contrainte au point  $M$  et de normale  $\vec{n}$  (où  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire normal à  $\Delta S$  sortant).

Le vecteur contrainte au point  $M$  relativement à l'élément de surface  $\Delta S$  orienté par sa normale extérieure  $\vec{x}$ , est défini par:

$$\overrightarrow{C}(M, \vec{x}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{\Delta f}}{\Delta S} = \frac{d\vec{f}}{dS} \quad (2)$$

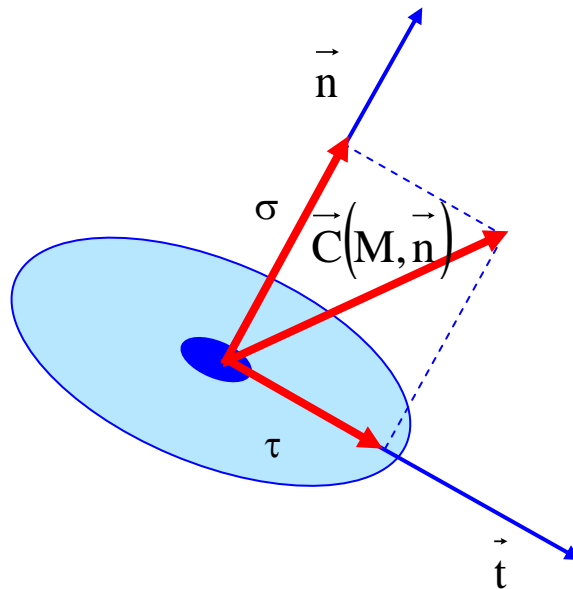


On peut décomposer le vecteur contrainte sur les vecteurs  $\vec{n}$  et  $\vec{t}$  ( $\vec{t}$  est un vecteur unitaire contenu dans le plan tangent à  $\Delta S$ ) (Figs. 1.1-b, 1.2) sous la forme:

$$\vec{C}(M, \vec{n}) = \sigma \vec{n} + \tau \vec{t} \quad (3)$$

- $\sigma$  est appelée la contrainte normale
- $\tau$  est appelée la contrainte tangentielle.

La contrainte normale et la contrainte tangentielle s'expriment en Pa (ou MPa).



**Fig. 1.2-** Décomposition du vecteur contrainte sur la normale  $\vec{n}$  et la tangente  $\vec{t}$ .

Expérimentalement, on définit pour chaque matériau une contrainte limite admissible, notée  $[\sigma]$ , au-delà de laquelle la pièce subit des détériorations de ses caractéristiques mécaniques, dimensionnelles, voire une rupture. Le calcul de résistance des matériaux consiste à vérifier que les contraintes engendrées par les sollicitations extérieures ne dépassent pas la contrainte limite admissible par le matériau  $[\sigma]$ .

- Une contrainte est un outil de calcul; on ne peut pas l'observer directement, par contre on peut observer ses effets: études des déformations par exemple.
- La contrainte étant le rapport d'une force par une surface, les paramètres qui influencent directement une contrainte sont les sollicitations et la section de la pièce.

### • Exemple 1.1

Calculer la contrainte due à un effort de 100 N appliqué perpendiculairement sur une surface de  $1\text{mm}^2$ .

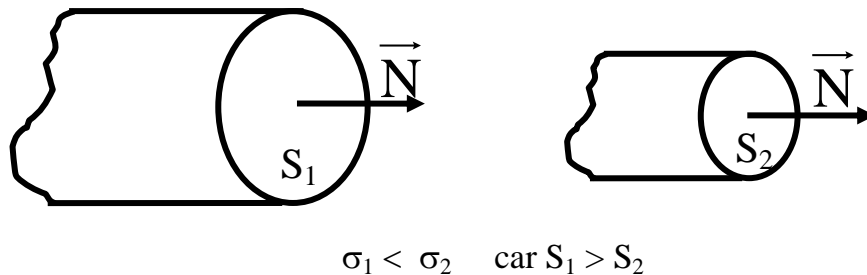
### • Solution de l'exemple 1.1

Notons cette contrainte par  $\sigma$ . Si l'effort est noté  $F$  et la surface  $S$ , alors:

$$\sigma = \frac{F}{S} = 100\text{N} / \text{mm}^2$$

- **Remarque**

La contrainte dépend de la valeur de la sollicitation et de la surface du solide. Pour une même sollicitation, la contrainte sera d'autant plus faible que la surface est grande et inversement (Fig. 1.3).



**Fig. 1.3-** Comparaison de contraintes.

- **Notion de déformation**

Tout solide soumis à un effort se déforme. Les déformations résultent et varient avec les charges appliquées sur les objets. Elles sont mises en évidence par la variation des dimensions, et peuvent être élastiques ou plastiques.

- La déformation est dite élastique si le solide reprend sa forme initiale après arrêt de l'action des forces (cas d'un ressort chargé normalement).
- La déformation est dite plastique si le solide reste déformé après arrêt de l'action des forces (cas d'une pâte à modeler).

Notons qu'aucun matériau n'est parfaitement élastique. Cependant, la déformation est généralement élastique pour les efforts suffisamment faibles, puis devient plastique à partir d'un certain seuil de contrainte  $\sigma_e$  appelé **limite élastique**.

- *La limite d'élasticité est une contrainte caractéristique du matériau. Elle ne dépend ni des dimensions de la pièce ni des sollicitations qui lui sont appliquées.*

Dans le cours de la résistance des matériaux, nous nous intéresserons exclusivement aux matériaux élastiques. Ceci veut dire que nous supposerons toujours que les sollicitations auxquelles sont soumises les structures étudiées sont suffisamment faibles pour que les déformations soient élastiques.

## 1.1.2. Hypothèses de la résistance des matériaux

### 1.1.2.1. Hypothèses sur le matériau

- **Continuité**

La matière est supposée continue, c-à-d que les distances entre les molécules sont toujours très petites; à l'échelle de la RDM, alors la matière apparaît continue.

- **Homogénéité**

On admettra que tous les éléments du matériau, aussi petits soient-ils, ont une structure identique. Ses propriétés sont identiques en chaque point.

- **Isotropie**

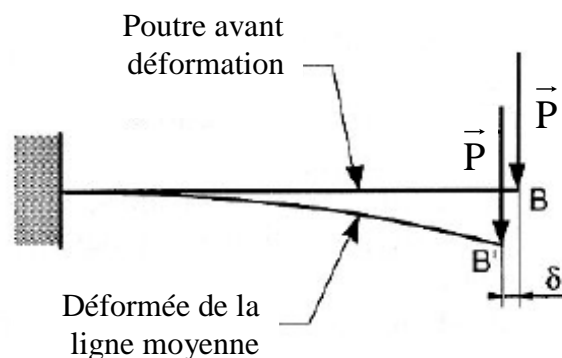
On admettra, qu'en tous les points et dans toutes les directions autour de ces points, les matériaux possèdent les mêmes propriétés mécaniques.

### 1.1.2.2. Hypothèses sur les déformations

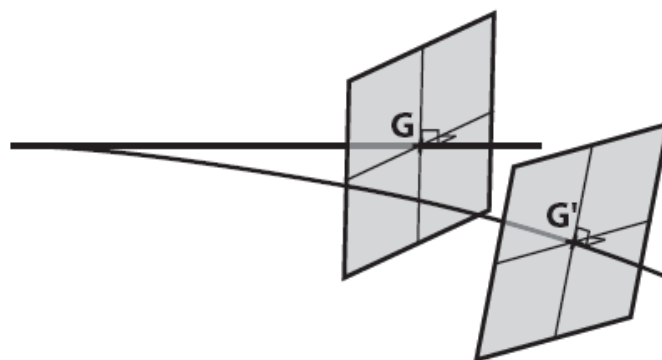
On fera l'hypothèse que les déformations sont petites par rapport à toutes les dimensions de l'élément (poutre, par exemple). Ainsi, on assimilera la géométrie en configuration déformée à la géométrie en configuration non déformée (Fig. 1.4). Les efforts sont donc considérés invariants en dépit de la déformation des poutres.

### 1.1.2.3. Hypothèses de Navier-Bernoulli

- Les sections planes, normales aux fibres avant déformation restent planes et normales aux fibres après déformation.
- Les sections droites normales à la fibre neutre restent donc perpendiculaires à la fibre neutre après déformation. Si l'on connaît la déformée de la fibre neutre, on peut donc en déduire le déplacement de n'importe quel point de la poutre. Dans la suite, on ne représentera donc que la fibre neutre pour représenter une poutre (Fig. 1.5).



**Fig. 1.4-** Poutre droite déformée.

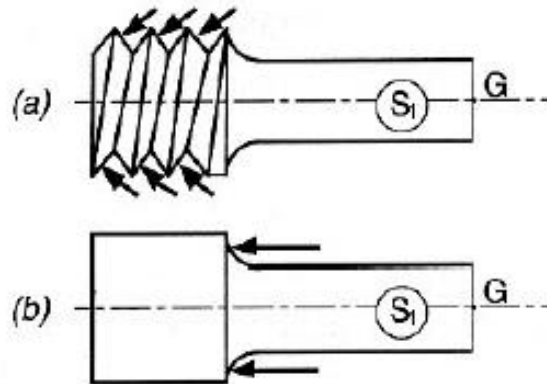


**Fig. 1.5-** Schématisation de l'hypothèse de Navier - Bernoulli.

#### 1.1.2.4. Hypothèse de Barré de Saint-Venant

On fera l'hypothèse que les résultats de calculs seront valables loin des points d'application des charges.

L'état des sollicitations dans une région suffisamment éloignée des points d'application des charges extérieures appliquées à la poutre ne dépend donc que du torseur associé à ces charges (Fig. 1.6).



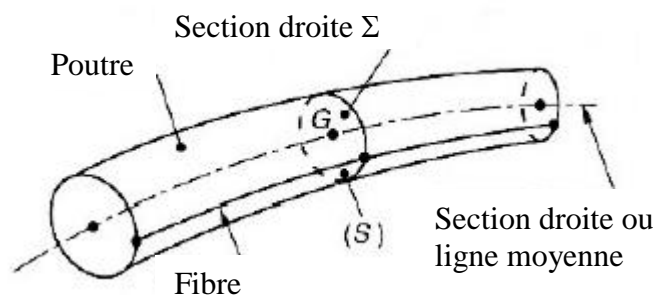
**Fig. 1.6-** Schématisation de l'hypothèse de Barré de Saint-Venant.

### 1.2. Classification des solides (poutre, plaque, coque)

#### 1.2.1. Poutre

Une poutre est un solide engendré par une surface plane ( $\Sigma$ ) dont le centre  $G$  décrit une courbe appelée ligne moyenne. Le rayon de courbure de la ligne moyenne est grand par rapport aux dimensions de la section droite ( $\Sigma$ ).

- La section droite ( $\Sigma$ ) de centre de surface  $G$  varie progressivement (Fig. 1.7) ou est constante (Fig. 1.8).
- La poutre a une grande longueur par rapport aux dimensions transversales.
- La poutre possède un plan de symétrie.
- Les points disposés de façon identique sur les sections droites constituent des lignes appelées fibres (Fig. 1.7).
- La ligne moyenne est aussi appelée fibre neutre.
- Lorsque la ligne moyenne est une droite, alors la poutre est appelée poutre droite (Fig. 1.8).
- Les sections droites des poutres étudiées ont un plan de symétrie et qu'elles sont chargées dans ce plan.



**Fig. 1.7-** Modèle de poutre.

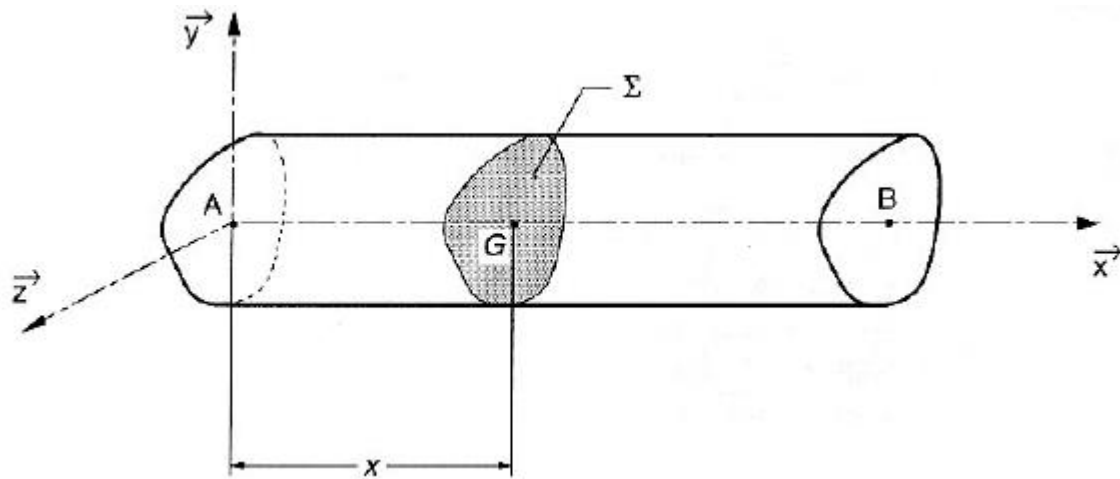


Fig. 1.8- Poutre droite.

### 1.2.2. Plaque

Une plaque est un élément prismatique d'épaisseur  $h$  petite devant les deux autres directions de l'espace (Fig. 1.9). Le plan moyen sera le plan  $(O, x, y)$ , le déplacement transverse étant la direction  $z$ . On suppose que l'hypothèse des petits déplacements vérifiée.

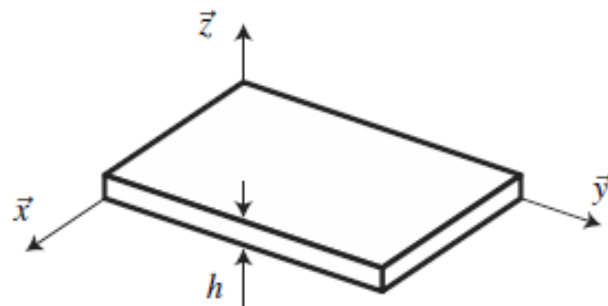


Fig. 1.9- Plaque.

### 1.2.3. Coque

Une coque est un solide délimité par deux surfaces proches et approximativement parallèles. Elle est soit fermée sur elle-même, soit délimitée en outre par une surface périphérique (le bord) qui joint les deux surfaces principales.

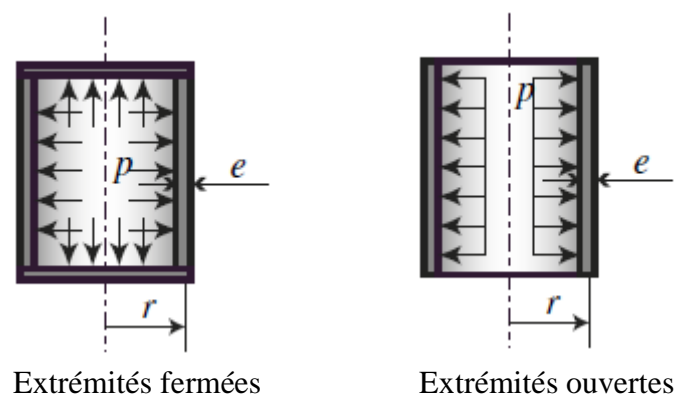


Fig. 1.10- Coques.

### 1.3 Différents types de chargements

Les chargements peuvent être classifiés de différentes manières. On distingue deux types de chargements (ou actions mécaniques):

- les actions mécaniques de contact (liaisons de contact entre solides, pression,...);
- les actions mécaniques à distance (champ de pesanteur, force électromagnétique,... ).

Le premier type d'action est une action qui s'applique sur la surface du solide (action surfacique) tandis que le second s'exerce au niveau de son volume (action volumique).

On distingue aussi les actions extérieures et les actions intérieures à un système de solides.

- On appelle effort (ou action) extérieur appliqué à un système matériel isolé, toutes les actions mécaniques agissant sur ce système, dont l'origine est à l'extérieur du système. Ces actions sont : soit des actions mécaniques de contact ; soit des actions à distances (gravité).
- Les efforts intérieurs sont les efforts que s'exercent mutuellement les différentes parties du système isolé.

#### Remarque

La notion d'efforts extérieurs et intérieurs ne dépend que de la frontière du système isolé.

- **Modélisation des actions mécaniques**

L'analyse des actions mécaniques ne peut se faire qu'en utilisant des modèles pour représenter les actions et leurs effets sur le solide. On distingue principalement deux modèles pour représenter et étudier les actions mécaniques, le modèle local et le modèle global.

Le modèle local (Fig. 1.11) permet d'étudier l'action et son effet en tout point de la zone où elle s'exerce: étude des pressions de contact, contraintes dans les matériaux, déformation du solide, ...

Dans le modèle global (Fig. 1.12) on associe à l'action mécanique un torseur (dit Torseur d'Action Mécanique). Ce modèle fait disparaître l'effet local de l'action mais rend son utilisation pratique pour l'étude de l'équilibre ou de la dynamique.

Ces deux modèles, global et local, ne sont pas interchangeables; si on peut déterminer le torseur d'action mécanique à partir de la répartition locale des efforts, on ne peut faire le travail inverse sans faire des hypothèses sur la répartition.

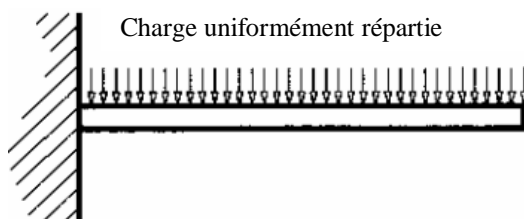


Fig. 1.11- Modèle local.

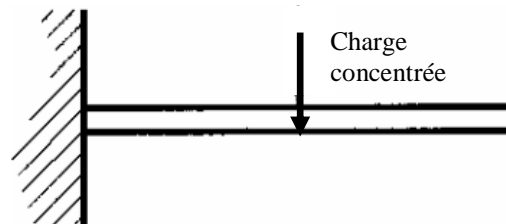


Fig. 1.12- Modèle global.

La charge uniformément répartie (Fig. 1.11) est remplacée par l'effort équivalent  $\vec{F}$  (Fig.1.12).

- **Définition du torseur**

La définition complète d'un effort (force) fait intervenir deux vecteurs :

- une force  $\vec{R}$  appelée résultante,
- un moment  $\vec{M}(\vec{R})_O$  en un point O quelconque, appelé moment.

Ces deux vecteurs, appelés **éléments de réduction**, peuvent être regroupés en une seule écriture dans un nouvel outil mathématique appelé « Torseur ».

On note  $\{\vec{\tau}\}$  un torseur quelconque et  $\{\vec{\tau}\}_O$  ses éléments de réduction au point O.

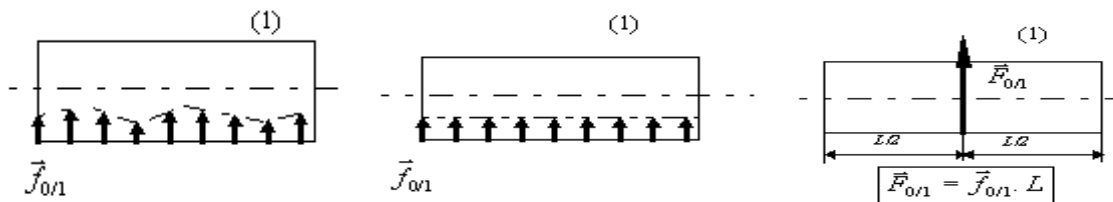
- **Exemple 1.2**

Considérons le cas d'un cylindre sur un plan. Modéliser l'action du plan sur le cylindre.

- **Solution de l'exemple 1.2**

L'action du plan sur le cylindre peut être représentée par une force linéique (force répartie le long d'une ligne)  $\vec{f}_{0/1}$ . Elle se mesure en (N/m).

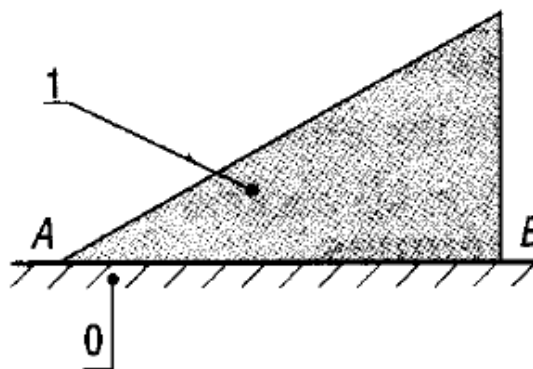
Si la charge est uniforme, alors l'ensemble de la charge linéique est équivalent à une force  $\vec{F}_{0/1}$  située au centre de la ligne de contact.



- **Exemple 1.3**

On voudrait modéliser l'action d'un plan horizontal (0) sur un prisme triangulaire (1) (figure ci-dessous).

- Schématiser cette action par un modèle local puis un modèle global.

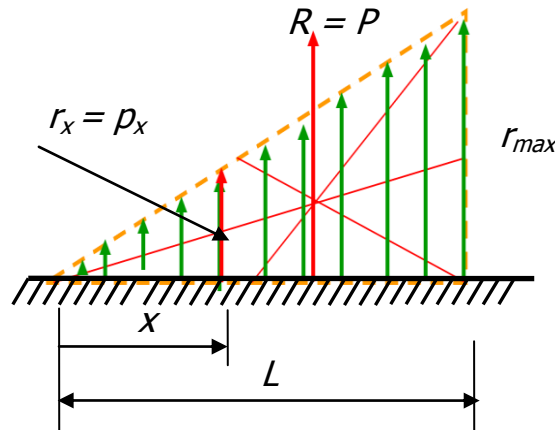


**Solution de l'exemple 1.3**

Le prisme agit sur le plan horizontal par son poids. Dans un modèle local le poids est modélisé par une force répartie. A chaque poids  $P_x$  correspond une force  $r_x$  qui représente la réaction du plan horizontal à ce poids à une abscisse  $x$  et qui a l'expression:

$$r_x = \frac{x}{L} r_{max}$$

comme montrée sur la figure suivante:



Dans un modèle global, la réaction du plan horizontal est représentée par la force  $R$  dont la valeur est égale au poids du prisme  $P$ .

#### 1.4. Types de liaisons en génie civil

Les actions extérieures (forces extérieures) s'appliquant sur les solides peuvent être connues ou inconnues. Parmi les efforts connus on retrouve les efforts modélisant, les actions du poids propre des éléments, les actions climatiques (vent, neige, houle) et les actions d'exploitation. Ces actions sont données par le cahier des charges d'utilisation du bâtiment: poids des machines, action des ponts roulants, utilisation des locaux, etc...

Les efforts inconnus sont développés par les liaisons du solide étudié avec les éléments de transfert des charges. Les liaisons servent à bloquer certains *degrés de liberté* (ddl) des solides. Nous effectuerons notre analyse dans le cadre du plan et du Génie Civil. Les liaisons, pour bloquer les déplacements, génèrent des efforts inconnus appelés *efforts de liaison* (appelés aussi *réactions*). On associera à la liaison un torseur d'efforts lié à ses caractéristiques cinématiques. Les mouvements élémentaires possibles dans le plan sont: deux translations ( $\Delta_x$  et  $\Delta_y$ ) ; une rotation:  $\Omega = \Omega_k$ .

Les principales liaisons du génie civil sont:

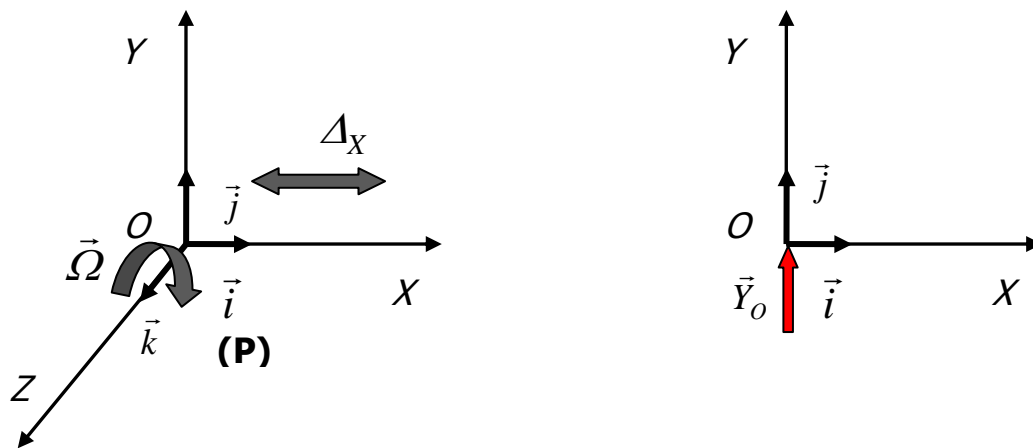
- L'appui simple: 1 DDL bloqué – (1 inconnue de liaison)
- L'appui élastique: 1DDL contrôlé – (1 inconnue de liaison et une loi de comportement)
- L'articulation: 2 DDL bloqués – (2 inconnues de liaison)
- L'encastrement: 3 DDL bloqués – (3 inconnues de liaison)

##### 1.4.1. Appui simple

L'appui simple bloque la translation dans la direction de l'appui, il permet une translation  $\Delta_x$  dans la direction perpendiculaire et une rotation  $\Omega$  autour de l'axe perpendiculaire au plan de la liaison.



La modélisation d'un appui simple est schématisée sur la figure 1.13.



**Fig. 1.13-** Schématisation d'un appui simple.

Le torseur au centre de la liaison s'écrit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_O = Y_O \vec{j} \\ \vec{M}_O = 0 \vec{k} \end{array} \right\}$$

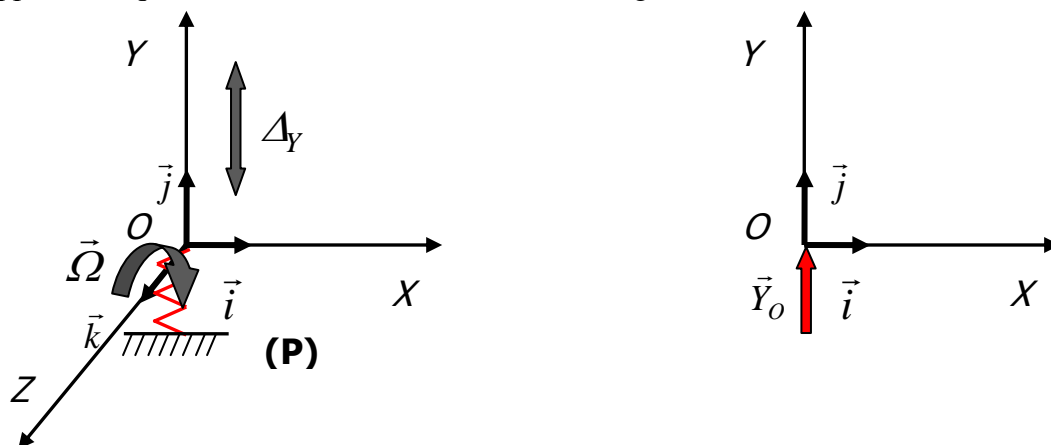
#### 1.4.2. Appui élastique

L'appui élastique contrôle une translation par la connaissance de la raideur de l'appareil d'appui. On a une relation de comportement de l'appui du type:

$$F = k\Delta_y$$

Il permet une translation contrôlée  $\Delta_y$ , peut permettre ou non une translation  $\Delta_x$  (appui glissant) et il permet une rotation  $\Omega$

L'appui élastique est modélisé comme le montre la figure 1.14.



**Fig. 1.14-** Schématisation d'un appui élastique.

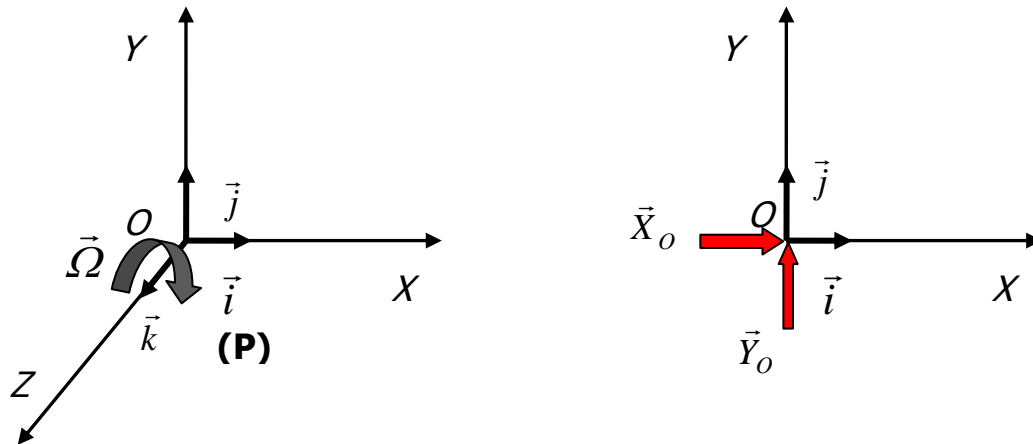
Le torseur au centre de la liaison s'écrit:

$$\{\vec{\tau}\}_O = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_O = Y_O \vec{j} = k \cdot \Delta_Y \cdot \vec{j} \\ \vec{M}_O = 0 \vec{k} \end{array} \right\}$$

### 1.4.3. Articulation

L'articulation permet de bloquer les deux translations possibles dans le plan. Elle permet donc une rotation libre  $\Omega$ .

L'articulation est modélisée comme le montre la figure 1.15.



**Fig. 1.15-** Schématisation d'une articulation.

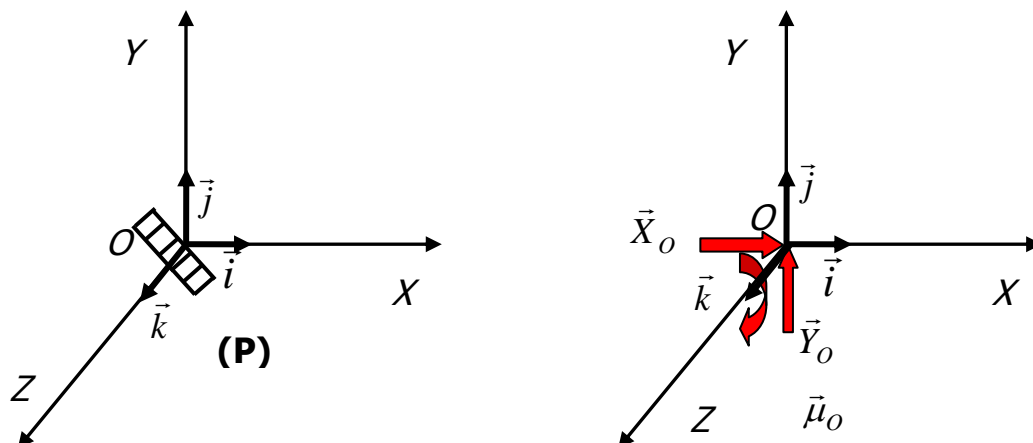
Le torseur au centre de la liaison s'écrit:

$$\{\vec{\tau}\}_O = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_O = X_O \vec{i} + Y_O \vec{j} \\ \vec{M}_O = 0 \vec{k} \end{array} \right\}$$

### 1.4.4. Encastrement

Cette liaison bloque les trois degrés de liberté possibles: deux translations élémentaires et une rotation.

L'encastrement est modélisé comme le montre la figure 1.16.



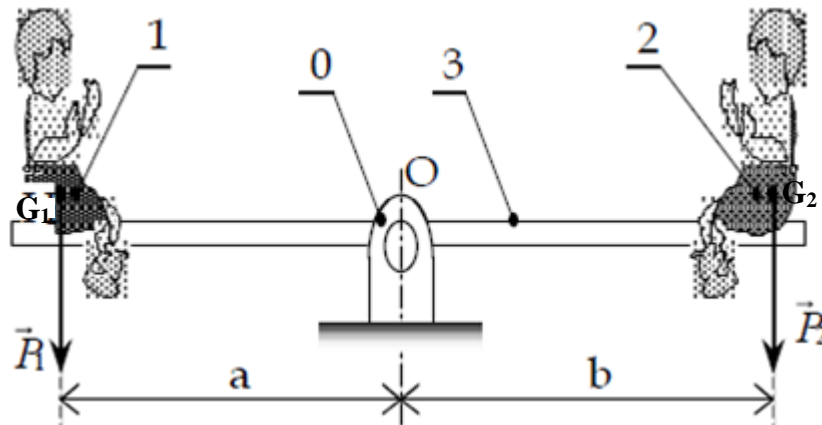
**Fig. 1.16-** Schématisation d'un encastrement.

Le torseur au centre de la liaison s'écrit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_O = X_O \vec{i} + Y_O \vec{j} \\ \vec{M}_O = \mu_O \vec{k} \end{array} \right\}_O$$

#### Exemple 1.4

Une balançoire 3 est articulée en O (liaison pivot) sur un socle fixe 0.  $P_1$  et  $P_2$  représentent les poids respectifs des deux enfants 1 et 2, appliqués respectivement en  $G_1$  et  $G_2$ .

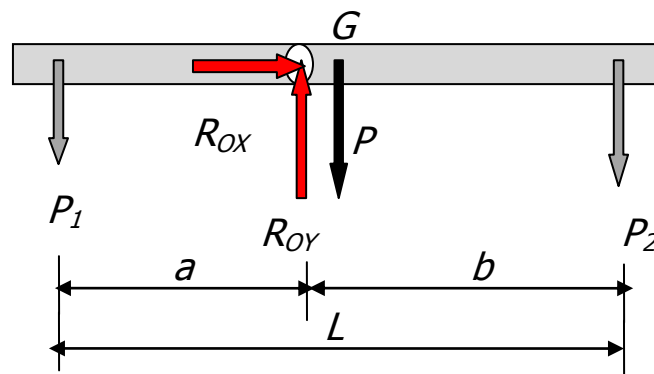


Schématiser toutes les actions s'exerçant sur la balançoire.

#### - Solution de l'exemple 1.4

Les actions s'exerçant sur la balançoire sont:




- Le poids de la balançoire
- Les poids des deux enfants
- L'action de liaison au point O



#### ❖ Récapitulation sur la modélisation des liaisons

Les différentes liaisons souvent réalisées en domaine du génie civil sont récapitulées sur le tableau 1.1.

Tableau 1.1- Modélisation des liaisons

Type de liaison	Modélisation	Inconnue de liaison
Appui simple (ou mobile)		1 inconnue $R_Y$ ↑
Appui double (ou fixe, ou articulation)		2 inconnues $R_Y$ ↑ $R_X$ →
Encastrement		3 inconnues $R_Y$ ↑ $R_X$ → $M$ ↻

## 1.5 Principe Général d'équilibre – Équations d'équilibres

### 1.5.1. Enoncé du principe

Soit un solide (S) soumis à un système de forces extérieures modélisé par le torseur  $\{\vec{F}_{ext}\}$   
 Soit  $\{\mathcal{R}\}$  le référentiel associé à (S); (S) est en équilibre si et seulement si:

$$\{\vec{F}_{ext}\} = (\vec{0})$$

### 1.5.2. Utilisations pratiques

L'égalité de deux torseurs entraîne l'égalité de leurs éléments de réduction.

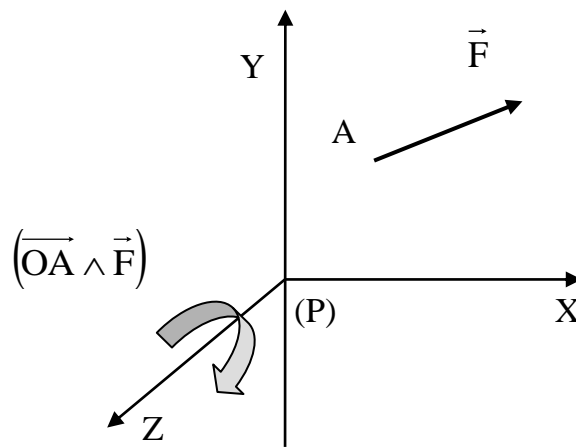
Soit O le point choisi:

$$\{\vec{F}_{ext}\}_O = \{\vec{0}\}_O \Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_{(\vec{F}_{ext})} = \vec{0} & (4) \\ \vec{M}_{(\vec{F}_{ext})/O} = \vec{0} & (5) \end{cases}$$

Les équations (4) et (5) sont deux *équations vectorielles* qui donnent:

- 6 équations scalaires en l'espace.
- 3 équations scalaires en plan.

En plan, l'équation des forces (1) possède deux équations scalaires et l'équation des moments (5) une équation scalaire. Le moment est un produit de vecteurs appartenant toujours à (P) (plan de sollicitations); le moment est autour de l'axe z (z étant perpendiculaire au plan (P)).



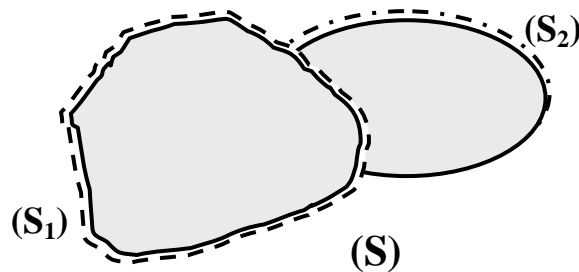
**Fig 1.17-** Illustration en plan de l'équilibre statique.

**Remarque**

En génie civil, nous nous ramenons le plus souvent possible à l'étude des *problèmes plans*, c'est à dire l'étude de structures chargées dans leur *plan de symétrie*.

**1.6 Principes de la coupe (ou isolement) – Éléments de réduction**

Soit deux solides ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) et ( $S$ ) le système formé par ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) comme le montre la figure 3.2.



**Fig 1.18-** Illustration des frontières d'un solide.

Soit le torseur des actions du monde extérieur sur ( $S$ ):

$$\{\vec{F}\} = \{\vec{F}_1\} + \{\vec{F}_2\} \quad (6)$$

- $\{\vec{F}_1\}$  est le torseur des actions s'appliquant sur la frontière extérieure de ( $S_1$ )
- $\{\vec{F}_2\}$  est le torseur des actions s'appliquant sur la frontière extérieure de ( $S_2$ )

Faisons le bilan des actions s'exerçant sur ( $S_1$ ). On a, en isolant ( $S_1$ ):

$$\{\vec{D}_1\} = \{\vec{F}_1\} + \{\vec{F}_{2/1}\} \quad (7)$$

Où

$\{\vec{F}_1\}$  est le torseur des actions s'appliquant sur la frontière libre de  $(S_1)$

$\{\vec{F}_{2/1}\}$  est le torseur des actions exercées par  $(S_2)$  sur  $(S_1)$  sur la frontière commune.

Ainsi, on peut donner la définition ci-dessous.

### Définition

Si on isole  $(S)$ , l'équation (6)  $\{\vec{F}\} = \{\vec{F}_1\} + \{\vec{F}_2\}$  modélise le torseur des **actions extérieures** appliquées sur le solide  $(S)$  et  $\{\vec{F}_{2/1}\}$  représente le torseur des **actions intérieures par rapport à**  $(S)$ .

Si on isole  $(S_1)$ ,  $\{\vec{F}_1\}$  et  $\{\vec{F}_{2/1}\}$  modélisent les torseurs des actions extérieures par rapport à  $(S_1)$ .

- **Principe des actions réciproques**

Si on isole maintenant  $(S_2)$  le bilan des actions extérieures donne:

$$\{\vec{D}_2\} = \{\vec{F}_2\} + \{\vec{F}_{1/2}\} \quad (8)$$

où

$\{\vec{F}_2\}$  est le torseur des actions s'appliquant sur la frontière libre de  $(S_2)$

$\{\vec{F}_{1/2}\}$  est le torseur des actions exercées par  $(S_1)$  sur  $(S_2)$

On a:

$$(S) = (S_1) \cup (S_2) \quad (9)$$

et donc:

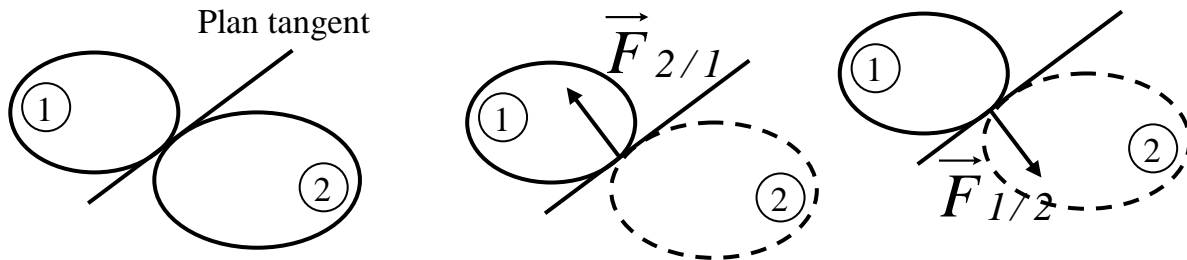
$$\begin{aligned} \{\vec{F}\} &= \{\vec{D}_1\} + \{\vec{D}_2\} \\ &= \left( \{\vec{F}_1\} + \{\vec{F}_{2/1}\} \right) + \left( \{\vec{F}_2\} + \{\vec{F}_{1/2}\} \right) = \left( \{\vec{F}_1\} + \{\vec{F}_2\} \right) \\ &\quad (7) \qquad (8) \qquad (6) \end{aligned}$$

Soit:

$$\{\vec{F}_{2/1}\} + \{\vec{F}_{1/2}\} = \{\vec{0}\} \quad (10)$$

L'équation (10) représente le principe des actions réciproques. De façon simplifiée, le principe des actions réciproques ou mutuelles, pour deux solides en contact s'écrit:

$$\vec{F}_{2/1} = -\vec{F}_{1/2} \quad (11)$$

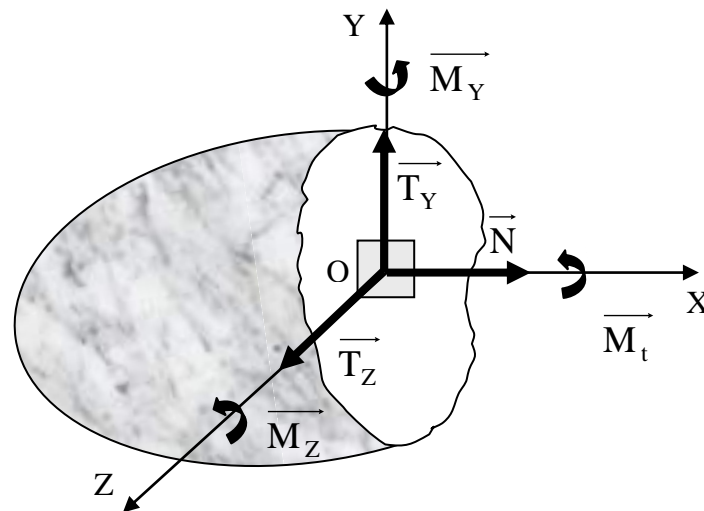


**Fig 1.19-** Illustration du principe des actions réciproques.

### 1.7. Définitions et conventions de signes des efforts intérieurs

Les efforts intérieurs en un point G de la ligne moyenne d'une poutre sont les composantes des éléments de réduction du torseur des efforts intérieurs. Ces efforts intérieurs prennent les notations suivantes (Fig. 1.20):

- $N$  est l'effort normal (dans la direction  $\vec{x}$ )
- $T_y$  est l'effort tranchant dans la direction  $\vec{y}$
- $T_z$  est l'effort tranchant dans la direction  $\vec{z}$
- $\vec{T} = T_y \vec{y} + T_z \vec{z}$  est l'effort tranchant
- $M_t$  est le moment de torsion (autour de l'axe  $\vec{x}$ )
- $M_y$  est le moment de flexion ou fléchissant (autour de l'axe  $\vec{y}$ )
- $M_z$  est le moment de flexion ou fléchissant (autour de l'axe  $\vec{z}$ )
- $\vec{M} = M_y \vec{y} + M_z \vec{z}$  est le moment de flexion



**Fig. 1.20-** Efforts intérieurs en un point de la ligne moyenne d'une poutre.

- **Diagramme de l'effort intérieur**

On appelle diagrammes des efforts intérieurs les courbes représentant la variation de chacun des efforts intérieurs selon la ligne moyenne. Ces représentations sont utiles pour situer rapidement les sections les plus sollicitées.

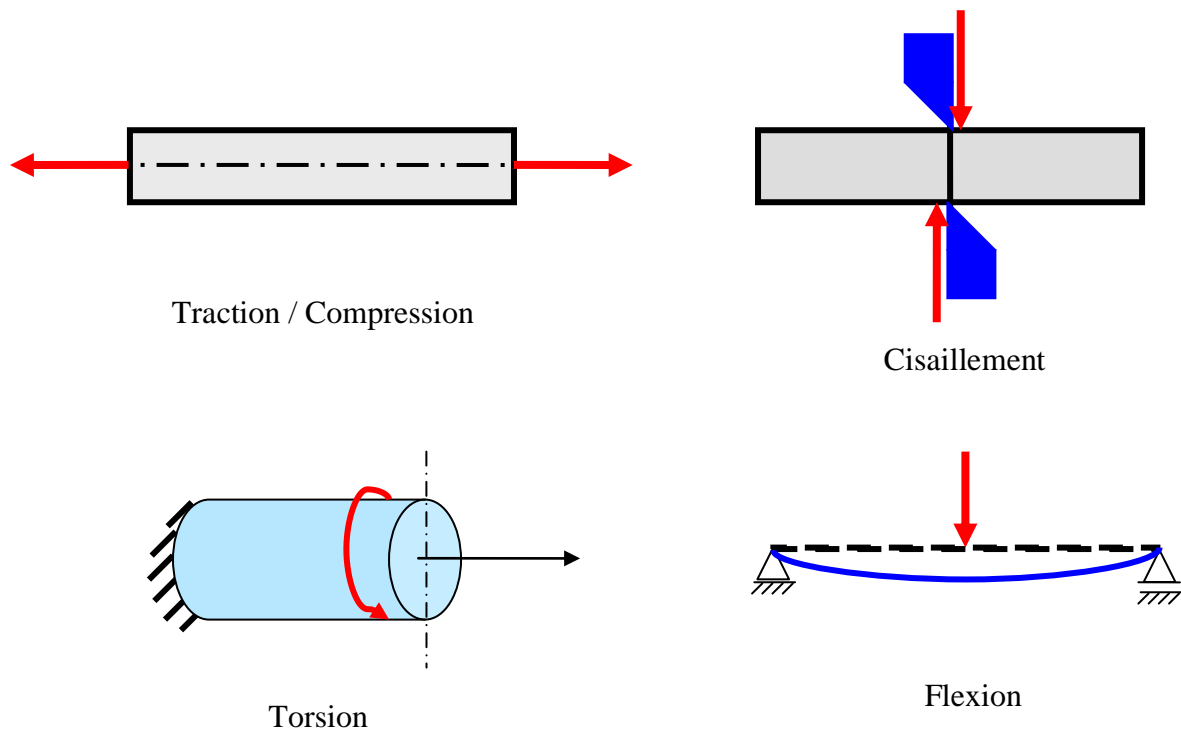
- **Sollicitations simples**

Les sollicitations couramment rencontrées sont la traction ou la compression, la flexion, la torsion et le cisaillement. Quelques types de sollicitations simples sont donnés sur le tableau 1.2. La figure 1.21 schématise ces types de sollicitations.

**Tableau 1.2:** Quelques types de sollicitations

Sollicitations	Effort Normal	Effort Tranchant	Moment de Torsion	Moment de Flexion
Traction/compression	$N \neq 0$	$T = 0$	$M_t = 0$	$M_f = 0$
Cisaillement pur	$N = 0$	$T_y \text{ (ou } T_z) \neq 0$	$M_t = 0$	$M_f = 0$
Torsion pure	$N = 0$	$T = 0$	$M_t \neq 0$	$M_f = 0$
Flexion pure	$N = 0$	$T = 0$	$M_t = 0$	$M_z \text{ (ou } M_y) \neq 0$
Flexion simple	$N = 0$	$T_y \text{ (ou } T_z) \neq 0$	$M_t = 0$	$M_z \text{ (ou } M_y) \neq 0$





**Fig. 1.21-** Poutre soumise à une sollicitation simple.

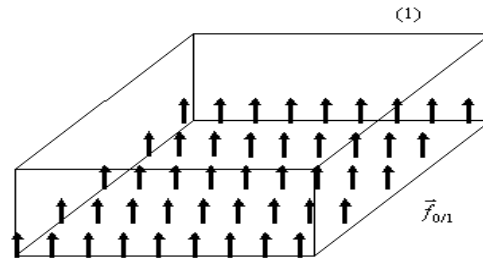
### 1.8. Conclusion

Dans ce chapitre, des notions préliminaires de la Résistance des Matériaux sont données. Le contenu est consacré, en premier lieu, à la mise en place des hypothèses fondamentales de la RDM ainsi qu'aux notions de contraintes et déformations. Les principales liaisons de génie et leur modélisation sont, ensuite revues. Le principe fondamental de la statique est également donné. En dernier, les notions de sollicitations simples sont abordées et schématisées.

## Exercices

### Exercice N°1

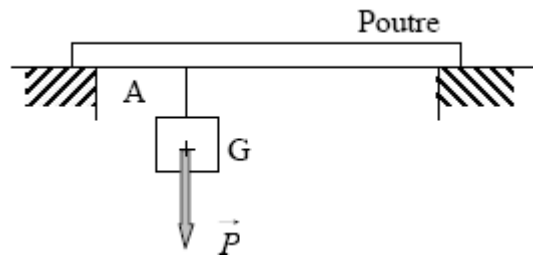
Considérons le cas d'une boîte sur un plan.



Schématiser l'action du plan sur la boîte.  $\vec{f}_{0/1}$  est une charge uniforme qui se mesure en  $(\text{N}/\text{m}^2)$ .

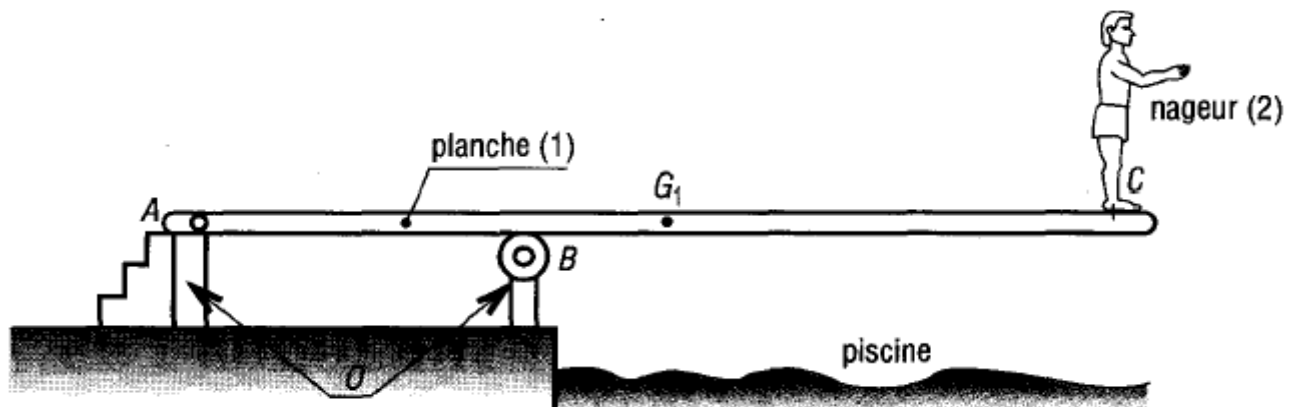
### Exercice N°2

Exprimer les torseurs du poids  $\mathbf{P}$  par rapport aux points G et A.



### Exercice N°3

Soit un plongoir, schématisé par la figure ci-dessous.

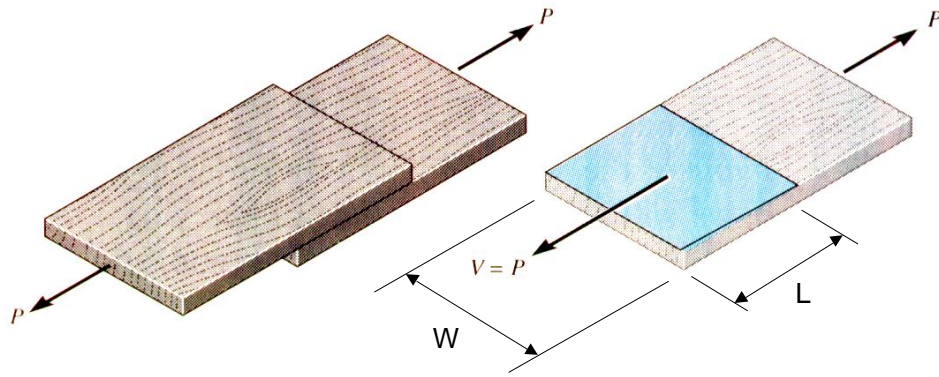


- Repérer, identifier et schématiser tous les efforts s'exerçant sur la planche (1).

### Exercice N°4

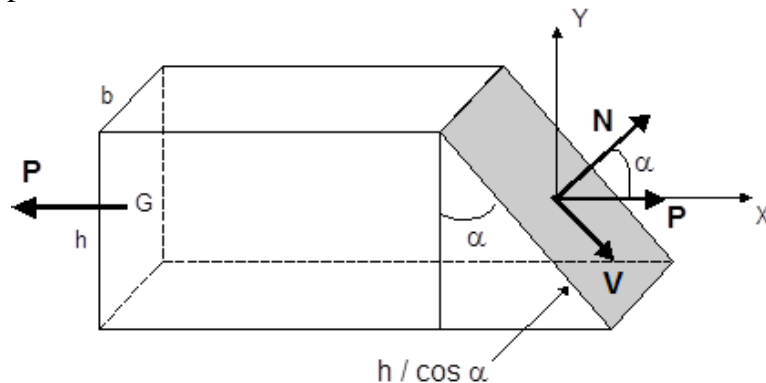
Calculer la contrainte agissant au niveau de la surface de contact des deux tôles montrées par la figure ci-dessous.

- De quel type de contrainte s'agit-il?



### Exercice N°5

Pour un effort  $P$  agissant sur un plan incliné, exprimer les contraintes normale et tangentielle agissant sur ce plan.



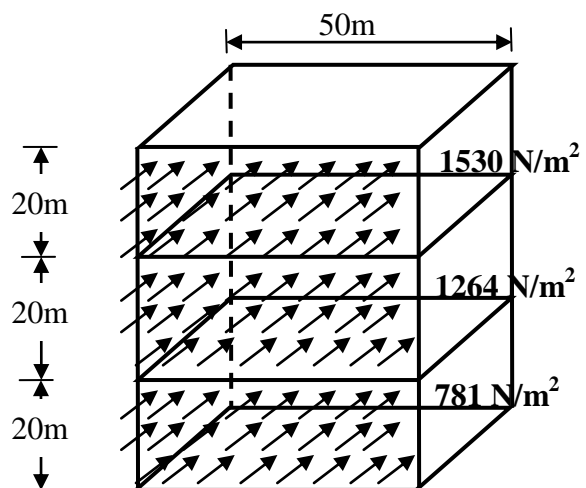
On donne  $h = 100 \text{ mm}$ ,  $b = 50 \text{ mm}$  et  $\alpha = 70^\circ$ .

Calculer l'effort admissible ( $P_{\text{adm}}$ ) si les contraintes admissibles en traction et en compression sont, respectivement,  $[\sigma] = 2 \text{ MPa}$  et  $[\tau] = 1,5 \text{ MPa}$ .

### Exercice N°6

Un bâtiment d'une hauteur de 60 et de forme rectangulaire est montré sur la figure ci-dessous. Le vent exerce des forces sur les facettes verticales du bâtiment qui sont exprimées par des pressions supposées uniformément réparties sur les trois facettes. Ces pressions valent  $781 \text{ N/m}^2$  sur la couche inférieure,  $1264 \text{ N/m}^2$  sur la couche du milieu et  $1530 \text{ N/m}^2$  sur la couche supérieure.

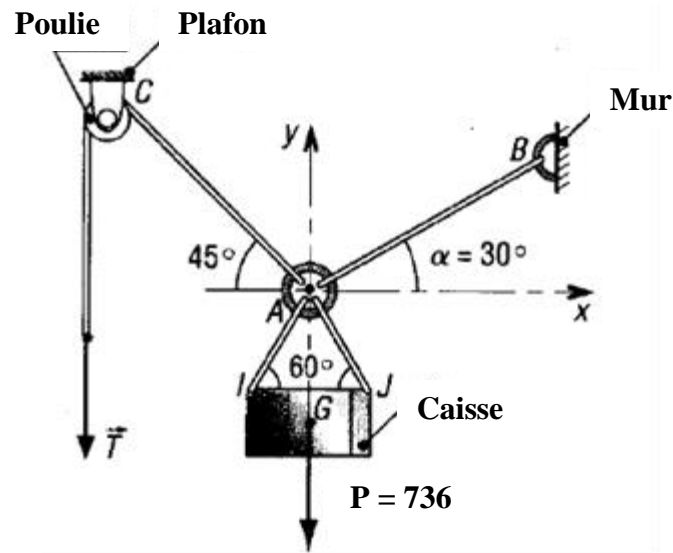
- Déterminer la force de cisaillement que doit exercer la fondation du bâtiment pour résister aux forces du vent.



**Exercice N°7**

Soit à soulever une caisse de poids qui vaut 736 N par un dispositif avec poulie et câbles (Figure suivante).

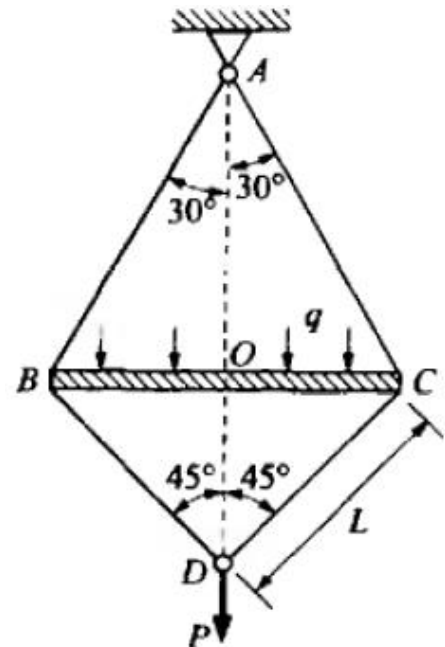
- 1- Isoler la caisse et faire le bilan de toutes les actions extérieures s'exerçant sur celle-ci.
- 2- En appliquant le principe fondamental de la statique, déterminer les tensions des câbles AB et AC et l'effort T que doit exercer l'opérateur pour maintenir l'ensemble en équilibre.

**Exercice N°8**

Le système montré par la figure suivante est constitué de quatre barres rigides en acier: deux barres supérieures AB et AC et deux barres inférieures BD et CD, ayant chacune un module de Young E et une même section transversale A. Le système est sollicité par une force concentrée au point D ( $P=17,3 \text{ kN}$ ) et une charge répartie ( $q = 3,46 \text{ kN/m}$ ).

- 1- Déterminer les efforts dans les barres AB et AC. On donne  $L = 2\sqrt{2} \text{ m}$ .

- 2- Déterminer les efforts dans les barres BD et CD.



## CHAPITRE 2

---

# TRACTION ET COMPRESSION SIMPLES

---

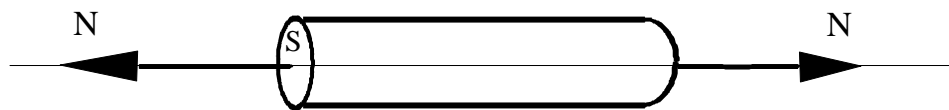
## 2.1. Introduction

La traction ou compression correspond à des forces s'exerçant perpendiculairement aux sections des pièces; elle est dite uni-axiale car les côtés de la pièce ne sont pas contraints, toutes les forces sont sur un même axe.

## 2.2. Définitions

Soit une barre rectiligne sollicitée par deux forces égales et directement opposées agissant suivant sa fibre moyenne est soumise à un effort normal (Fig. 2.1). Cet effort est dit:

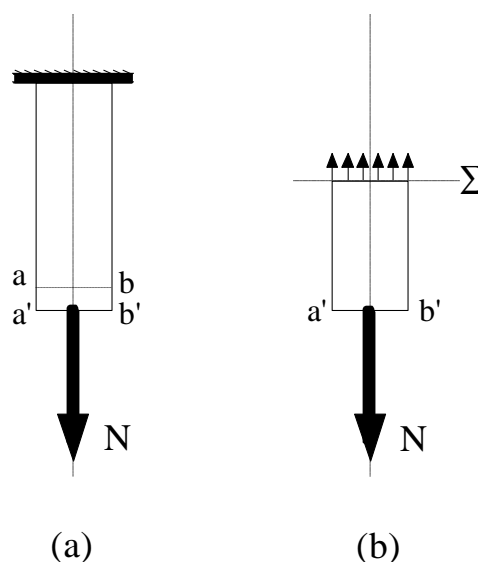
- un effort de traction simple si les forces tendent à allonger la barre,
- un effort de compression simple si les forces tendent à raccourcir la barre.



**Fig. 2.1-** Barre en traction.

## 2.3. Contrainte normale

On considère une barre rectiligne, de section  $S$  liée à un massif fixe à son extrémité supérieure (Fig. 2.2-a). A l'autre extrémité, elle est soumise à l'action d'une force  $N$  suivant son axe.



**Fig. 2.2-** Barre encastrée sollicitée en traction.

D'après le principe de l'action et de la réaction, le massif exerce une force de réaction égale et opposée à  $N$ . La barre est alors soumise à un effort normal. Sa base -ab- se déplace alors parallèlement à elle-même pour venir en -a'b'-. Toutes les fibres ont subi, si l'effort est un effort de traction, le même allongement (hypothèse de Navier-Bernoulli: les sections droites restent planes et perpendiculaires à l'axe) et supportent donc la même tension.

Imaginons qu'on coupe la barre par un plan  $\Sigma$  perpendiculaire à l'axe de la pièce. Pour maintenir le tronçon inférieur en équilibre, il faut placer dans  $\Sigma$  une force intérieure égale et opposée à  $N$ .

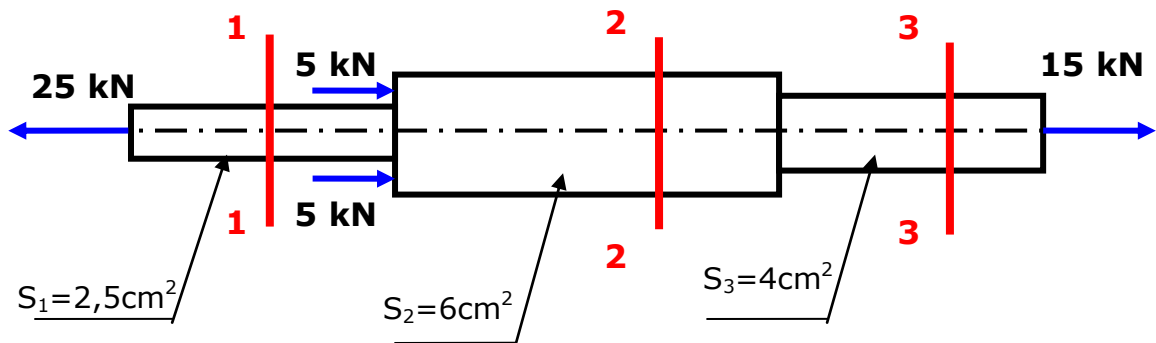
L'hypothèse de *Navier-Bernoulli* permet d'écrire:

$$\sigma = \frac{N}{S} \quad (1)$$

$\sigma$  est appelé **contrainte normale**. Elle représente l'intensité de l'effort normal par unité de surface.  $\sigma$  se mesure en (N/m<sup>2</sup>) ou Pascal (Pa).

### • Exemple 2.1

Soit la barre schématisée par la figure ci-dessous. Calculer les contraintes au niveau des sections 1-1, 2-2 et 3-3.

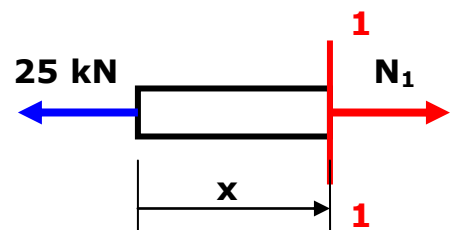


### • Solution de l'exemple 2.1

#### Section 1-1

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_1 = 25 \text{ kN}$$

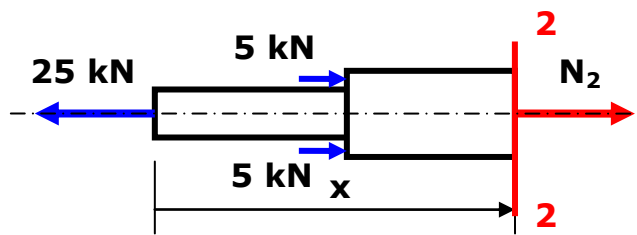
$$\sigma_{1-1} = \frac{N_1}{S_1} = \frac{25}{2.5} = 10 \text{ kN/cm}^2 = 100 \text{ MPa}$$



**Section 2-2**

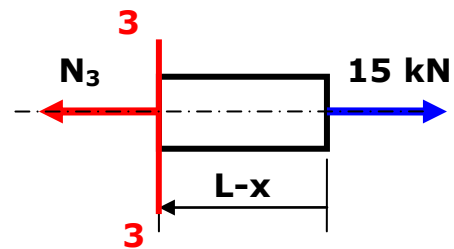
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_2 = 15 \text{ kN}$$

$$\sigma_{2-2} = \frac{N_2}{S_2} = \frac{15}{6} = 2,5 \text{ kN/cm}^2 = 25 \text{ MPa}$$

**Section 3-3**

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_3 = 15 \text{ kN}$$

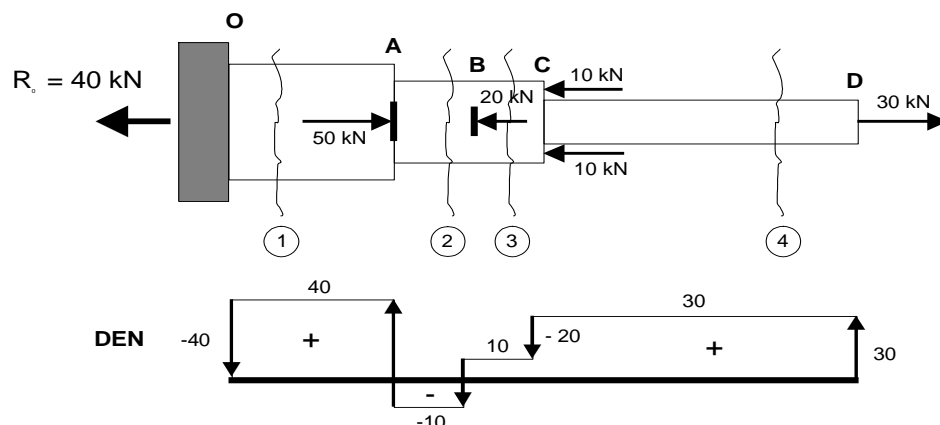
$$\sigma_{3-3} = \frac{N_3}{S_3} = \frac{15}{4} = 3,75 \text{ kN/cm}^2 = 37,5 \text{ MPa}$$

**2.4. Diagramme de l'effort normal (DEN)**

- Le diagramme de l'effort normal (DEN) donne la valeur de l'effort normal dans toutes les sections perpendiculaires à la membrure à l'étude.
- L'effort normal dans une section est la résultante des charges axiales s'exerçant sur la section.
- Le DEN est obtenu par la méthode des sections en effectuant une coupe suivant l'entrée de chaque force concentrée et, au début et à la fin ainsi qu'au minimum et au maximum (s'il y a lieu) de chaque charge répartie.

- **Exemple avec des forces concentrées**

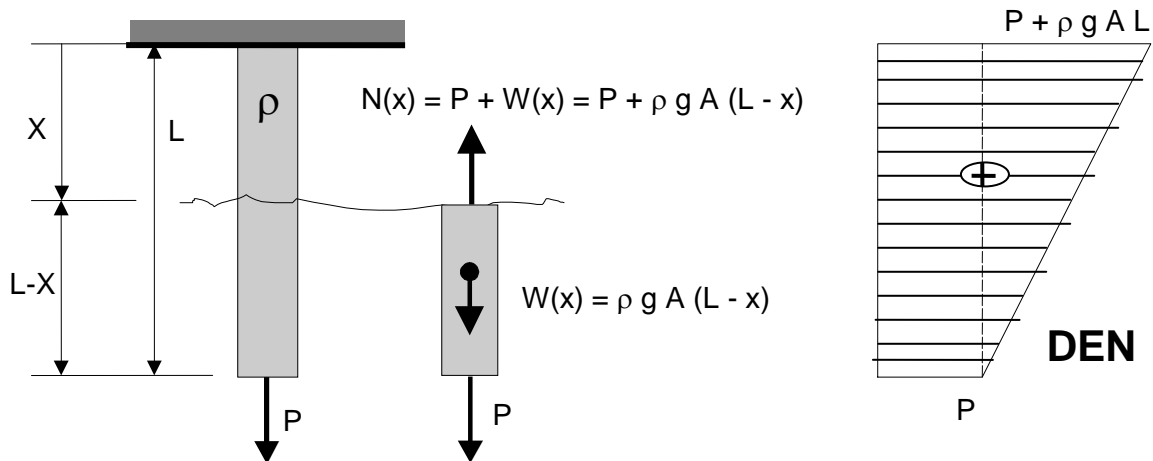
La figure ci-dessous schématise le DEF tout au long d'une barre dans le cas où les efforts axiaux sont concentrés.





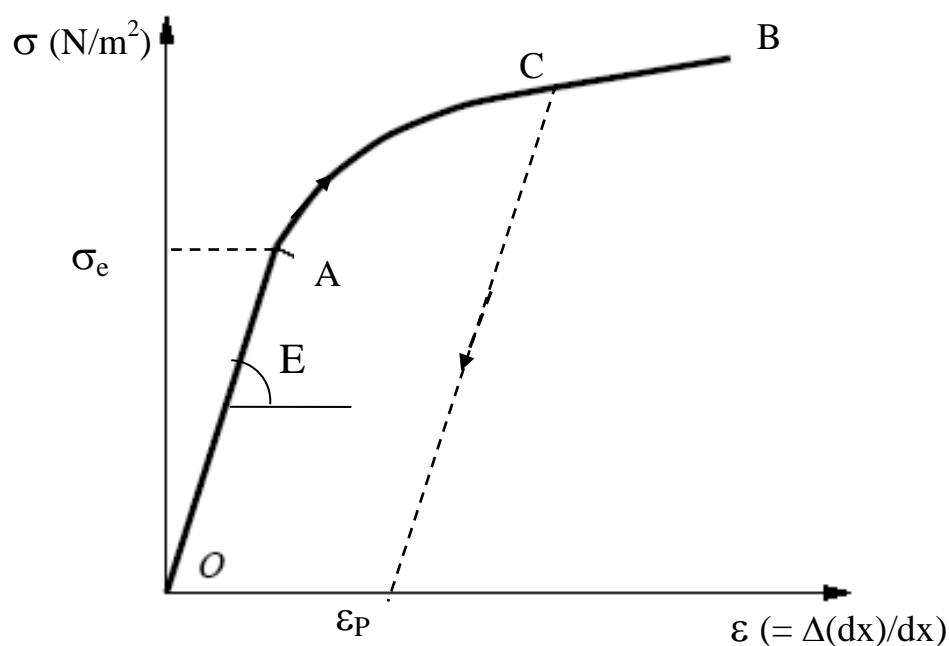
- **Exemple avec une charge répartie (poids de l'élément)**

La figure ci-dessous schématise le DEF tout au long d'une barre soumise à son poids propre.



## 2.5. Courbe contrainte - déformation

La courbe contrainte déformation est une courbe caractérisant le matériau. Elle est obtenue empiriquement d'une expérience de traction effectuée sur une barre de section constante. Lors de cette expérience l'effort normal est augmenté progressivement provoquant l'allongement de la barre. A chaque incrément d'effort, la contrainte normale et la déformation de la barre sont portées sur une courbe. Cette opération est effectuée régulièrement jusqu'à la rupture de la barre. La courbe ainsi obtenue est la courbe *contrainte - déformation* du matériau. Elle a généralement (de manière simplifiée) l'allure montrée sur la figure 2.3.



**Fig. 2.3-** Courbe contrainte - déformation de traction.

La partie (OA) est la partie élastique. La limite élastique n'est pas atteinte. La barre reprend sa forme initiale si l'expérience est interrompue dans cette zone. Dans ce cas l'élasticité est linéaire ((OA) est une droite). La pente  $E$  de la droite (OA) est appelée module d'élasticité linéaire ou module de Young (tableau 2.1). Il représente le rapport entre la contrainte et la déformation  $\varepsilon$  dans la zone élastique. La relation entre la contrainte et la déformation dans la zone élastique est donnée par la *loi de Hooke*:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2)$$

La partie (AB) est la partie plastique. La limite élastique est dépassée. Si l'expérience est interrompue (point C), la barre ne reprend pas sa forme initiale. Le chemin de décharge est, de manière simplifiée parallèle à la droite (OA). Lorsque l'effort appliqué s'annule, il persiste une déformation résiduelle  $\varepsilon_p$  qui ne disparaît plus.

**Tableau 2.1:** Ordres de grandeur du module de Young (E)

Matériau	Acier	Béton	Aluminium
$E \text{ (daN/mm}^2\text{)}$	21000	2000	7000

## 2.6. Condition de résistance

Pour vérifier la condition de résistance d'une pièce sollicitée en traction ou en compression, on doit s'assurer que:

$$\sigma \leq [\sigma] \quad (3)$$

Où  $[\sigma]$  est la contrainte admissible pour le matériau étudié. Elle est donnée par l'expression:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_e}{n} \quad (4)$$

Où  $\sigma_e$  est la limite élastique en traction et  $n$  un coefficient de sécurité ( $n > 1$ ).

### • Limite élastique

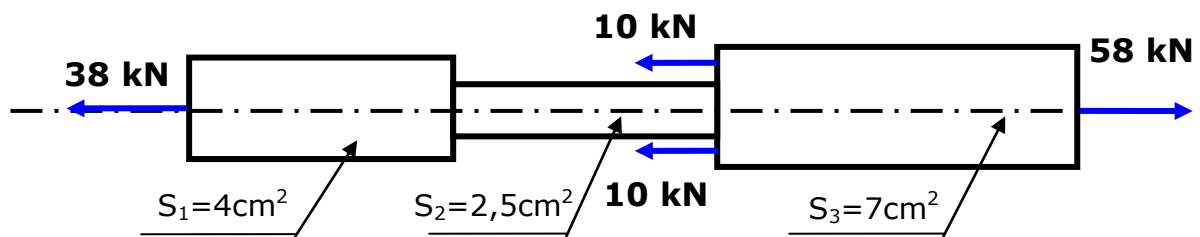
Pour tous les matériaux homogènes et isotropes la limite élastique en traction  $\sigma_{et}$  est égale à la limite élastique en compression  $\sigma_{ec}$ . On les désigne alors simplement  $\sigma_e$  (limite élastique). C'est le cas des aciers.

### • Coefficient de sécurité

Le coefficient de sécurité vaut 1,5 à 2 pour un plancher, 2 à 3 pour une charpente, 10 à 12 pour ascenseurs et câbles.

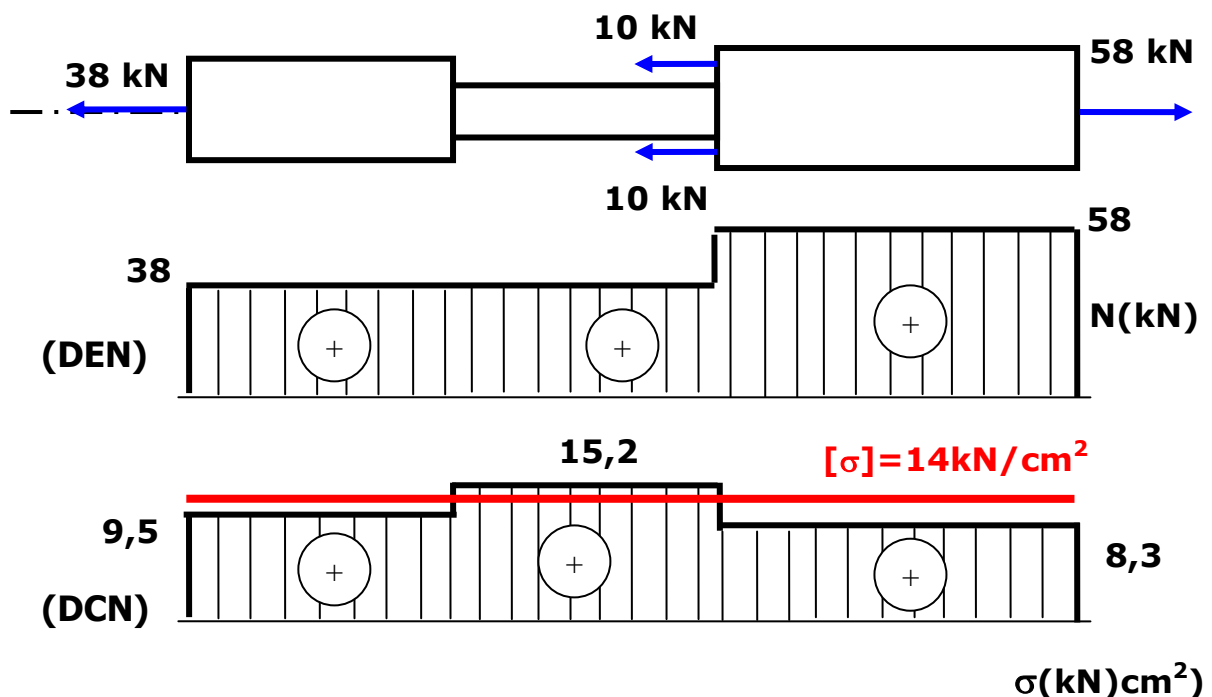
- Exemple 2.2

Vérifier la résistance de la barre métallique schématisée par la figure ci-dessous, sachant que  $[\sigma] = 14 \text{ kN/cm}^2$ .



- Solution de l'exemple 2.2

Nous traçons le Diagramme de l'Effort Normal (DEN) et nous déduisons le Diagramme de la Contrainte Normale (DCN) puis nous reportons dessus la valeur de la contrainte admissible du matériau:



Nous remarquons que la contrainte maximale est égale à  $15,2 \text{ kN/cm}^2$  et elle est supérieure à la contrainte admissible, d'où la barre ne résiste pas à la traction.

## 2.7. Loi de déformation élastique

On considère une barre de longueur initiale  $L$  soumise à un effort normal  $N$ . Une portion de longueur  $dx$  de la barre subit une variation de longueur  $du = \Delta(dx)$  (Fig. 2.4).

On appelle **déformation longitudinale** dans la section d'abscisse  $x$  la quantité adimensionnelle:

$$\varepsilon = \frac{\Delta(dx)}{dx} \quad (5)$$

D'où

$$\Delta(dx) = \varepsilon dx \quad (6)$$

D'autre part,

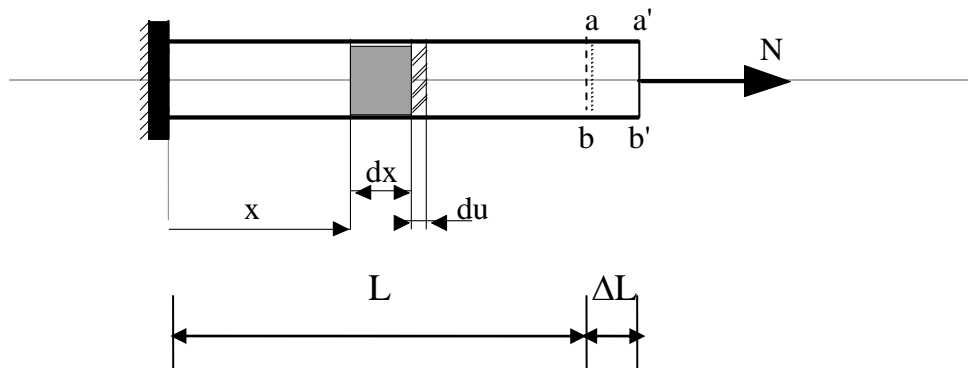
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{ES} \quad (7)$$

Ainsi  $\Delta(dx)$  vaut

$$\Delta(dx) = \frac{N}{ES} dx \quad (8)$$

et la déformation totale de la barre est donc

$$\Delta L = \int_0^L \Delta(dx) = \int_0^L \frac{N}{ES} dx \quad (9)$$



**Fig. 2.4-** Déformation linéaire.

- *Cas particulier*

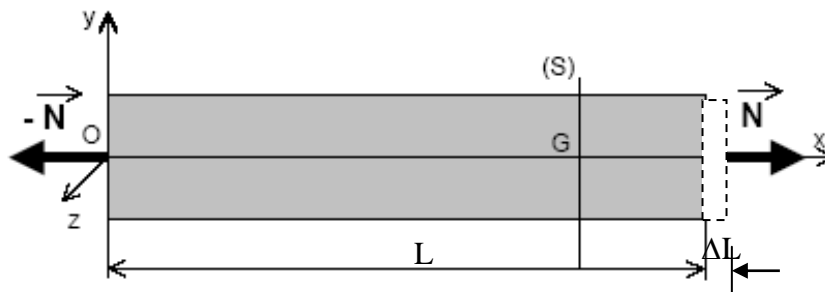
Pour une barre homogène de section constante, si  $N$  est *constant* (Fig. 2.5), l'allongement absolu s'écrit:

$$\Delta L = \frac{NL}{ES} \quad (10)$$

Revenons à l'équation  $\varepsilon = \frac{N}{ES}$ , on a la relation

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \quad (10)$$

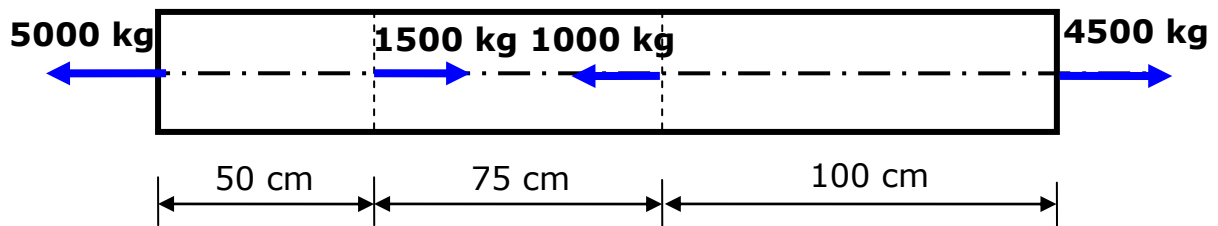
qui exprime la déformation (ou l'allongement) relative.  $\Delta L$  est la déformation absolue.



**Fig. 2.5-** Barre homogène soumise à un effort de traction.

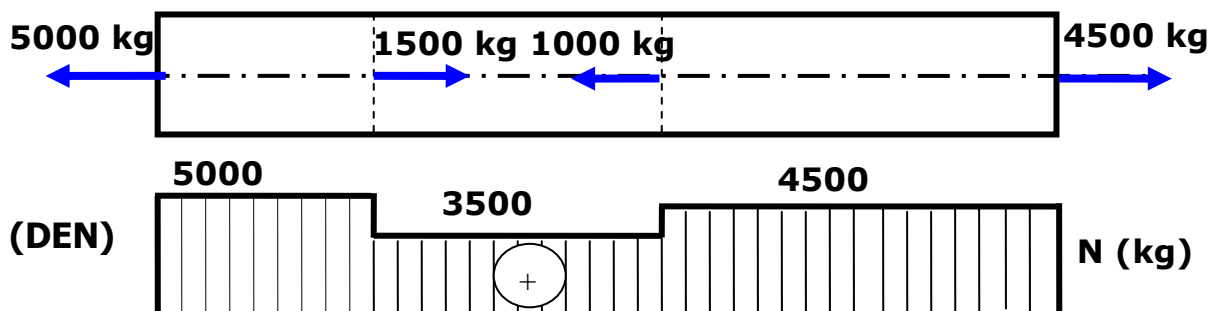
• **Exemple 2.3**

Déterminer l'allongement total de la barre métallique, sollicitée comme le montre la figure ci-dessous, sachant que le module de Young  $E = 2,110^6 \text{ kg/cm}^2$ . La section de la barre est constante et vaut  $5 \text{ cm}^2$ .



• **Solution de l'exemple 2.3**

Le DEN est montré sur la figure ci-dessous:



$$\begin{aligned}
 \Delta L &= \int_0^L \frac{N}{ES} dx = \int_0^{L_1} \frac{N_1}{ES_1} dx + \int_{L_1}^{L_1+L_2} \frac{N_2}{ES_2} dx + \int_{L_1+L_2}^L \frac{N_3}{ES_3} dx \\
 &= \frac{N_1 L_1}{ES_1} + \frac{N_2 L_2}{ES_2} + \frac{N_3 L_3}{ES_3} \\
 &= \frac{1}{E} \sum_{i=1}^3 \frac{N_i L_i}{S_i}
 \end{aligned}$$

$$\Delta L = \frac{1}{2,1 \cdot 10^6 \times 5} (5000 \times 50 + 3500 \times 75 + 4500 \times 100)$$

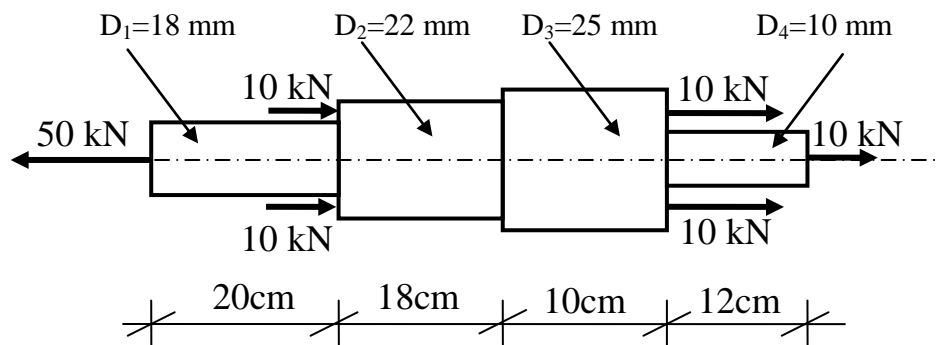
Ainsi, l'allongement total de la barre est

$$\Delta L = 0,092 \text{ cm}$$

## Exercices

### Exercice N°1

Soit la barre schématisée par la figure ci-dessous:



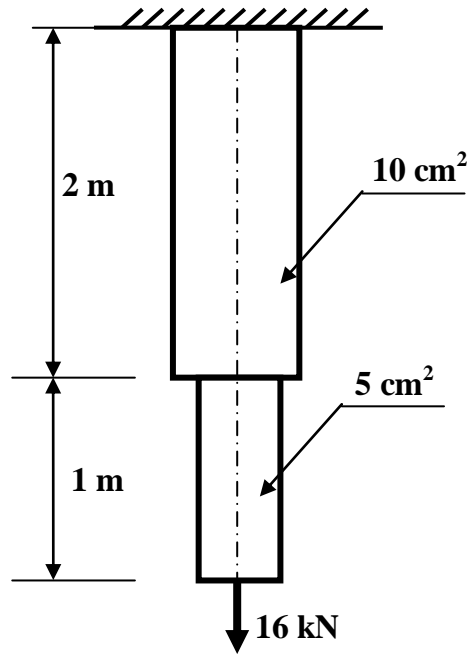
- 1- Tracer le diagramme de l'effort normal tout au long de la barre.
- 2- Tracer le diagramme de la contrainte normale tout au long de la barre.
- 3- Vérifier la résistance de la barre si la contrainte admissible du matériau est supposée de  $14 \text{ kN/cm}^2$ .
- 4- Calculer la déformation (allongement ou raccourcissement) de la barre.
- 5- En déduire le pourcentage de l'allongement et le pourcentage du raccourcissement dans la barre.

### Exercice N°2

Soit la barre en acier, schématisé par la figure ci-dessous, encastree à son extrémité supérieure et tendue par une force de  $16 \text{ kN}$  à son extrémité inférieure.

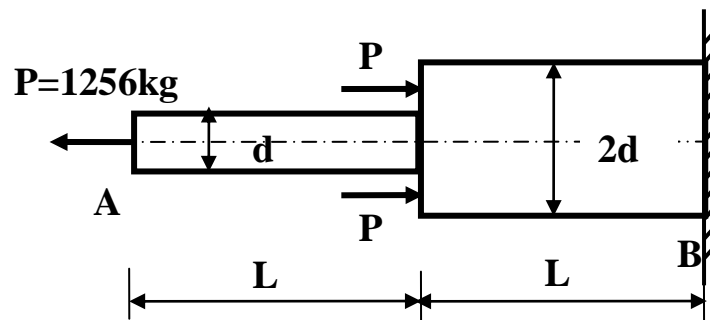
En tenant compte du poids spécifique du matériau ( $\gamma = 7,8 \cdot 10^4 \text{ N/m}^3$ ),

- 1- Tracer le diagramme de l'**effort normal** tout au long de la barre.
- 2- Tracer le diagramme de la **contrainte normale** tout au long de la barre.
- 3- Vérifier la **résistance** de la barre, à la section dangereuse, si la contrainte admissible du matériau est supposée de  $15 \text{ kN/cm}^2$ .



### Exercice N°3

Deux barres cylindriques en acier, sont reliées ensemble, comme le montre la figure ci-dessous. Le système entier est encastré à son extrémité inférieure et sollicité par l'effort P.

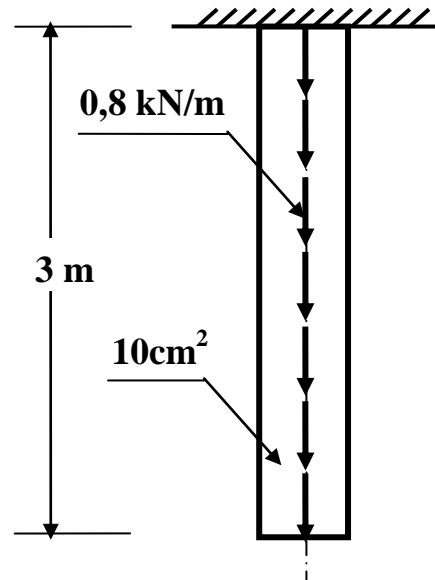


Déterminer la valeur du diamètre  $d$ , si la contrainte admissible du matériau constituant chacune des deux barres est égale à  $16 \text{ kN/cm}^2$ .

### Exercice N°4

Soit la barre en acier, encastrée à son extrémité supérieure et tendue par une force de  $0,8 \text{ kN/m}$  linéairement répartie comme le montre la figure ci-dessous.

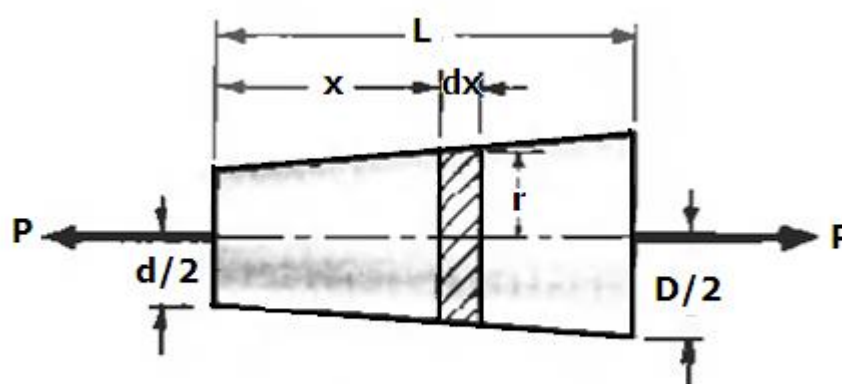




- 1- Que pourrait représenter la force de  $0,8\text{ kN/m}$ ? Schématisé cette force dans un modèle global.
- 2- Vérifier la résistance de la barre, à la section dangereuse, si la contrainte admissible du matériau est égale à  $150\text{ MPa}$ .
- 3- Calculer l'allongement total de la barre (en mm) si le module de Young vaut  $21000\text{ daN/mm}^2$ .

### Exercice N°5

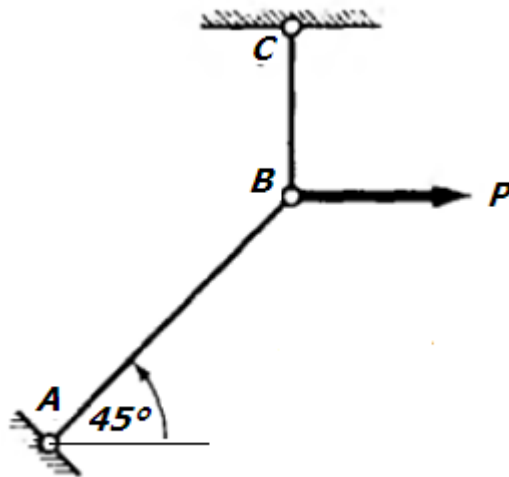
Soit une barre conique en acier de longueur  $L$ , montrée sur la figure suivante. Sa section transversale varie uniformément d'un diamètre  $d$  à un diamètre  $D$  d'une limite à une autre. Déterminer l'elongation due à la force axiale  $P$  appliquée de part et d'autre de la barre.



### Exercice N°6

Soit le système articulé constitué des deux barres rigides AB et BC (verticale) soumis à la seule force verticale  $P$  appliquée au point B. la barre AB a une section transversale  $A_1$ , une longueur  $L_1$  et un module de Young  $E_1$ . Les quantités correspondantes à la barre BC sont  $A_2$ ,  $L_2$  et  $E_2$ .

- Déterminer les composantes horizontale et verticale du déplacement du point B.



## CHAPITRE 3

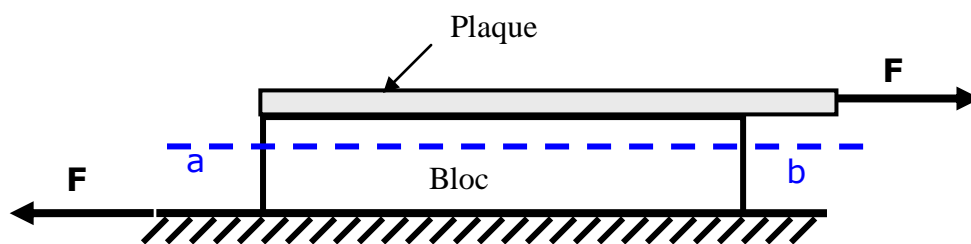
---

# CISAILLEMENT PUR

---

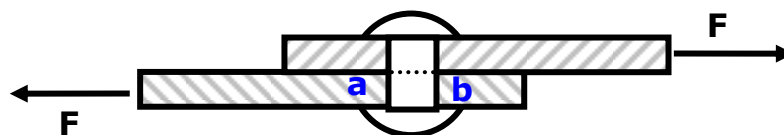
### 3.1. Introduction

Considérons un bloc matériel mince (Fig. 3.1), collé à une table; supposons qu'une plaque mince est maintenant collée à la surface supérieure du bloc. Si une force horizontale  $F$  est appliquée à la plaque, celle-ci tendra à glisser le long de la surface du bloc, et le bloc lui-même tendra à glisser le long de la table. Si les surfaces collées demeurent intactes, la table résiste au glissement du bloc, et le bloc résiste au glissement de la plaque sur sa surface. Si nous supposons que le bloc soit divisé en n'importe quel plan horizontal imaginaire, tel que le plan  $ab$ , la partie du bloc au-dessus de ce plan tendra à glisser au-dessus de la pièce au-dessous du plan. Chacune des deux parties du système divisé tendra à glisser par rapport à l'autre au niveau du plan  $ab$ . Chaque partie sera donc soumise à une action de cisaillement; les contraintes résultantes de ces actions s'appellent les contraintes de cisaillement. Les contraintes de cisaillement agissent tangentielllement par rapport à la surface.

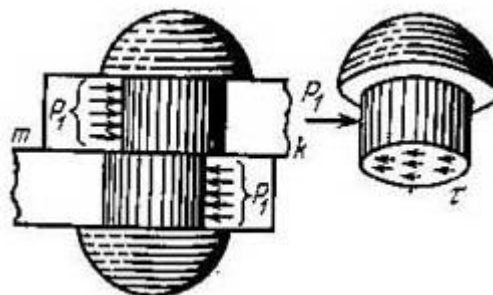


**Fig. 3.1-** Contraintes de cisaillement provoquées par des forces de cisaillement.

Les contraintes de cisaillement surgissent dans beaucoup d'autres problèmes pratiques. La figure 3.2 montre deux plaques liées par un rivet simple, soumise à une force de traction  $F$ . Nous imaginons que le rivet est divisé en deux parties au niveau du plan  $ab$ ; alors la moitié supérieure du rivet tend à glisser au-dessus de la moitié inférieure, et une contrainte de cisaillement est établie dans le plan  $ab$  (Fig. 3.3).



**Fig. 3.2-** Contraintes de cisaillement dans un rivet;  
Force de cisaillement transmise au rivet à travers le plan  $ab$ .



**Fig. 3.3-** Section du rivet soumise à une contrainte de cisaillement.

### 3.2. Définition

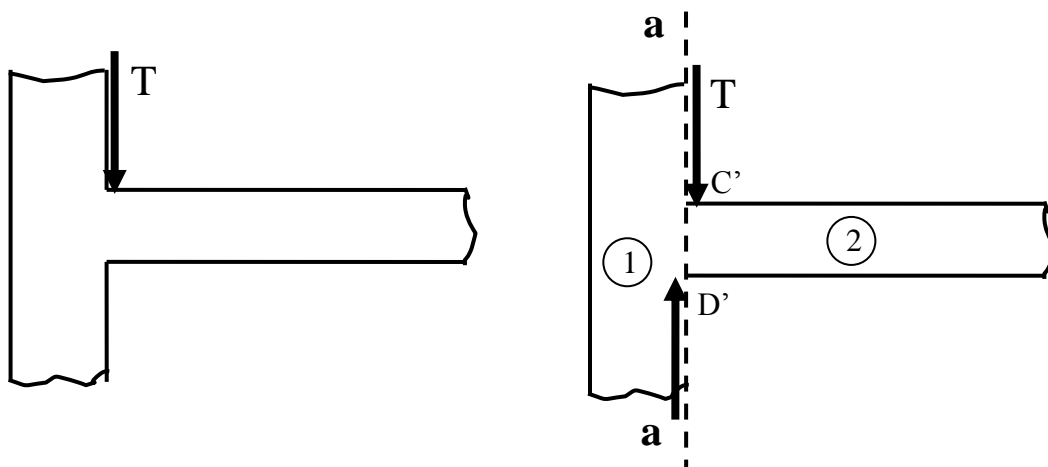
Il y a **cisaillement** lorsqu'une pièce est sollicitée par deux forces égales, de même droite d'action mais de sens contraires qui tendent à faire **glisser** l'une sur l'autre des deux parties de la pièce (exemple: action d'une paire de ciseaux sur une feuille de papier, action d'un poinçon sur une tôle, ...).

### 3.3. Contrainte de cisaillement

On considère une tôle de section **S** encastrée dans un massif rigide fixe (Fig. 3.4). Le long de ce massif, on applique verticalement la lame d'une cisaille avec une force **T** appelée **effort tranchant**. Le principe de l'action et de la réaction fait que le massif exerce une force de réaction égale et opposée à **T**. La tôle est alors soumise au cisaillement. Si la cisaille est suffisamment tranchante, elle fait glisser les sections immédiatement voisines l'une sur l'autre au niveau de l'encastrement. En supposant que toutes les fibres de la tôle supportent la même tension  $\tau$ , celle-ci vaut:

$$\tau = \frac{T}{S} \quad (1)$$

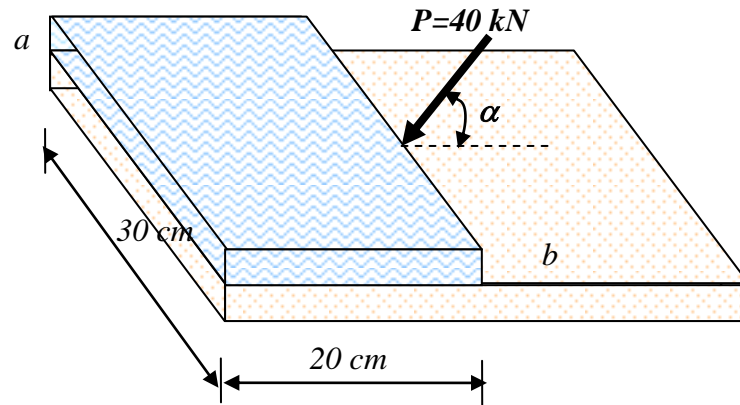
$\tau$  est appelée contrainte de cisaillement: c'est l'intensité de l'effort tranchant par unité de surface. Elle se mesure en Newton/m<sup>2</sup> (ou Pascal).



**Fig. 3.4-** Système soumis à un effort tranchant.

- **Exemple 3.1**

Calculer la contrainte moyenne sur le plan *ab* sur la figure ci-dessous.



• **Solution de l'exemple 3.1**

La contrainte moyenne sur le plan  $ab$  est:

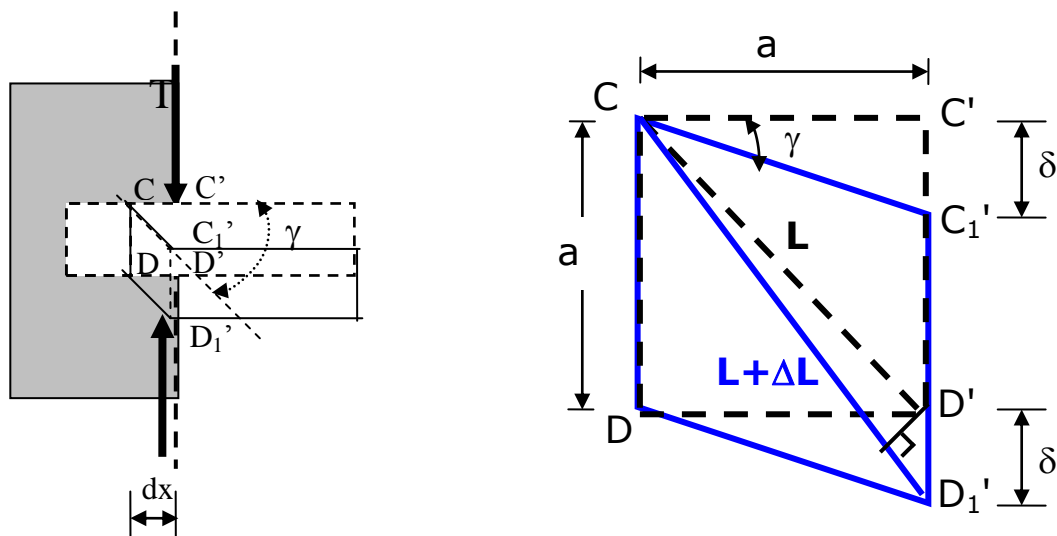
$$\tau = \frac{T}{S} = \frac{P \cos \alpha}{S}$$

D'où pour  $\alpha$ , par exemple, égale à  $45^\circ$  on a:

$$\tau = \frac{40\sqrt{2}}{2(20 \times 30)} = 0,047 \text{ kN/cm}^2$$

### 3.4. Déformation de cisaillement

On considère la section cisailée dans la figure 3.4 et on la montre par la figure 3.5. La section  $C'D'$  glisse par rapport à la section  $-CD-$ . La déviation  $\frac{\overline{C'C'_1}}{dx} = \tan \gamma \approx \gamma$



**Fig. 3.5-** Déformation de cisaillement.

Ou bien

$$\gamma \approx \tan \gamma = \frac{\delta}{a} \quad (2)$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\delta \cos 45^\circ}{a / \sin 45^\circ} = \frac{\delta}{2a}$$

D'où

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{2} \quad (3)$$

$\gamma$  s'appelle "distorsion" ou "déformation de cisaillement".

### 3.5. Loi de HOOKE

Pour beaucoup de matériaux, la déformation de cisaillement est linéairement proportionnelle à la contrainte de cisaillement dans certaines limites (glissement faible). Cette dépendance linéaire est semblable au cas de la traction et de la compression directe. Dans les limites de la proportionnalité, on a

$$\tau = G\gamma \quad (4)$$

Le coefficient de proportionnalité **G** est appelé module d'élasticité transversale ou de cisaillement et est semblable au module de Young **E**, pour la traction et la compression. Pour la plupart des matériaux **E** est environ 2.5 fois plus grand que **G**. Pour les métaux  $G \approx 0.4 E$ .

La relation (a) s'appelle la loi de HOOKE pour le cisaillement.

#### • Exemple 3.2

La contrainte de cisaillement dans un corps métallique est égale à  $1050 \text{ kg/cm}^2$ . Si le module de cisaillement vaut  $8400 \text{ kN/cm}^2$ , déterminer la déformation de cisaillement.

#### • Solution de l'exemple 3.2

De l'équation (4), on a:

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

$$\gamma = \frac{1050}{840000} = 0,00125 \text{ rad} = 0,225^\circ$$

### 3.6. Condition de résistance au cisaillement

Dans certains cas, il peut être important qu'une pièce sollicitée en cisaillement doive résister en toute sécurité à celui-ci (exemple: assemblage par rivets).

Pour qu'une pièce sollicitée en cisaillement **résiste en toute sécurité**, il faut que la contrainte de cisaillement ne dépasse pas une valeur critique  $[\tau]$  appelée **contrainte admissible** en cisaillement:

$$\tau \leq [\tau] \quad (5)$$

$[\tau]$  est une caractéristique du matériau, elle ne dépend pas des dimensions de la pièce sollicitée en cisaillement. Elle représente généralement (éventuellement à un coefficient de sécurité près) la limite d'élasticité transversale de la pièce, c'est-à-dire la contrainte au-delà de laquelle la pièce ne reprend pas sa forme initiale après annulation de l'application de l'effort tranchant.

$$[\tau] = \frac{\tau_e}{n} \quad (6)$$

Où  $\tau_e$  est la limite élastique en cisaillement;  $n$  est le coefficient de sécurité.

#### • Limite élastique

Pour les aciers la limite élastique en cisaillement  $\tau_e$  est égale à la moitié de la limite élastique en traction et compression  $\sigma_e$ ;  $\sigma_e = \sigma_{ec} = \sigma_{et} = 2\tau_e$ .

### 3.7. Applications

En pratique, un bon nombre d'éléments de structure travaille principalement sous cisaillement. Le cisaillement peut être utilisé dans le dimensionnement de pièces travaillant en cisaillement. Les exemples les plus simples sont les assemblages par boulons ou par rivets, ou encore les assemblages par soudure.

#### 3.7.1. Assemblage par rivets

Les assemblages par rivets servent aux pièces d'épaisseur faible ou moyenne, comme les tôles et les profilés, en charpente et en chaudronnerie. Ils nécessitent un perçage préalable des pièces à assembler, ainsi que l'emploi de riveteuses, machines qui servent à écraser l'extrémité du rivet opposée à la tête, afin de réaliser l'assemblage.

Si le système assemblé se trouve sollicité en traction, l'effort de traction va être transmis au rivet qui va travailler en cisaillement pur. Nous traiterons ci-dessous des exemples d'assemblage par rivets.

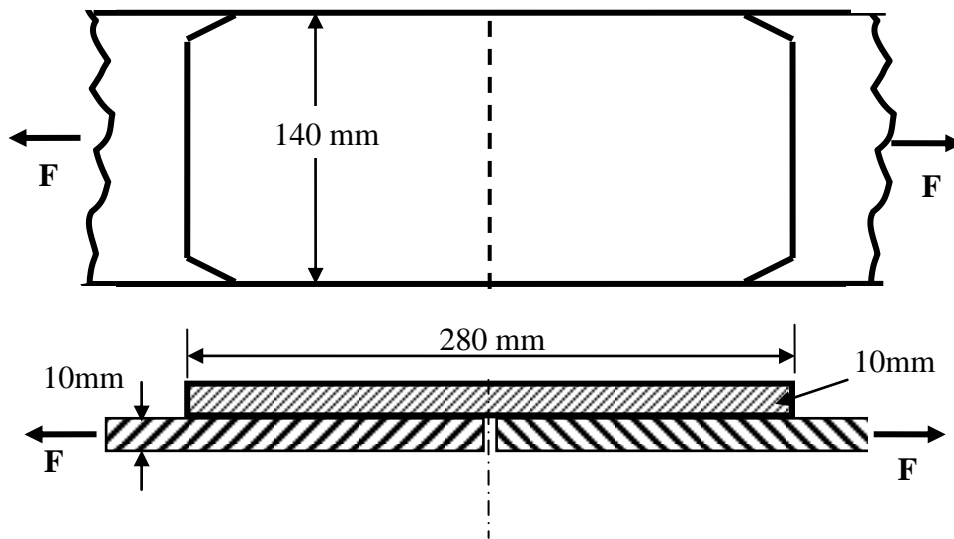


• **Exemple 3.3**

On veut assembler, à l'aide de rivets dont le diamètre de chacun vaut 20 mm et d'un couvre joint, deux tôles métalliques de 140 mm de largeur et 10 mm d'épaisseur. L'ensemble est soumis à un effort de traction  $F = 10\,000\text{ daN}$ , comme montré par la figure ci-dessous.

1- Déterminer le nombre de rivets nécessaires à cet assemblage si la contrainte admissible de cisaillement  $[\tau]$ , pour chaque rivet, est égale à la 90 MPa.

2- Vérifier la résistance du système si la contrainte admissible pour chacune des deux tôles est  $12\text{ daN/mm}^2$ .

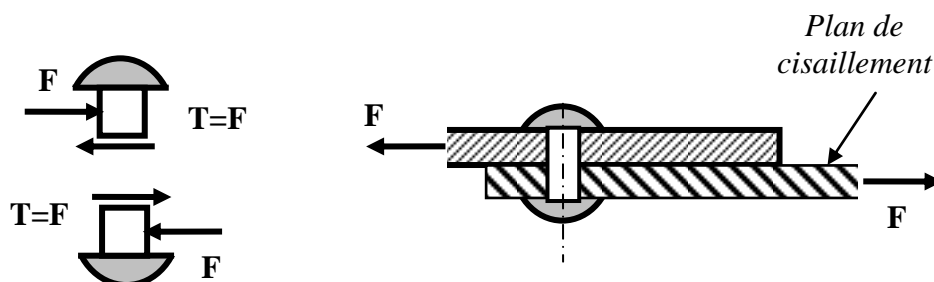


• **Solution de l'exemple 3.3**

1- Nous avons ici un seul plan de cisaillement. La force de cisaillement (effort tranchant) appliquée à la section cisailée, au niveau du plan de cisaillement est

$$T_1 = \frac{F}{n}$$

Où  $n$  est le nombre de rivets.



S'il y a un seul rivet, alors

$$T = F$$

La contrainte de cisaillement sur la section cisailée (revenant à chaque rivet) est

$$\tau_1 = \frac{T_1}{A_1}; \quad A_1 = \frac{\pi d^2}{4}$$

La condition de résistance étant

$$\tau_1 \leq [\tau]$$

Alors, on écrit

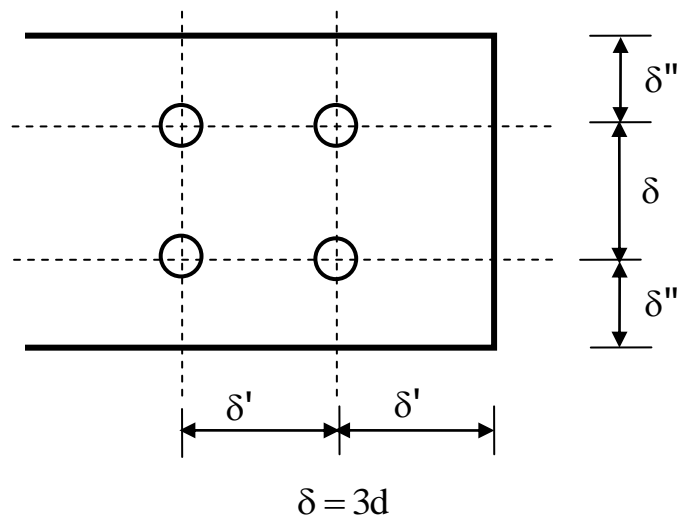
$$\tau_1 = \frac{10000/n}{\pi(20)^2/4} \leq 9$$

$$\Rightarrow n \geq 3,5$$

Le nombre de rivets nécessaire à cet assemblage est donc

$$n = 4$$

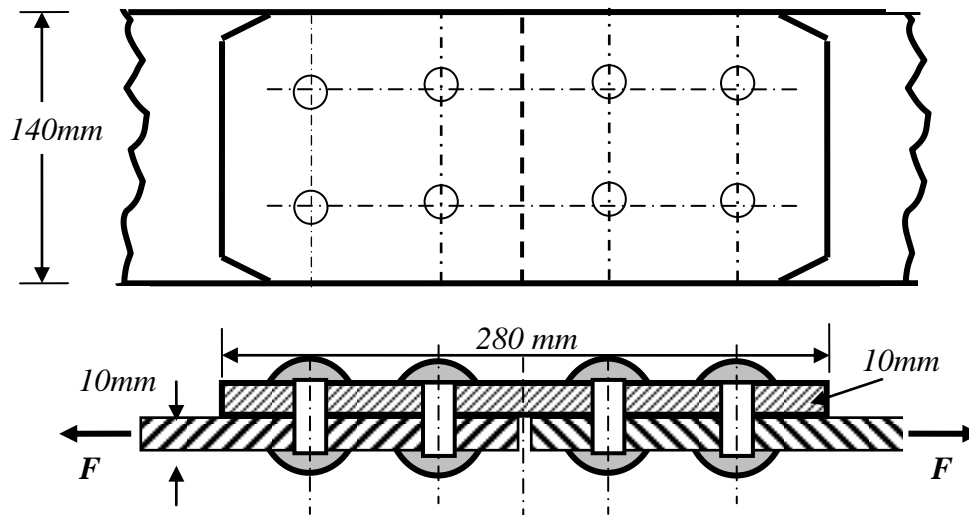
Les dispositions pratiques des rivets se fait selon les conditions suivantes



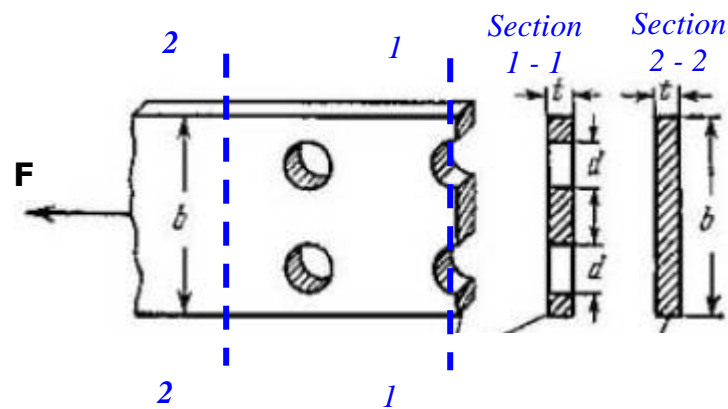
$\delta'$  au voisinage de  $1,5d$

$$1,5d \leq \delta'' \leq 2,5d$$

Selon ces conditions, le nombre de rivets obtenu est disposé sur la figure ci-dessous.



1- Pour vérifier la résistance du système, on doit vérifier la résistance de chacune des deux tôles au niveau de la section dangereuse qui passe naturellement par les axes des rivets, comme montrée ci-dessous, avec  $b = 14 \text{ mm}$ ,  $t = 10 \text{ mm}$ ,  $d = 20 \text{ mm}$ .



$$\sigma_{1-1} = \frac{N}{A_{1-1}}; \quad N = F; \quad A_{1-1} = t(b - 2d)$$

$$\sigma_{1-1} = \frac{10000}{10(140 - 2 \times 20)} = 10 \text{ daN} / \text{mm}^2$$

La condition de résistance pour la traction

$$\sigma_{1-1} \leq [\sigma]$$

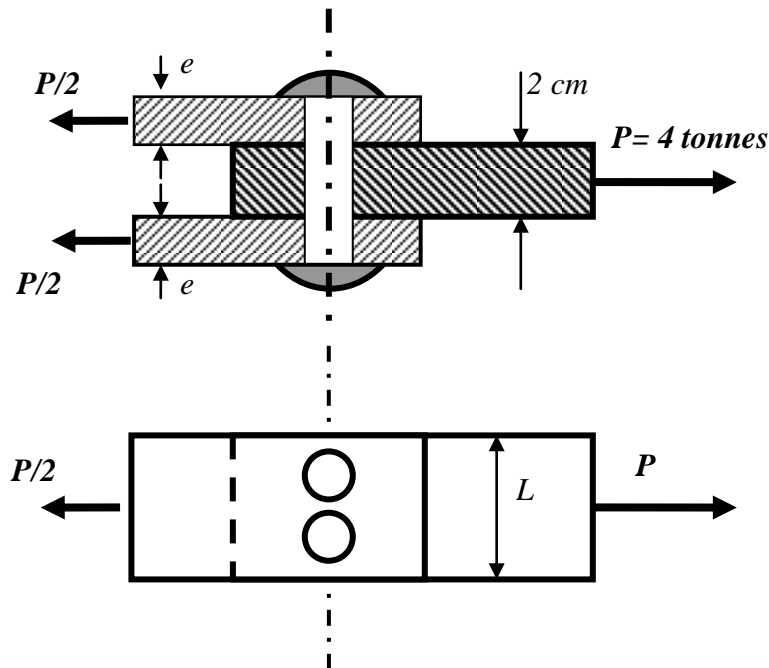
est vérifiée, alors le système résiste à l'effort de traction appliqué.

• **Exemple 3.4**

Trois tôles en acier sont assemblées entre elles par deux rivets de diamètre chacun égale à 17 mm.

1- Vérifier la résistance des rivets si la contrainte admissible de cisaillement  $[\tau] = 900 \text{ kg/cm}^2$ .

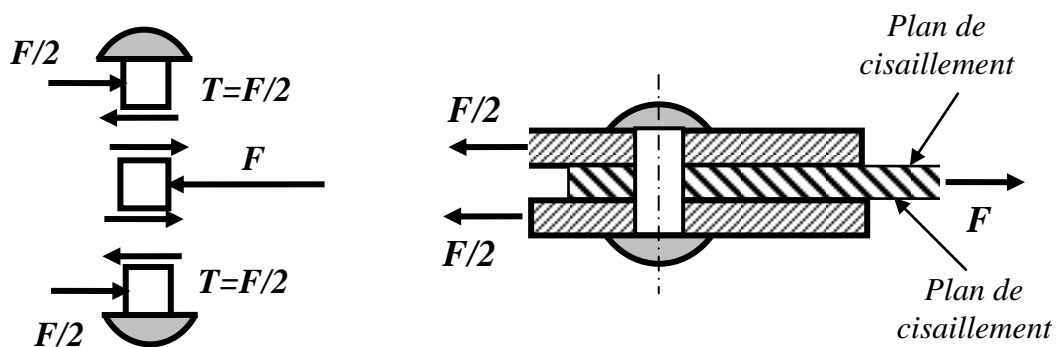
2- Déterminer l'épaisseur minimale de chacune des deux tôles si  $[\sigma] = 1200 \text{ kg/cm}^2$ .



• **Solution de l'exemple 3.4**

1- Nous avons ici deux plans de cisaillement. La force de cisaillement (effort tranchant) appliquée à la section cisillée, au niveau d'un **seul plan** de cisaillement est

$$T_1 = \frac{F}{2}$$



S'il y a  $n$  est rivets.

$$T_I = \frac{F/n}{2}$$

La contrainte de cisaillement sur la section cisailée (revenant à chaque rivet) est

$$\tau_I = \frac{F/2n}{A_I}; \quad A_I = \frac{\pi d^2}{4}$$

Avec la condition de résistance

$$\tau_I \leq [\tau]$$

on écrit

$$\tau_I = \frac{2F}{n\pi(d)^2} \leq [\tau]$$

$$\tau_I = \frac{2 \times 4 \cdot 10^3}{2\pi(17)^2} = 440,6 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_I = 440,6 \text{ kg/cm}^2 \leq [\tau] = 900 \text{ kg/cm}^2$$

Alors la résistance des rivets est vérifiée.

2- La contrainte normale dans une des deux tôles à la section dangereuse est

$$\sigma_{I-I} = \frac{N}{A_{I-I}} = \frac{F/2}{e(5 - 2 \times 1,7)}$$

$$\sigma_{I-I} = \frac{2 \cdot 10^3}{1,6 \cdot e} \leq 1200$$

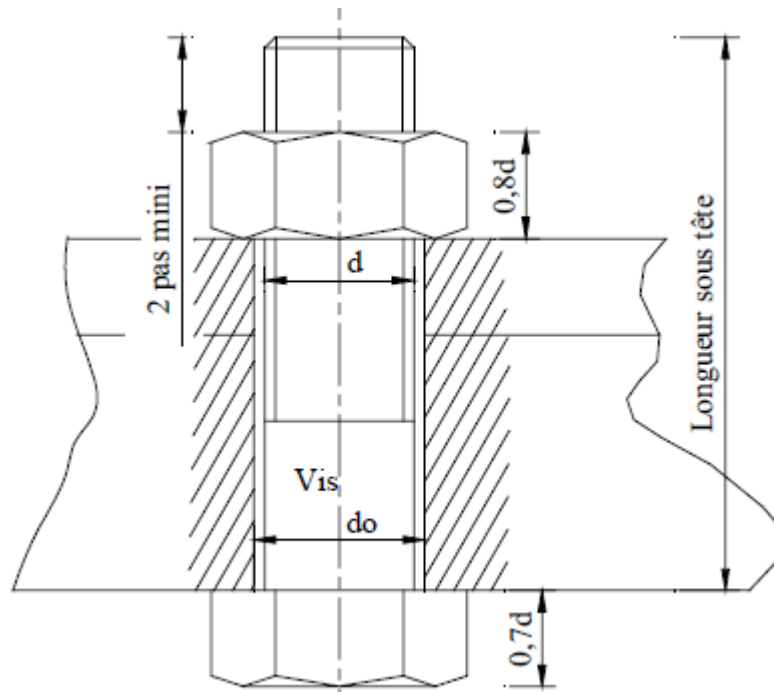
$$\Rightarrow e \geq 1,04 \text{ cm}$$

Donc l'épaisseur minimale que devrait avoir chacune de deux tôles est au moins égale à 10,4 mm.

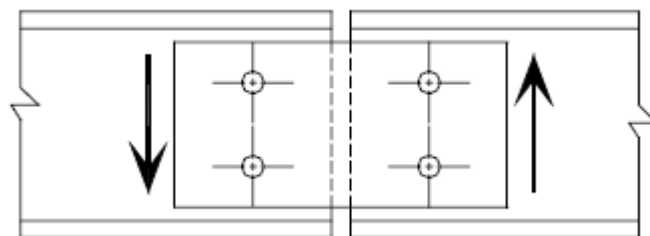
### 3.7.2. Assemblage par boulons

Les boulons sont composés d'une vis et d'un écrou (Fig. 3.6). Ils sont utilisés lorsque l'on désire démonter ultérieurement les pièces ou que les autres types d'assemblages mécaniques ne correspondent pas aux performances souhaitées.

Dans le cas de l'assemblage par boulons ordinaires, on empêche le déplacement relatif des éléments de l'assemblage en amenant ces éléments au contact du corps de la vis. C'est alors la résistance au cisaillement de la vis qui assure la tenue de l'assemblage (Fig. 3.7).



**Fig. 3.6-** Schématisation d'un boulon.



**Fig. 3.7-** Boulons opposés à la translation des 2 profils.

Le calcul au cisaillement se fait de la même manière que pour les rivets. De plus, lors de l'assemblage, le boulon doit vérifier:

- 1- Le serrage du boulon de sorte que le diamètre de la vis soit égal à celui du trou qui lui est destiné. Les trous sont, en général, percés à un diamètre supérieur de 1 à 2 mm environ du diamètre nominal de la vis (Fig. 3.6).

- 2- La résistance au glissement. En effet, lors du serrage, la vis du boulon sera soumise à un effort de traction  $N$  (Fig. 3.8). Cet effort provoquera un cisaillement dans la surface:

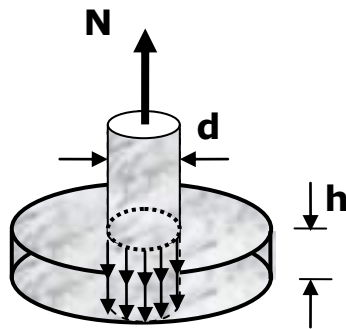
$$A_c = \pi.d.h$$

La condition de résistance au cisaillement sera donc:

$$\tau = \frac{N}{A_c} \leq [\tau]$$

La condition de résistance à la traction et par conséquent:

$$\sigma = \frac{N}{A_t} \leq [\sigma]; \quad A_t = \frac{\pi d^2}{4}$$



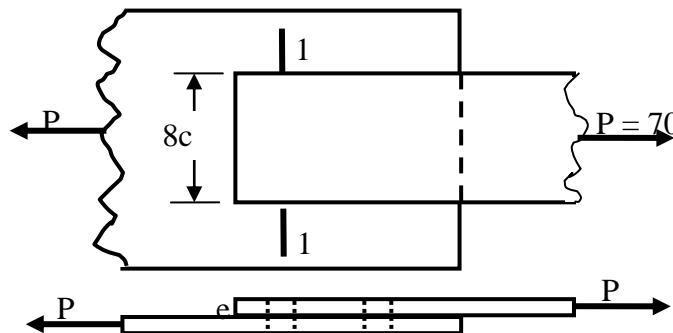
**Fig. 3.8-** Tête du boulon soumise au cisaillement.

## Exercices

### Exercice N°1

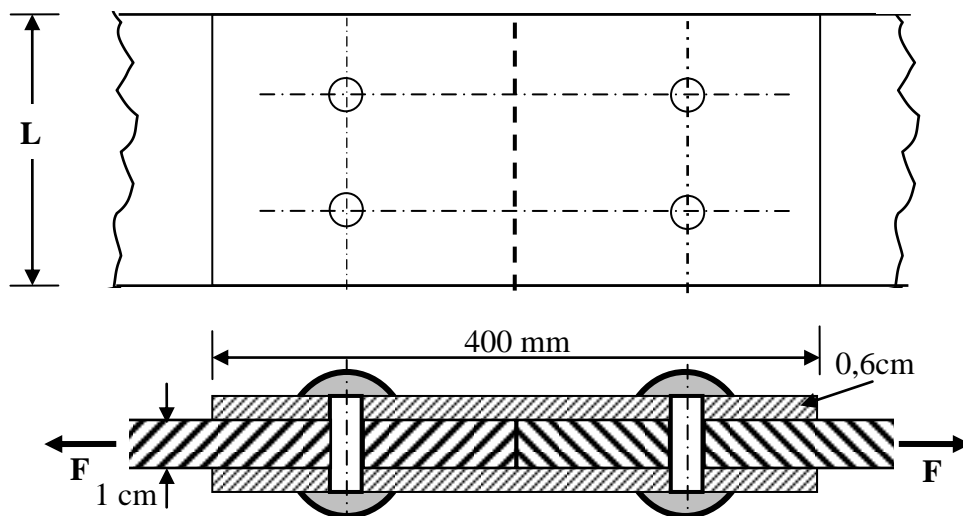
Une barre en acier d'épaisseur  $e = 10 \text{ mm}$  est reliée au reste d'une structure par l'intermédiaire d'un gousset, également en acier, de contrainte admissible  $[\sigma] = 14 \text{ kN/cm}^2$ . Les deux pièces sont assemblées entre elles à l'aide d'un nombre  $n$  de rivets de diamètres chacun égal à  $17 \text{ mm}$  et de contrainte admissible  $[\tau] = 8 \text{ kN/cm}^2$  répartis comme le montre la figure ci-dessous.

- 1- Quel est le nombre de rivets nécessaire à cet assemblage?
- 2- La barre en acier supportera-t-elle la charge appliquée ? Justifier votre réponse.



### Exercice N°2

Deux pièces métalliques dont l'épaisseur de chacune est égale à **1 cm**, sont assemblées à l'aide de **4** rivets dont le diamètre de chacun vaut à **16 mm** et de deux couvres joints d'épaisseur égale à **0,6 cm**, comme le montre la figure ci-dessous. La contrainte admissible dans les rivets est de **75 MN/m<sup>2</sup>**.

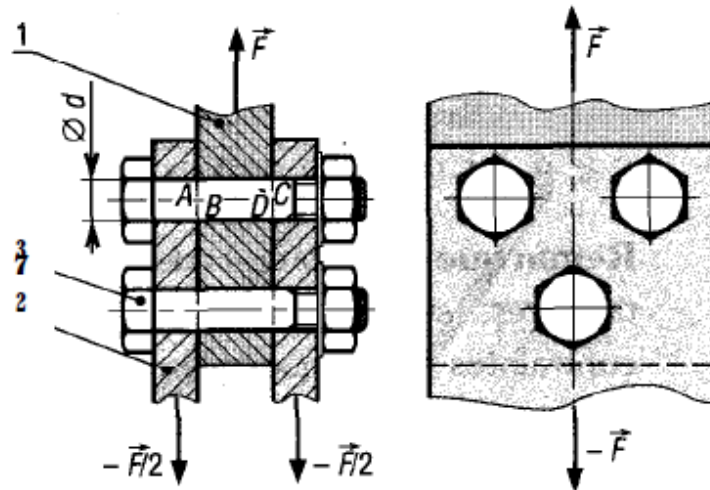


- 1- Déterminer l'effort **F (kN)** que supporterait l'ensemble des rivets.
- 2- Dimensionner les barres si la contrainte admissible du matériau les constituant est de **16 daN/mm<sup>2</sup>**.

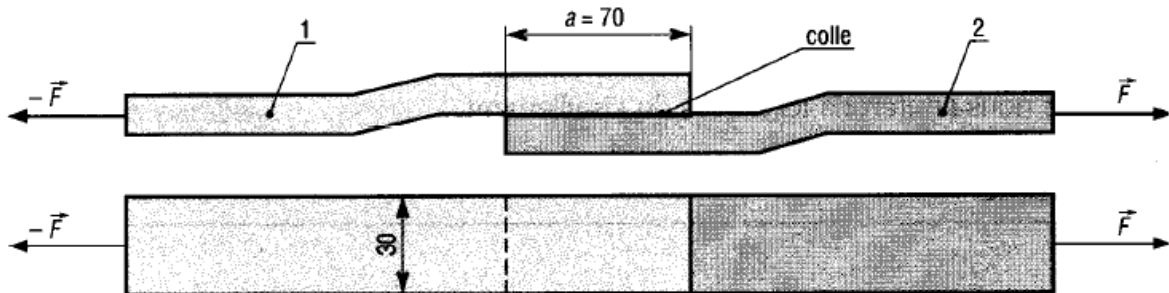


**Exercice N°3**

Pour l'assemblage proposé, à trois boulons ajustés en acier,  $d=12\text{mm}$ , la contrainte admissible au cisaillement des boulons est égale à  $30\text{ daN.mm}^{-2}$ . Déterminer l'effort admissible  $F$ .

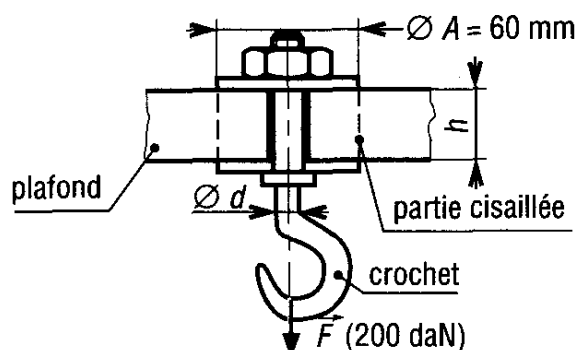
**Exercice N°4**

Les plats 1 et 2 sont collés comme l'indique la figure. La résistance à la rupture en traction de la colle est de  $235\text{ daN.cm}^{-2}$ , sa résistance au cisaillement est de  $175\text{ daN.cm}^{-2}$ . La colle étant uniformément répartie sur la surface rectangulaire ( $30 \times 70$ ), déterminer l'effort de traction admissible  $F$  par l'assemblage.

**Exercice N°5**

Un crochet est fié dans un plafond de hauteur  $h$  et supporte une charge verticale  $F$  de  $200\text{ daN}$ .

- Si la contrainte admissible au cisaillement du matériau du plafond est de  $1\text{ MPa}$ , déterminer  $h$ .
- Si la contrainte admissible en traction du crochet est de  $100\text{ MPa}$ , déterminer son diamètre  $d$ .



## CHAPITRE 4

---

# CARACTÉRISTIQUES GÉOMÉTRIQUES DES SECTIONS PLANES

---

## 4.1. Introduction

Pour une sollicitation de traction ou compression simple, seule la donnée de l'aire de la section droite est nécessaire pour étudier ou vérifier la résistance d'une section d'une poutre par exemple. Pour toutes les autres sollicitations, la forme et les dimensions de la section droite de la poutre jouent un rôle prépondérant sur le comportement aux différentes sollicitations de torsion ou de flexion. Nous allons nous intéresser dans le présent chapitre aux caractéristiques suivantes :

- Aire d'une section
- Moment statique par rapport à une droite (ou un axe)
- Centre de gravité
- Moment quadratique d'une section par rapport à une droite (ou un axe)
- Moment de résistance

## 4.2. Aire d'une section

Par définition l'aire  $A$  d'une section est définie par l'intégrale:

$$A = \int_A dA \quad (4.1)$$

### • Exemple 4.1

Calculer l'aire d'un triangle.

### • Solution 4.1

Soit la surface triangulaire plane montrée par la figure ci-dessous.

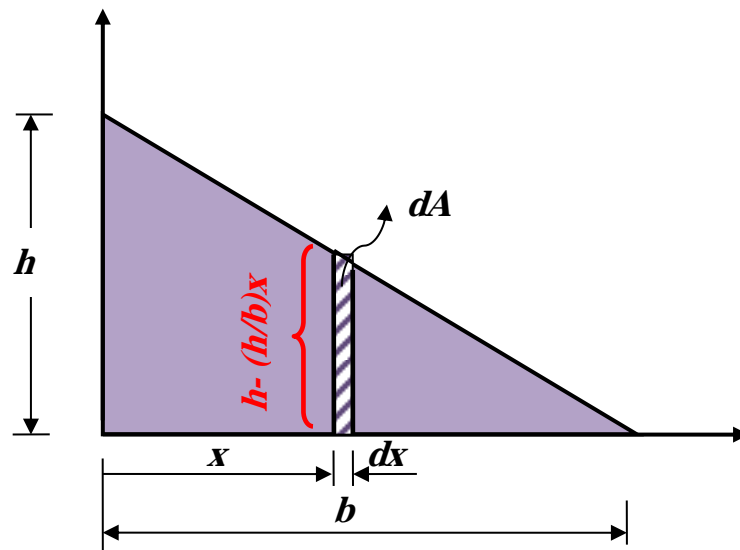


Fig. E4.1

Considérons une surface élémentaire telle que:

$$dA = h \left( 1 - \frac{x}{b} \right) dx$$

$$A = \int_A dA = \int_0^b h \left( 1 - \frac{x}{b} \right) dx = \frac{bh}{2}$$

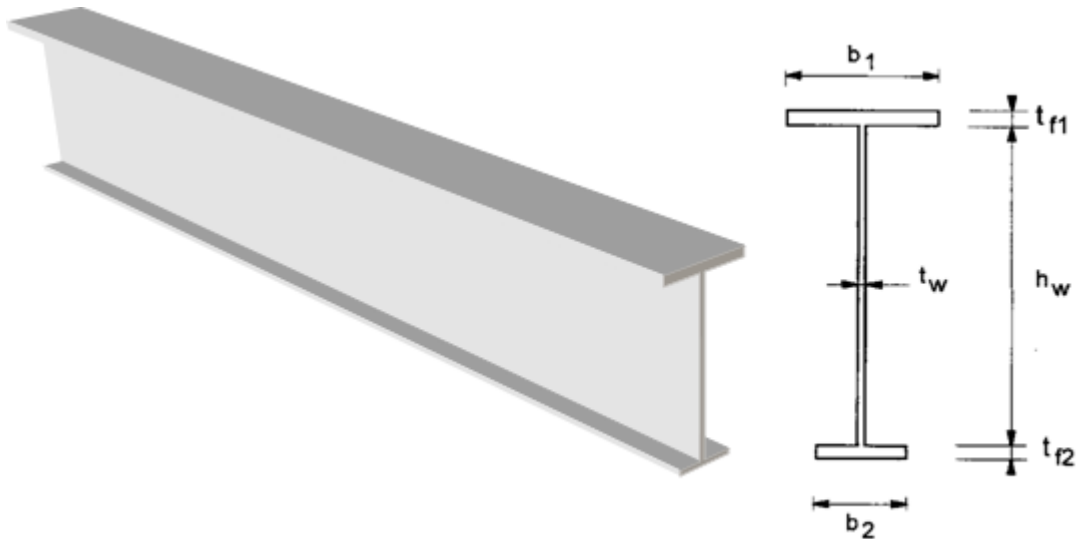
- **Remarque**

Si la section est composée, nous la décomposons en sections usuelles et l'aire est calculée comme:

$$A = \sum_{i=1}^n A_i$$

- **Exemple 4.2**

Calculer l'aire de la section droite de la poutre montrée par la figure ci-dessous. On donne  $b_1 = 300 \text{ mm}$ ,  $b_2 = 150 \text{ mm}$ ,  $t_w = 10 \text{ mm}$ ,  $t_{f1} = 20 \text{ mm}$ ,  $t_{f2} = 15 \text{ mm}$ ,  $h_w = 1000 \text{ mm}$ .



**Fig. E4.2**

- **Solution 4.2**

$$A = b_1 \times t_{f1} + b_2 \times t_{f2} + t_w \times h_w$$

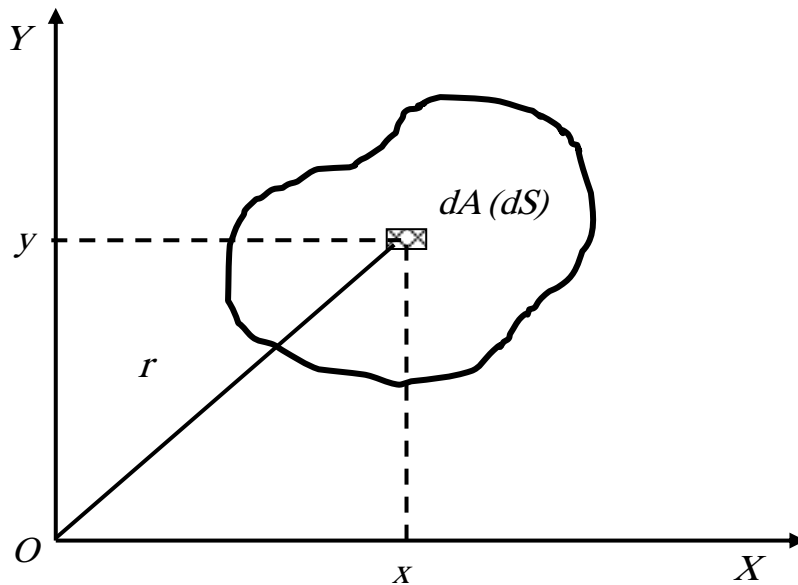
$$A = 300 \times 20 + 150 \times 15 + 10 \times 1000 = 18250 \text{ mm}^2$$

### 4.3. Moment statique

Le moment statique  $S$  d'une section par rapport à un axe  $ox$  ou  $oy$  (Fig. 4.1) est donné par l'une des expressions suivantes:

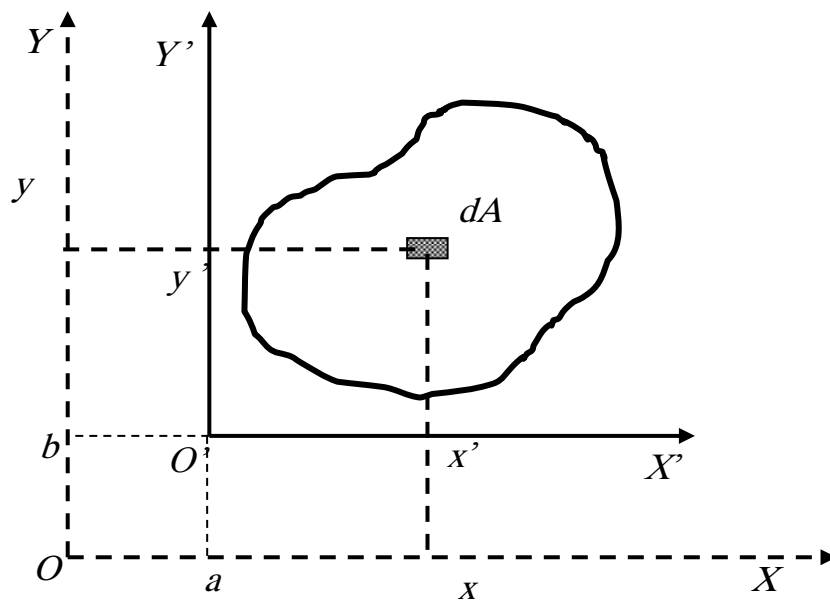
$$S_X = \int_A y dA \quad (4.2)$$

$$S_Y = \int_A x dA \quad (4.3)$$



**Fig. 4.1-** Section plane.

Si on procède à des translations parallèlement aux axes  $ox$  et  $oy$ , les moments statiques changent. Soit la section montrée par la figure (4.2) telle que  $S_X$ ,  $S_Y$ ,  $A$  sont connus et on se propose de déterminer  $S_{X'}$  et  $S_{Y'}$ .



**Fig. 4.2-** Translation des axes.

De la figure (4.2), on a:

$$x' = x - a \quad ; \quad y' = y - b$$

Par définition, on a:

$$S_{X'} = \int_A y' dA = \int_A (y - b) dA$$

$$S_{Y'} = \int_A x' dA = \int_A (x - a) dA$$

d'où:

$$S_{X'} = S_X - b.A \quad (4.4)$$

$$S_{Y'} = S_Y - a.A \quad (4.5)$$

#### 4.4. Centre de gravité

On peut choisir  $a$  et  $b$  de sorte que  $S_{X'}$  et  $S_{Y'}$  soient nuls, c-à-d :

$$a = S_Y/A \quad ; \quad b = S_X/A$$

- l'axe pour lequel le moment statique est nul s'appelle axe **central**
- le point d'intersection de deux axes centraux s'appelle **centre de gravité** d'une section.

Ainsi, les coordonnées du centre de gravité d'une section s'écrivent :

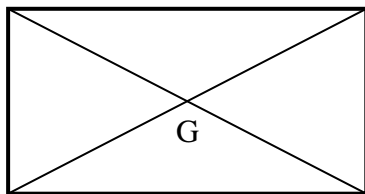
$$x_G = S_Y/A \quad ; \quad y_G = S_X/A \quad (4.6)$$

##### • Définition

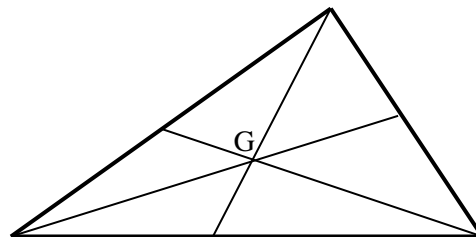
Le centre de gravité  $G$  d'une section est le point tel que le moment statique de la section par rapport à n'importe quel axe passant par ce point est nul.

On peut dire que le moment statique d'une section est égal au produit de l'aire de la section par la distance entre son centre de gravité  $G$  et l'axe.

Les figures (4.3) et (4.4) montrent des exemples de positions de centres de gravité.



**Fig. 4.3-** Aire rectangulaire.



**Fig. 4.4-** Aire triangulaire.

- **Remarque**

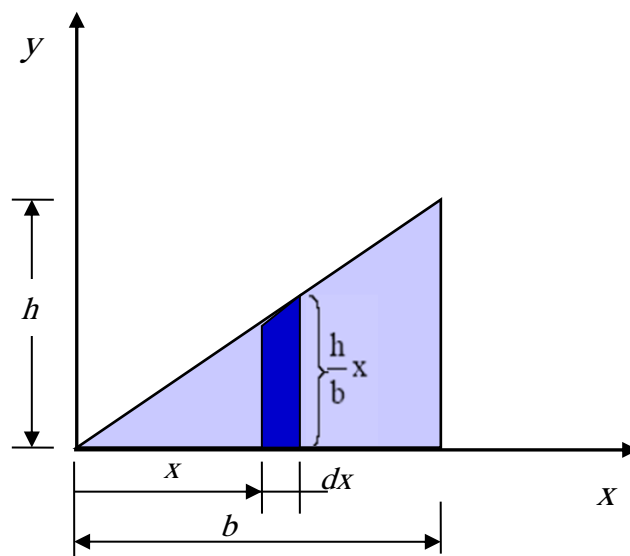
Pour une section composée, les coordonnées du centre de gravité sont données par les expressions:

$$S_x = \sum y_{Gi} A_i ; i = 1, n \quad (4.7)$$

$$S_y = \sum x_{Gi} A_i ; i = 1, n \quad (4.8)$$

- **Exemple 4.3**

Déterminer les coordonnées du centre de gravité de la section triangulaire ci-dessous.



**Fig. E4.3**

- **Solution 4.3**

$$X_G = \frac{\int_A x dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^b x \left( \frac{h}{b} x dx \right)}{\int_0^b \frac{h}{b} x dx}$$

D'où

$$X_G = \frac{2}{3} b$$

$$Y_G = \frac{\int_A y dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^b \frac{1}{2} \left( \frac{h}{b} x \right) \left( \frac{h}{b} x dx \right)}{\int_0^b \frac{h}{b} x dx}$$

D'où

$$Y_G = \frac{I}{3}h$$

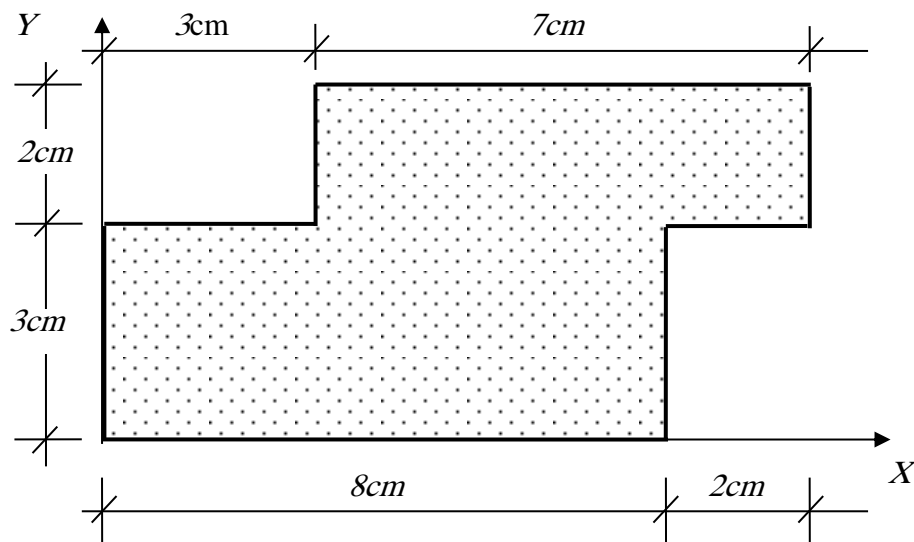
### • Propriétés

Si la section possède un axe de symétrie, le centre de gravité  $G$  est situé sur cet axe. A défaut d'axes de symétrie on procède à:

- Choisir un référentiel  $(O, x, y)$
- Calculer le moment statique  $S$  de la section par rapport aux axes du référentiel
- Calculer l'aire totale de la section
- Utiliser la propriété du moment statique  $S_Y = X_G \cdot A$ ,  $S_X = Y_G \cdot A$

### • Exemple 4.4

Calculer les coordonnées du centre de gravité de la section plane suivante.



**Fig. E4.4**

### • Solution 4.4

$$S_X = 2,5(5 \times 10) - 4(2 \times 3) - 1,5(3 \times 2) = 125 - 24 - 9 = 92 \text{ cm}^3$$

$$S_Y = 5(5 \times 10) - 1,5(2 \times 3) - 9(3 \times 2) = 250 - 9 - 54 = 187 \text{ cm}^3$$

$$X_G = S_Y / A = 187 / 38 = 4,9 \text{ cm}$$

$$Y_G = S_X / A = 92 / 38 = 2,4 \text{ cm}$$



## 4.5. Moment d'inertie

### 4.5.1. Définition

On définit le moment d'inertie ou moment quadratique d'une section comme le **degré de résistance** de cette section aux efforts extérieurs appliqués, en tenant compte de la forme de cette section.

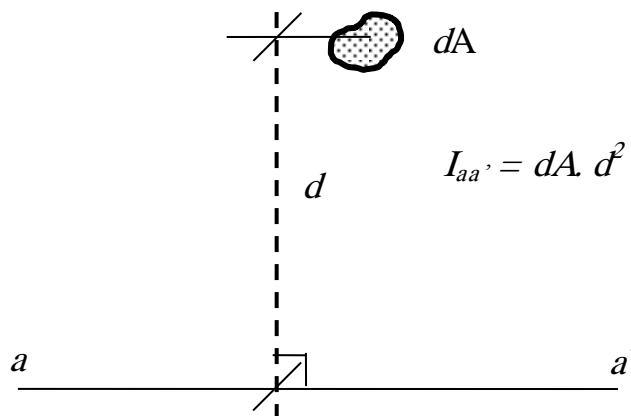
Par définition, les intégrales:

$$I_x = \int_A y^2 dA \quad (4.9)$$

$$I_y = \int_A x^2 dA \quad (4.10)$$

S'appellent moments d'inertie de la section  $A$  par rapport aux axes  $ox$  et  $oy$ , respectivement, conformément à la figure 4.1. Ces expressions sont déduites de la définition suivante.

Le moment d'inertie d'une surface infiniment petite par rapport à un axe éloigné de cette surface est égal au produit de son aire par le carré de la distance à l'axe. Il est toujours positif et s'exprime en  $m^4 (cm^4, mm^4)$ .



**Fig. 4.5** Moment quadratique d'une section.

L'intégrale:

$$I_{xy} = \int_A xy dA \quad (4.11)$$

S'appelle moment centrifuge ou produit d'inertie de la section  $A$  par rapport au système  $xoy$ .

- **Remarque**

Les moments quadratiques  $I_x$  et  $I_y$  sont toujours positifs, tandis que le moment produit  $I_{xy}$  peut être positif, négatif ou nul.

- **Exemple 4.5**

Calculer les moments quadratiques par rapport aux axes  $o'x'$  et  $o'y'$  et le moment produit pour le rectangle montré par la figure suivante.

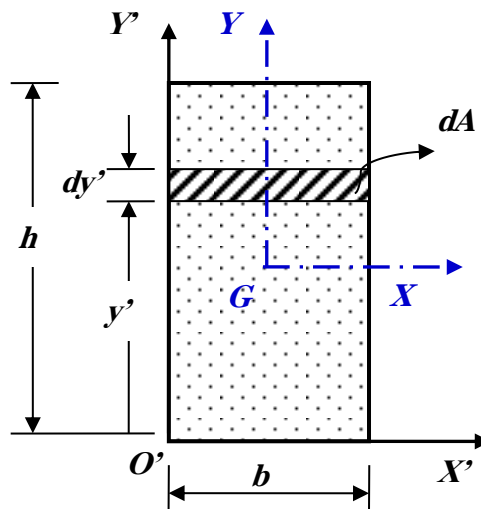


Fig. E4.5

- **Solution 4.5**

$$I_{x'} = \int_A y'^2 dA$$

$$I_{x'} = \int_0^h y'^2 \cdot b \cdot dy' = \frac{bh^3}{3}$$

De la même manière

$$I_{y'} = \int_A x'^2 dA = \frac{b^3 h}{3}$$

et

$$I_{x'y'} = \int_A x' \cdot y'^2 dA$$

$$I_{x'y'} = \int_0^h \int_0^b x' \cdot y' \cdot dx' \cdot dy' = \frac{b^2 h^2}{4}$$

### 4.5.2. Moment d'inertie polaire

Le moment d'inertie polaire de la section montrée par la figure 4.1 est donné par la relation:

$$I_P = \int_A r^2 dA \quad (4.12)$$

Avec

$$r^2 = x^2 + y^2$$

d'où

$$I_P = I_x + I_y \quad (4.13)$$

Le moment d'inertie polaire est toujours positif et n'est jamais nul.

- **Théorème**

Le moment d'inertie polaire d'une section par rapport à tout point de cette section est égal à la somme des moments d'inertie par rapport à deux axes perpendiculaires passant par ce point.

- **Exemple 4.6**

Pour le quart de cercle montré par la figure (E4.6-a), calculer le moment quadratique polaire  $I_O$ .

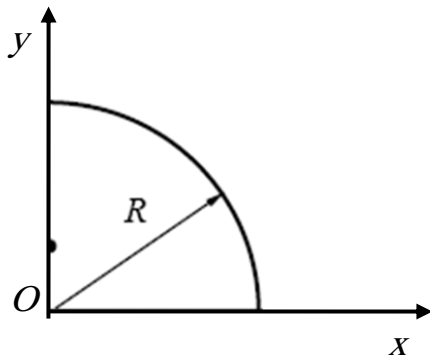


Fig. E4.6-a

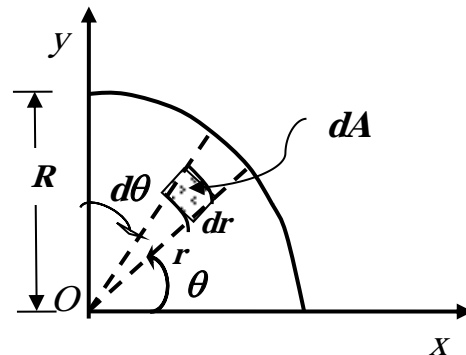


Fig. E4.6-b

- **Solution 4.6**

De la définition du moment d'inertie polaire et la figure (E4.6-b) on écrit:

$$I_O = \int_A r^2 dA = \int_A r^2 (r dr d\theta)$$

$$I_o = \left( \int_0^R r^3 dr \right) \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \right) = \frac{\pi R^4}{8}$$

ou en terme du diamètre

$$I_o = \frac{\pi D^4}{128}$$

## 4.6. Variations des moments d'inertie

### 4.6.1. Translation des axes

Soit une section  $A$ , ses moments d'inertie dans le système  $xoy$ :  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_{xy}$  sont connus. On se propose de calculer les moments d'inertie de la section  $A$  dans le système  $x'o'y'$  en procédant aux translations des axes  $ox$  et  $oy$  conformément à la figure 4.6.

$$x' = x + a \quad ; \quad y' = y + b$$

$$\begin{aligned} I_{x'} &= \int_A y'^2 dA = \int_A (y + b)^2 dA \\ &= \int_A y^2 dA + 2b \int_A y dA + b^2 \int_A dA \end{aligned}$$

D'où

$$I_{x'} = I_x + 2bS_x + b^2 A \quad (4.14)$$

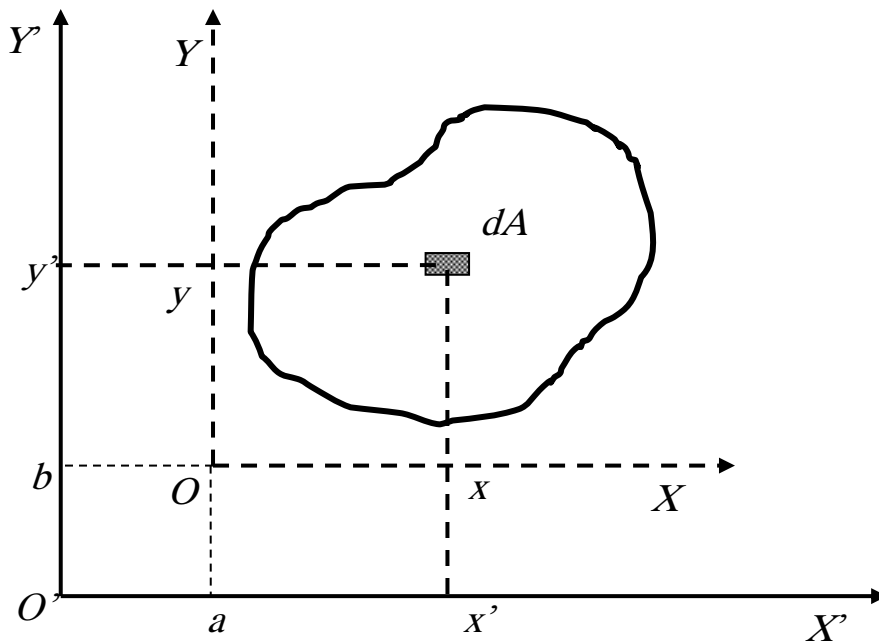
On suit le même raisonnement pour  $I_{y'}$  et  $I_{x'y'}$ .

Si le point  $O$  coïncide avec le centre de gravité  $G$ , les moments statiques  $S_x$  et  $S_y$  deviennent nuls et on a:

$$I_{x'} = I_x + b^2 A \quad (4.15)$$

$$I_{y'} = I_y + a^2 A \quad (4.16)$$

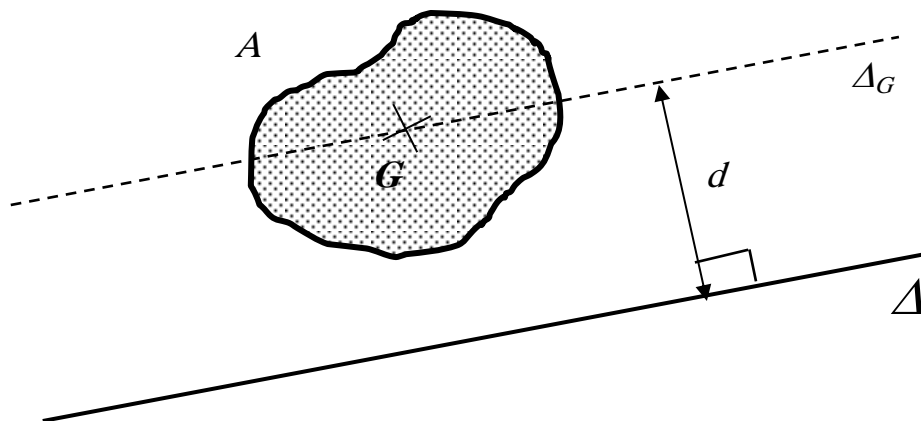
$$I_{x'y'} = I_{xy} + abA \quad (4.17)$$



**Fig. 4.6** Moment d'inertie d'une section et translation des axes.

- ***Théorème de Huygens***

Le moment d'inertie d'une section par rapport à un axe quelconque  $\Delta$  est égal au moment d'inertie de la section par rapport à l'axe passant par son centre de gravité et parallèle à  $\Delta$  augmenté du produit de l'aire de la section par le carré de la distance entre les deux axes.



**Fig. 4.7-** Schématisation du théorème de Huygens.

$$I_{\Delta} = I_{\Delta_G} + d^2 A \quad (4.18)$$

• **Exemple 4.7**

Déterminer les moments d'inertie par rapport au système  $xOy$  pour le rectangle montré par la figure ci-dessous.

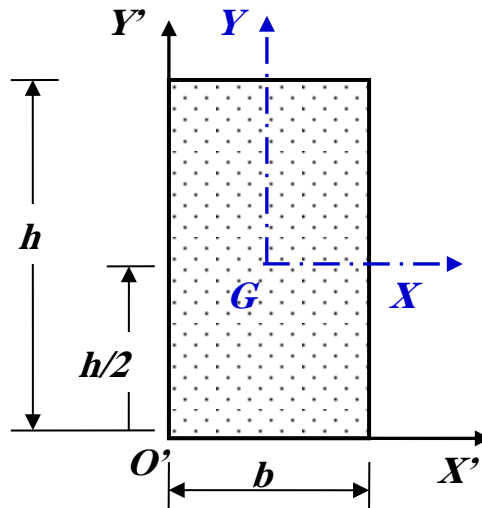


Fig. E4.7

• **Solution 4.7**

De la relation de Huygens on écrit:

$$I_x = I_{x'} - d^2 A$$

$$= \frac{bh^3}{3} - \left(\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{bh^3}{12}$$

et

$$I_y = I_{y'} - d^2 A$$

$$= \frac{b^3 h}{3} - \left(\frac{b}{2}\right)^2 bh = \frac{b^3 h}{12}$$

De même

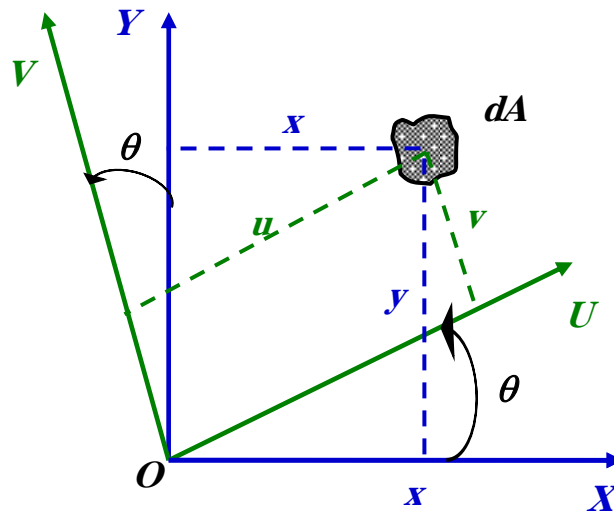
$$I_{xy} = I_{x'y'} - abA$$

$$= \frac{b^2 h^2}{4} - \frac{b}{2} \frac{h}{2} bh = 0$$

Car les axes  $x$  et  $y$  sont centraux.

#### 4.6.2. Rotation des axes

Soit une section  $A$ , ses moments d'inertie dans le système  $xOy$   $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_{xy}$  sont connus. On se propose de calculer les moments d'inertie de la section  $A$  dans le système  $uOv$  qui fait un angle  $\theta$  avec le système  $xOy$  (Fig. 4.8).



**Fig. 4.8-** Moment d'inertie d'une section et rotation des axes.

D'après la figure (4.8)

$$u = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$v = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

En utilisant la définition du moment d'inertie, on écrit:

$$\begin{aligned} I_u &= \int_A v^2 dA \\ &= \cos^2 \theta \int_A y^2 dA + \sin^2 \theta \int_A x^2 dA - 2 \sin \theta \cos \theta \int_A xy dA \\ &= \cos^2 \theta I_x + \sin^2 \theta I_y - 2 \sin \theta \cos \theta I_{xy} \end{aligned}$$

En utilisant les relations trigonométriques:

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}; \quad \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$$

l'expression ci-dessus devient:

$$I_u = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} I_x + \frac{1 - \cos 2\theta}{2} I_y - \frac{1}{2} \sin 2\theta I_{xy}$$

Ou bien,

$$I_u = \frac{I}{2}(I_x + I_y) + \frac{I}{2}(I_x - I_y)\cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta \quad (4.19)$$

En suivant le même raisonnement on obtient:

$$I_v = \frac{I}{2}(I_x + I_y) - \frac{I}{2}(I_x - I_y)\cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta \quad (4.20)$$

$$I_{uv} = \frac{I}{2}(I_x - I_y)\sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta \quad (4.21)$$

On remarque que

$$I_x + I_y = I_u + I_v \quad (4.22)$$

Cela signifie que la somme des moments quadratiques par rapport à deux axes perpendiculaires reste constante quelque soit la valeur de l'angle de rotation  $\theta$ .

On remarque aussi que  $I_u$  et  $I_v$  oscillent autour de la valeur moyenne  $\frac{I_x + I_y}{2}$ .

En dérivant  $I_u$  et  $I_v$  par rapport à  $2\theta$  on obtient:

$$-\frac{dI_u}{d(2\theta)} = +\frac{dI_v}{d(2\theta)}$$

Les extrema sont donnés pour:

$$\frac{d}{d(2\theta)} = 0$$

D'où

$$\operatorname{tg} 2\theta = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \quad (4.23)$$

Cette relation est satisfaite pour deux valeurs de  $\theta$  entre 0 et  $\pi$  qui correspondent à un maximum  $I_1$  ( $I_{max}$ ) et un minimum  $I_2$  ( $I_{min}$ ) qui sont les moments principaux d'inertie.

Les axes correspondant aux moments d'inertie principaux sont appelés axes principaux.

Pour déterminer ( $I_{max}$ ) et ( $I_{min}$ ), on peut utiliser le cercle de **Mohr**. Pour tracer le cercle de **Mohr**, on suit les étapes suivantes:

- 1- tracer un repère orthogonal et orthonormé ( $O, I_Q, I_{QR}$ ) (Fig. 4.9)
- 2- placer les points  $A(I_x, I_{xy})$  et  $B(I_y, -I_{xy})$  dans ce repère
- 3- déduire le point  $C$ , point d'intersection de la droite  $AB$  et l'axe des abscisses
- 4- déduire du cercle de **Mohr**  $I_{max}$  ( $I_1$ ) et  $I_{min}$  ( $I_2$ ):



on a

$$I_{max} = I_1 = \overline{OC} + R$$

$$I_{min} = I_2 = \overline{OC} - R$$

D'où

$$I_{max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + (I_{xy})^2} \quad (4.24)$$

$$I_{min} = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + (I_{xy})^2} \quad (4.25)$$

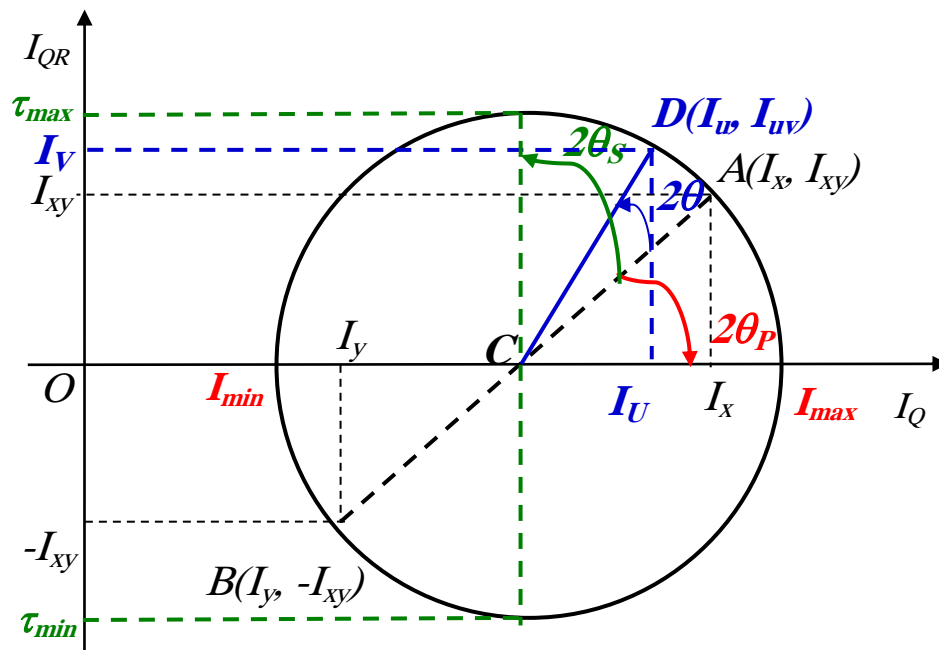


Fig. 4.9- Cercle de Mohr.

#### 4.7. Module de résistance

Le moment de résistance d'une section droite est le rapport entre le moment d'inertie axial et la distance la plus éloignée de cet axe.

$$W_x^{min} = \frac{I_x}{y_{max}}; \quad W_y^{min} = \frac{I_y}{x_{max}} \quad (4.25)$$

#### • Exemple 4.8

Soit pour la figure suivante déterminer le moment de résistance minimal.

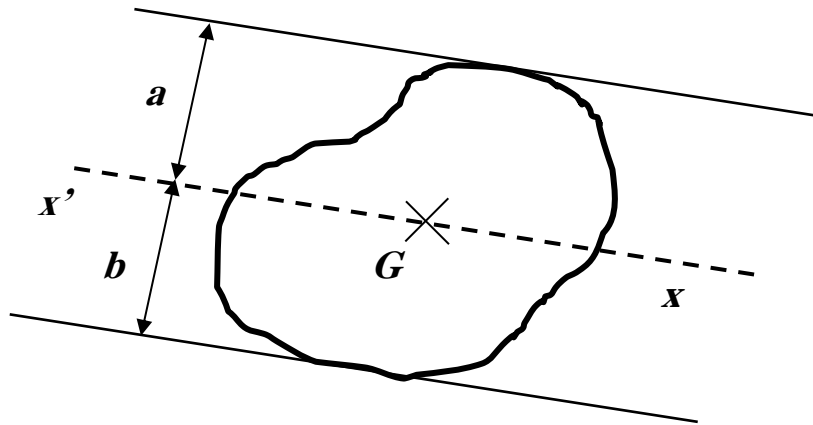


Fig. E4.8

• **Solution 4.8**

Deux cas se présentent :

- Si  $a < b \Rightarrow W_x^{min} = I_x / b$
- Si  $a > b \Rightarrow W_x^{min} = I_x / a$

#### 4.8. Rayon de giration

Le rayon de *giration d'une surface* A selon l'axe x ou l'axe y est défini par:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad \text{ou} \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad (4.26)$$

• **Exemple 4.9**

Calculer les rayons de giration d'un rectangle.

• **Solution 4.9**

Soit la surface rectangulaire montrée par la figure suivante:

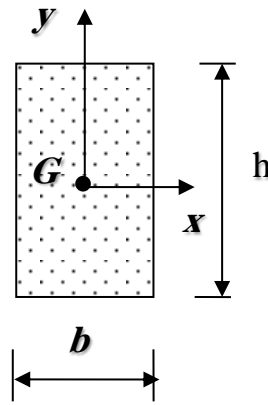


Fig. E4.9

Les rayons de giration sont:

$$i_x = \sqrt{\frac{(bh^3/12)}{bh}} \approx 0,3h \quad ; \quad i_y = \sqrt{\frac{(b^3h/12)}{bh}} \approx 0,3b$$

#### 4.8. Conclusion

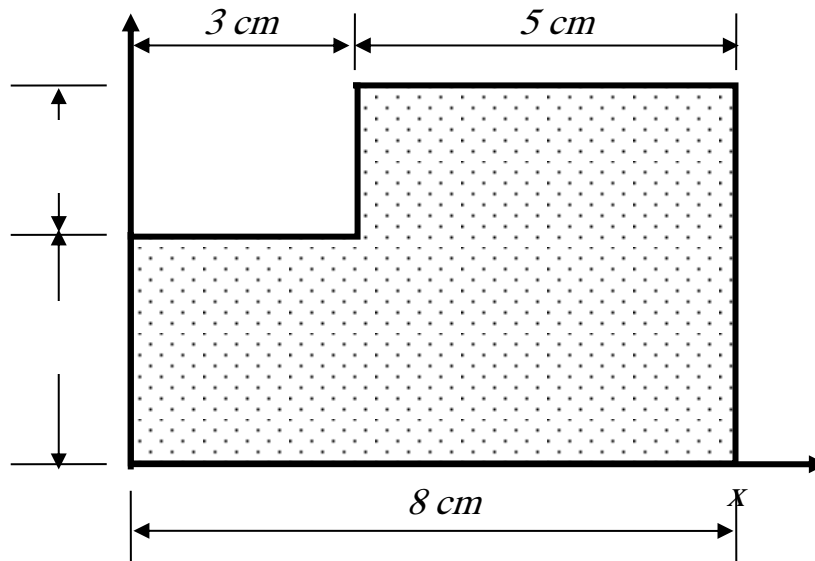
Dans ce chapitre, les caractéristiques géométriques des sections planes à manipuler dans le dimensionnement des éléments d'une structure sont présentées avec des exemples illustratifs.

Ce chapitre est accompagné de deux annexes. Dans la première annexe, les caractéristiques (aire, coordonnées du centre de gravité et moments quadratiques centraux) pour des sections usuelles sont données. Dans la deuxième annexe, on a présenté sous forme d'un tableau les étapes à suivre pour déterminer les moments d'inertie centraux pour des sections composées en procédant par décomposition en sections usuelles.

## Exercices

### Exercice N°1

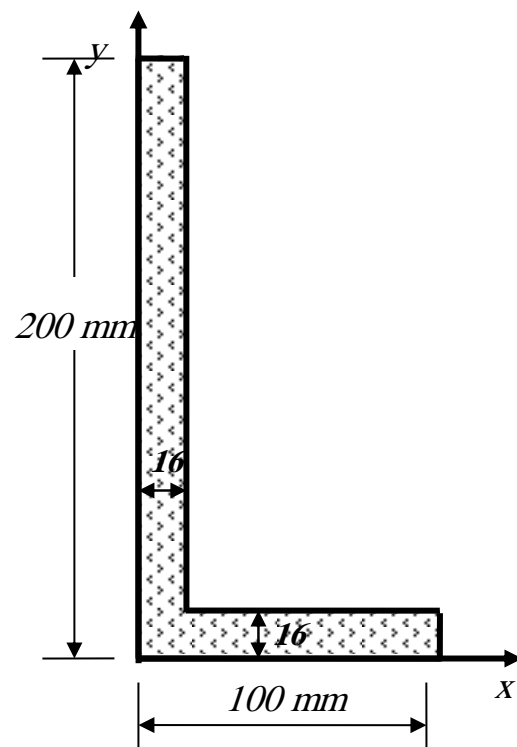
Déterminer l'aire et le centre de gravité de la section plane ci-dessous.



### Exercice N°2

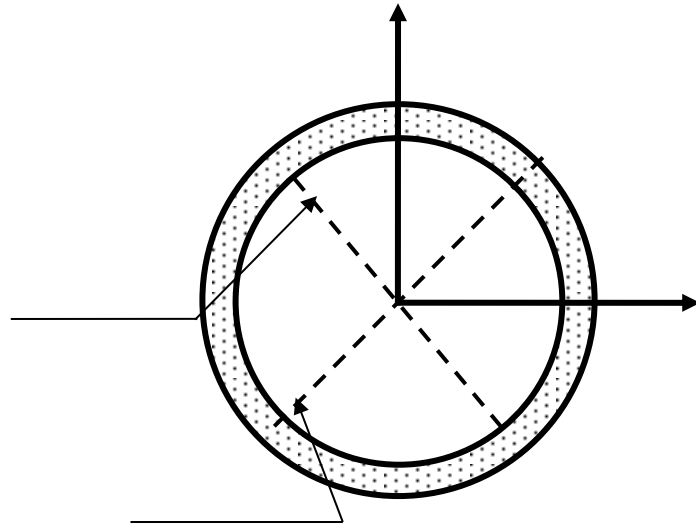
Déterminer les moments statique  $S_X$  et  $S_Y$  de la section représentée sur la figure ci-contre.

En déduire les coordonnées  $X_G$  et  $Y_G$  du centre de gravité de section.



**Exercice N°3**

Calculer, analytiquement, le moment quadratique polaire  $I_O$  de la section  $S$  représentée sur la figure ci-contre.

**Exercice N°4**

1- Exprimer le moment d'inertie quadratique ( $I_Y$ ) de la section triangulaire montrée par la figure (a).

2- Montrer que le moment d'inertie quadratique ( $I_Y$ ) de la section triangulaire montrée par la

figure (b) est:  $I_y = \frac{b^3 h}{48}$

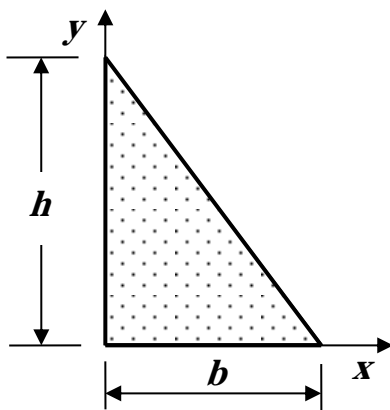


Figure (a)

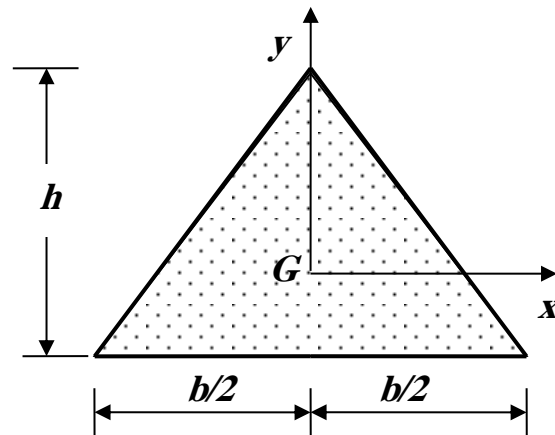
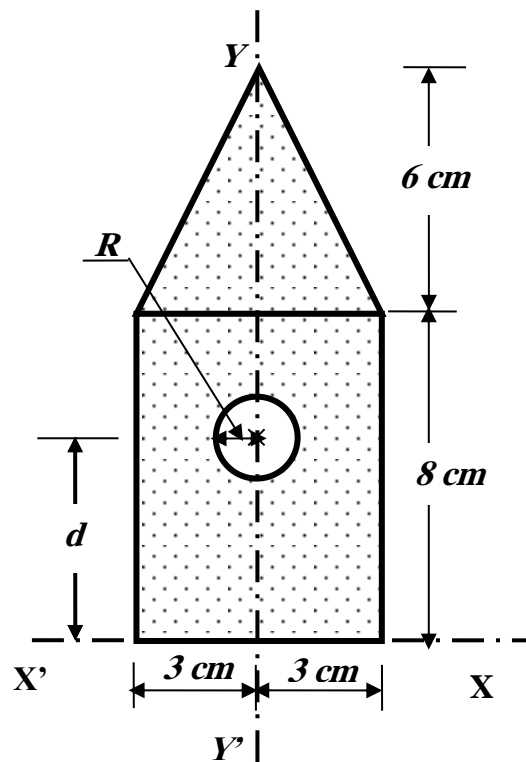


Figure (b)

**Exercice N°5**

Pour la section plane montrée par la figure ci-dessous, sachant que  $I_{X'X} = 2690,44 \text{ cm}^4$  et  $I_{Y'Y} = 158,44 \text{ cm}^4$ , déterminer:

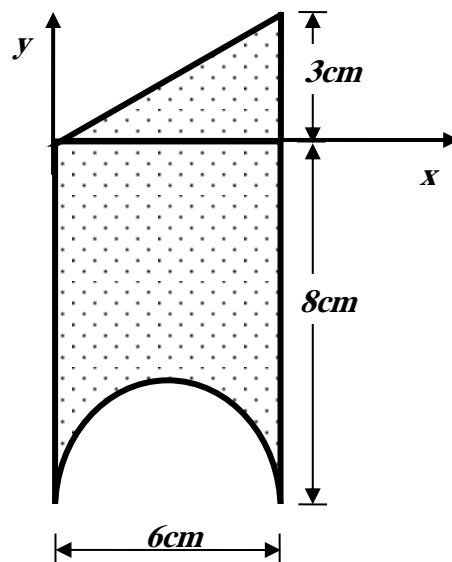
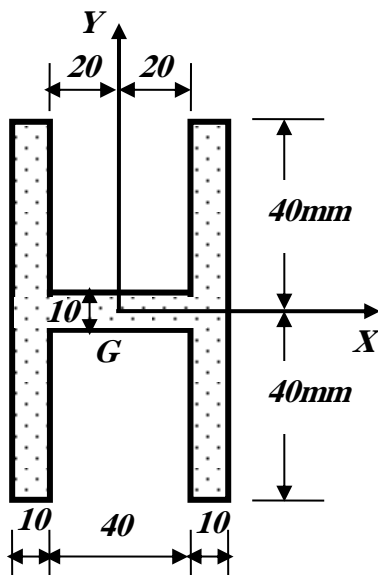
- le rayon " $R$ " du creux circulaire,
- la position " $d$ " du centre de gravité du creux circulaire par rapport à l'axe  $X'X$ .



### Exercice N°6

Pour chacune des sections planes ci-dessous:

- 1- Calculer les moments d'inertie de la section par rapport aux axes passant par le centre de gravité  $G$  de la section.
- 2- Tracer le cercle de *Mohr* et déduire les moments d'inertie centraux principaux pour cette section.
- 3- Dessiner les axes centraux principaux dans un plan physique.
- 4- Déduire du cercle de *Mohr* le moment quadratique par rapport à un axe faisant un angle de  $45^\circ$  avec l'axe  $GX$ .



## CHAPITRE 5

---

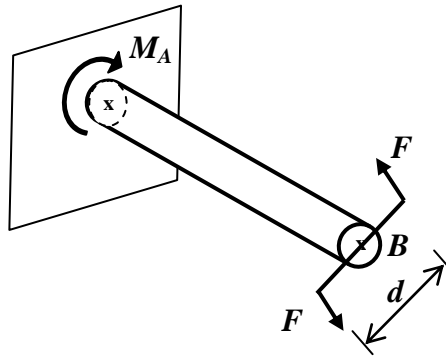
## TORSION

---

## 5.1. Définition

La torsion (dite aussi torsion pure) est un mode de sollicitation de sorte que dans toute section droite d'un corps (ou d'une pièce) il n'existe qu'un moment de torsion  $M_t$ .

Une barre soumise principalement à la torsion porte le nom d'*arbre* (Fig. 5.1).



**Fig. 5.1-** Exemple d'une barre soumise à la torsion.

La condition d'équilibre de la barre ci-dessus est:

$$M_A = M_B = F.d \quad (5.1)$$

De ce fait, toute section droite de la barre n'est sollicitée que par un moment de torsion  $M_t = M_A$  et on dit que cette barre est en état de torsion pure.

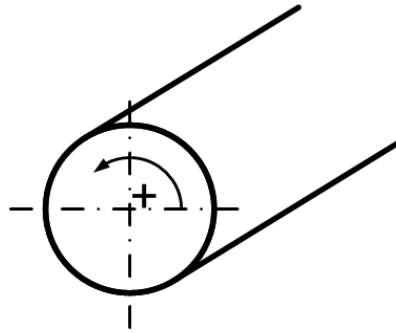
## 5.2. Moment de torsion

### 5.2.1. Convention de signe

Par convention, le moment de torsion (effort interne) est:

- positif ( $M_t \succ 0$ ) s'il agit dans le sens antihoraire pour un observateur qui regarde la section.
- négatif ( $M_t \prec 0$ ) s'il agit dans le sens horaire pour un observateur qui regarde la section.





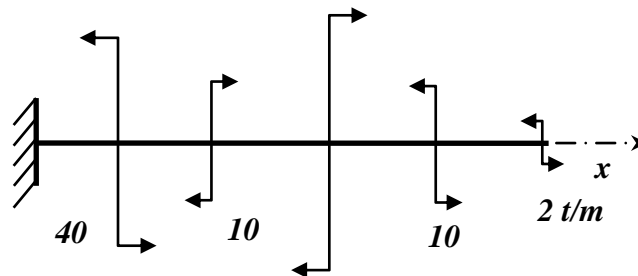
**Fig. 5.2-** Convention de signe.

### 5.2.2. Diagramme du moment de torsion

Le moment de torsion agissant en un point d'une barre est égal à la somme algébrique des moments des couples extérieurs appliqués d'un côté ou de l'autre de la partie considérée (la partie considérée est laissée au choix)

#### • Exemple 5.1

Tracer le diagramme du moment de torsion pour la barre montrée par la figure suivante.



## 5.3. Contraintes de cisaillement et angle de torsion

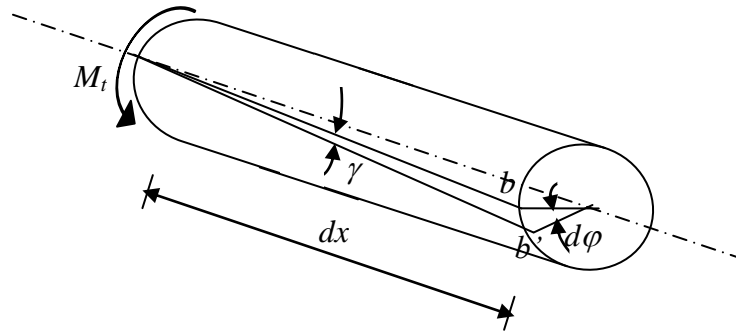
### 5.3.1. Hypothèses

Les problèmes de torsion peuvent être résolus en utilisant les méthodes de la résistance des matériaux en adoptant les hypothèses:

- 1- La section droite plane et perpendiculaire à l'axe de la pièce (ou d'un élément) avant sollicitation reste droite plane et perpendiculaire à l'axe après sollicitation. Cette hypothèse peut être vérifiée expérimentalement pour les corps à sections circulaires et est incorrecte pour les sections non circulaires.
- 2- Le diamètre de la section avant sollicitation reste droit après déformation suite à l'application du moment de torsion.

### 5.3.2. Angle de torsion

Considérons une barre de section circulaire soumise à un moment de torsion constant. Coupons un élément de longueur ( $dx$ )



**Fig. 5.3-** Élément d'une barre soumise à la torsion.

$$bb' = rd\phi = \gamma dx$$

$$\Rightarrow \gamma = r \frac{d\phi}{dx}$$

$\gamma$  est appelé déformation (ou angle) de cisaillement.

$\frac{d\phi}{dx}$  est l'angle de torsion par unité de longueur qui est constante et on la note par  $\theta$  de sorte :

$$\gamma = r.\theta \quad (5.2)$$

### 5.3.3. Contraintes de cisaillement

La loi de Hooke pour le cisaillement est :

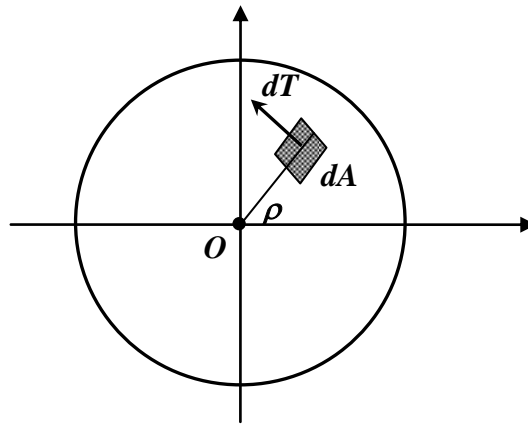
$$\tau = \gamma.G \quad (5.3)$$

$G$  est appelé module de cisaillement ou module d'élasticité transversale, dépend du matériau et est exprimée en MPA.

En remplaçant la déformation de cisaillement par son expression, on obtient :

$$\tau = r.G.\theta \quad (5.4)$$

Pour calculer les contraintes de cisaillement dans la barre on utilise, au lieu du rayon  $r$ , la coordonnée polaire  $\rho$  au point considéré:



**Fig. 5.4-** Force de cisaillement en un point d'une section.

La force élémentaire agissant sur la surface  $dA$  est :

$$dT = \tau \cdot dA$$

Cette force fait naître un moment de torsion élémentaire  $dM_t$  :

$$dM_t = \rho \cdot dT$$

Ainsi, le moment de torsion est:

$$\begin{aligned} M_t &= \int_A \rho \cdot \tau \cdot dA \\ &= G \cdot \theta \int_A \rho^2 dA \end{aligned} \quad (5.5)$$

La quantité  $\int_A \rho^2 dA$  est appelée le moment d'inertie polaire ( $I_P$ ). d'où

$$\begin{aligned} M_t &= G \cdot \theta \cdot I_P \\ \Rightarrow \theta &= \frac{M_t}{G \cdot I_P} \end{aligned} \quad (5.6)$$

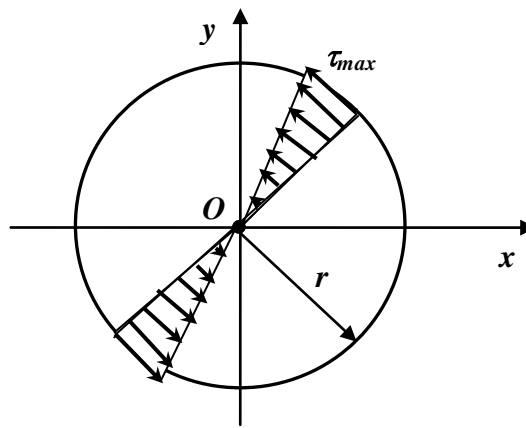
Des relations (5.2), (5.3) et (5.6), on tire:

$$\tau = \frac{M_t}{I_P} \rho \quad (5.7)$$

La contrainte de cisaillement maximale est :

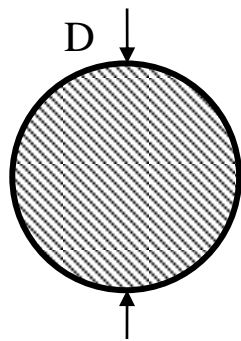
$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_P} r = \frac{M_t}{W_P} \quad (5.8)$$

Avec  $W_P = \frac{I_P}{r}$  est le module de résistance polaire de la section.



**Fig. 5.5-** Distribution des contraintes de cisaillement dans une section soumise à la torsion.

- *Exemples de Calcul des modules de résistance polaires*

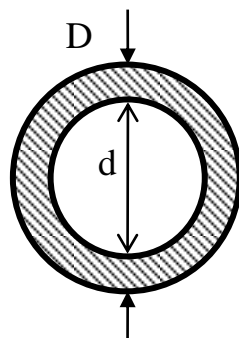


Section circulaire pleine:

$$I_P = \frac{\pi D^4}{32}$$

$$r = \frac{D}{2}$$

$$W_P = \frac{\pi D^3}{16}$$



Section circulaire tubulaire:

$$I_P = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}$$

$$r = \frac{D}{2}$$

$$W_P = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D}$$

## 5.4. Dimensionnement à la torsion

### 5.4.1. Condition de résistance

Pour qu'un corps sollicité en torsion pure résiste en toute sécurité, il faut que les contraintes de cisaillement maximales  $\tau_{max}$  engendrées par un moment de torsion donné dans une section

soient inférieures ou égales à la contrainte de cisaillement admissible  $[\tau]$  du matériau constituant le corps. C-à-d

$$\tau_{max} \leq [\tau] \quad (5.9)$$

#### 5.4.2. Condition de rigidité

L'angle de torsion relatif est donné par l'expression:

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_t}{G.I_P} \\ \Rightarrow \varphi &= \int_0^L \frac{M_t}{G.I_P} dx \end{aligned} \quad (5.10)$$

Pour une portion de la barre de longueur  $L$  et de section constante ( $I_P = Cste$ ), sollicitée par un moment de torsion constant ( $M_t = Cste$ ), l'angle de torsion devient:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{M_t}{G.I_P} \int_0^L dx \\ &= \frac{M_t.L}{G.I_P} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Et pour toute la barre, on a:

$$\varphi = \sum_i \frac{M_{ti}.L_i}{G.I_{Pi}} \quad (5.12)$$

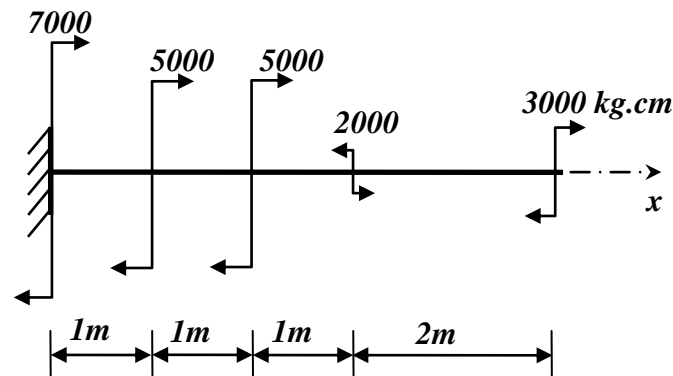
La condition de rigidité est que l'angle de torsion soit inférieur ou égal à la valeur admissible, c-à-d:

$$\varphi \leq [\varphi] \quad (5.13)$$

Généralement,  $[\varphi] = 0,3^\circ / m$

- **Exemple 5.2**

Calculer le diamètre de l'arbre ci-dessous puis vérifier sa rigidité.



### 5.5. Torsion d'une barre à section transversale non circulaire

La torsion des barres à sections transversales non circulaires ne peuvent s'étudier au moyen des méthodes de la résistance des matériaux. A cet effet, on donne ici (sans démonstration) quelques résultats obtenus de la théorie de l'élasticité.

Les contraintes de cisaillement maximales dans une section sont données par:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_t} \quad (5.14)$$

$W_t$  est appelé module de résistance à la torsion et il est différent du module de résistance polaire  $W_p$  sauf pour les sections circulaires et s'exprime par la relation:

$$W_t = \alpha \cdot h \cdot b^2 \quad (5.15)$$

Tels que  $h$  et  $b$  sont les dimensions de la section avec  $h > b$ .

L'angle de torsion se calcule dans ce cas par l'expression:

$$\varphi = \frac{M_t \cdot L}{G \cdot I_t} \quad (5.16)$$

Où  $I_t$  est donné par :  $I_t = \eta \cdot h \cdot b^3$ .

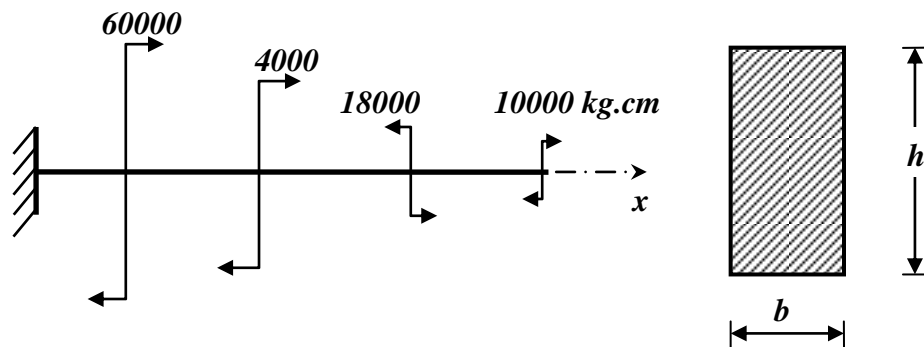
Les coefficients  $\alpha$  et  $\eta$  sont donnés en fonction du rapport  $h/b$  dans le tableau 5.2.

**Tableau 5.2-** Valeurs des coefficients  $\alpha$  et  $\eta$  en fonction du rapport  $h/b$ .

$h/b$	1,0	1,2	1,5	2,0	2,5	3,0	4,0	5,0	10,0	$\infty$
$\alpha$	0,208	0,219	0,231	0,246	0,258	0,267	0,282	0,291	0,313	0,333
$\eta$	0,141	0,166	0,196	0,229	0,249	0,263	0,281	0,291	0,313	0,333

- **Exemple 5.3**

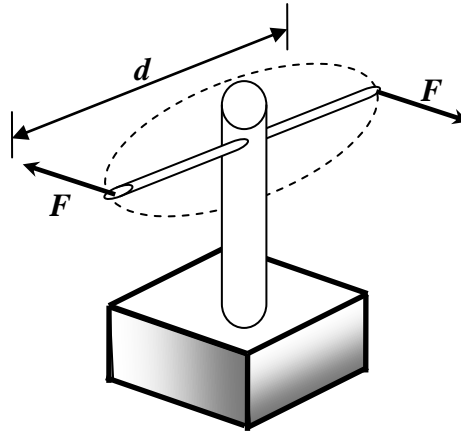
Calculer les dimensions de la section de la barre ci-dessous sollicitée en torsion sachant que  $h/b = 2$  et  $[\tau] = 500 \text{ kg/cm}^2$ .



## Exercices

### Exercice N°1

Considérons un barreau circulaire de 100 mm de diamètre dont l'extrémité inférieure est encastrée et l'autre extrémité est soumise à un couple de bras de levier  $d = 200$  mm et une force  $F = 10\,000$  N, qui produit un moment de torsion dans le barreau.



Calculez la contrainte de cisaillement dans une section quelconque:

- 1- au centre de gravité de la section;
- 2- en un point du pourtour de la section.

### Exercice N°2

Un arbre cylindrique de diamètre  $d$  transmet un couple de moment  $M=100\text{N.m}$ . Le type de construction exige une grande rigidité. On limite la déformation unitaire à  $0,25$  degré/m.

Le matériau de cet arbre est un acier pour lequel  $\tau_e=75\text{Mpa}$  et  $G=8104\text{MPa}$ .

- 1- Déterminer le diamètre minimal de l'arbre.
- 2- Déterminer la contrainte tangentielle maximale pour  $d=41\text{mm}$ .
- 3- Quelle est la valeur du coefficient de sécurité dont on dispose?

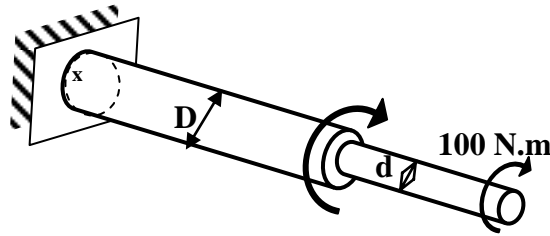
### Exercice N°3

Soit deux arbres de transmission pleins construits à partir du même acier,  $G = 8000 \text{ daN/m}^2$ . Le premier est de diamètre  $D$ ; le second de diamètre  $d=0,8 D$ .

La résistance pratique au cisaillement adoptée pour les deux cas est de  $10 \text{ daN.mm}^{-2}$ .

Déterminer les dimensions optimales des deux arbres.





### Exercice N°4

Un arbre creux de diamètre extérieur égal à  $50 \text{ mm}$  et de diamètre intérieur égal à  $40 \text{ mm}$ , a une longueur de  $1.50 \text{ m}$ .

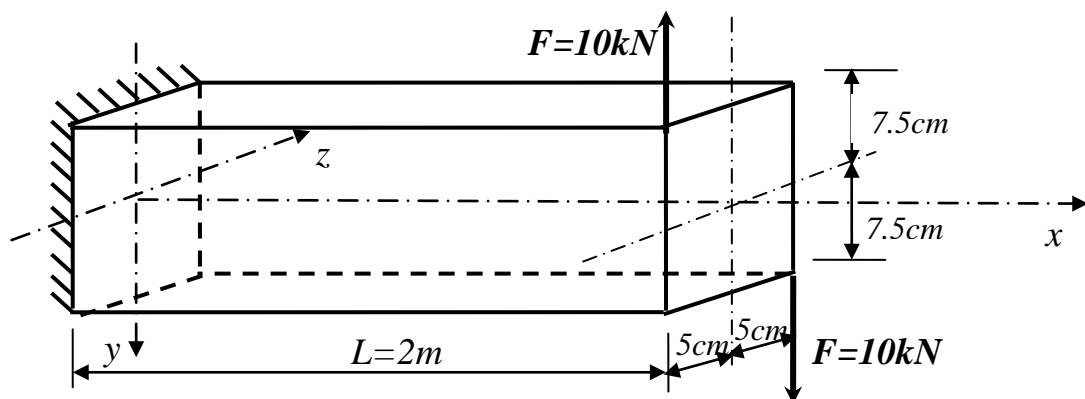
- 1- Sachant que la contrainte tangentielle est de  $30 \text{ N/mm}^2$ , calculer le couple transmis par cet arbre.
- 2- De quel angle tournent les sections extrêmes, l'une par rapport à l'autre? (Prendre  $G = 80000 \text{ N/mm}^2$ ).

### Exercice N°5

Estimer la contrainte maximale et l'angle total de torsion de l'ensemble des tubes d'un forage pétrolier, lorsque la profondeur atteinte par le trépan est de  $2000 \text{ m}$  et que le couple de torsion correspondant est de  $40 \text{ kNm}$ . Le train de tubes vissés les uns aux autres est assimilable à un tube unique de diamètre extérieur  $115 \text{ mm}$  et de diamètre intérieur de  $92 \text{ mm}$ .

### Exercice N°6

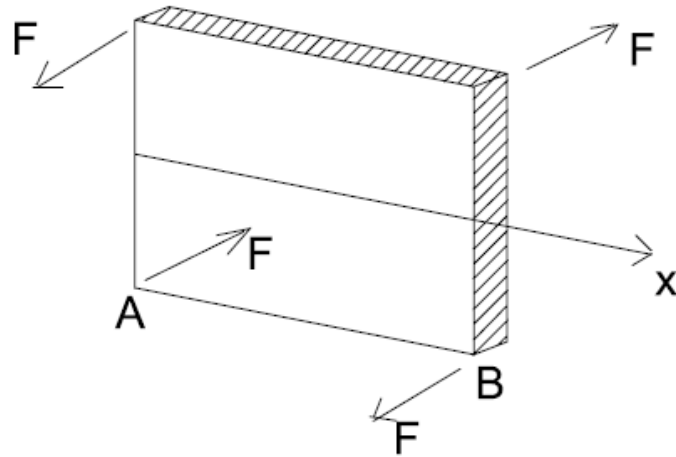
Soit une poutre en acier de section transversale rectangulaire encastree à son extrémité gauche et sollicitée, comme le montre la figure ci-dessous.



- 1- Tracer la distribution des contraintes le long d'une section transversale de la poutre.
- 2- Vérifier la résistance de la poutre, on donne  $[\tau] 1100 \text{ kg/cm}^2$ .

**Exercice N°7**

Considérons une tôle d'acier de 10 mm d'épaisseur et de 1 m de largeur, dont les extrémités A et B sont soumises à des forces égales et opposées.



Calculer la contrainte maximale de cisaillement dans la tôle si  $F = 1\,000\text{ N}$ .

## CHAPITRE 6

---

# FLEXION SIMPLE

---

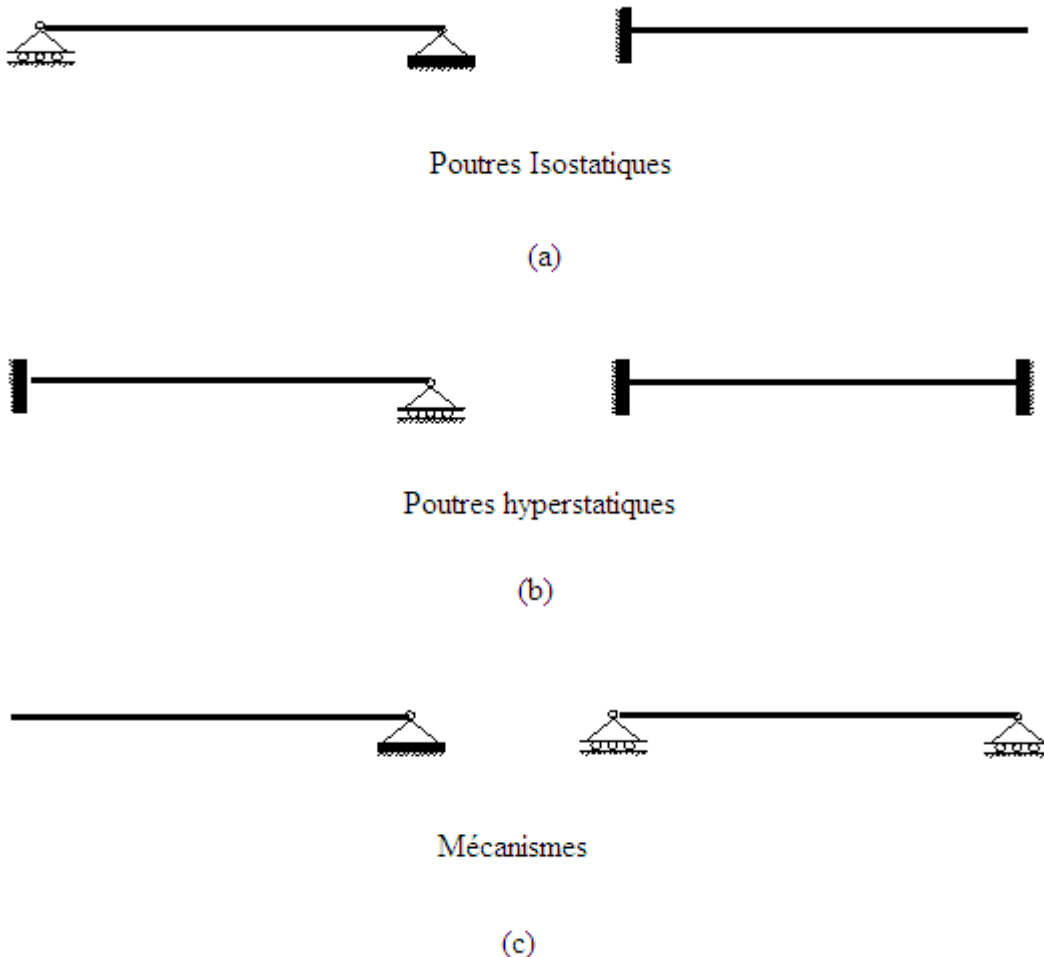
### 6.1. Système isostatique, système hyperstatique, mécanisme

Soit  $k$  le nombre d'équations d'équilibre (6 dans l'espace, 3 dans le plan). Soit  $r$  le nombre d'inconnues (résultantes de liaison et moments de liaison).

**Si  $r = k$  :** Les actions de liaison sont déterminées par les équations de la statique. La structure est dite **isostatique** (Fig. 6.1-a).

**Si  $r > k$  :** Le nombre d'équations d'équilibre est alors insuffisant à la détermination des actions de liaison inconnues. La structure est dite **hyperstatique** de degré  $r - k$  (Fig. 6.1-b).

**Si  $r < k$  :** l'équilibre est impossible en général. Le système est **hypostatique (mécanisme)**. L'étude des mécanismes déborde du cadre de la résistance des matériaux (Fig. 6.1-c).



**Fig. 6.1-** Exemples de Poutres: (a) isostatiques, (b) hyperstatiques, (c) mécanismes.

### 6.2. Définitions

- Une poutre est soumise à la **flexion** lorsque les forces qui lui sont appliquées tendent à faire varier sa **courbure** (Fig. 6.2).



Fig. 6.2- Courbure d'une poutre.

- On entend par **flexion simple** un mode de sollicitation tel que dans les sections droites de la poutre il existe deux composantes des efforts intérieurs: le moment fléchissant  $M_{fz}$  (ou  $M_{fy}$ ) et l'effort tranchant  $T_y$  (ou  $T_z$ ).

La flexion est aussi dite **simple**, lorsque la poutre possède un **plan de symétrie** et que les forces fléchissantes agissent dans ce plan, **perpendiculairement** au grand axe de la poutre (Fig. 6.3).

Nous nous limiterons dans ce cours à l'étude de la flexion des poutres droites isostatiques, c'est-à-dire celles pour lesquelles les équations d'équilibre suffisent à la détermination des actions de liaison. Nous nous limiterons également aux poutres dont le plan de symétrie est vertical ( $Gxy$ ).

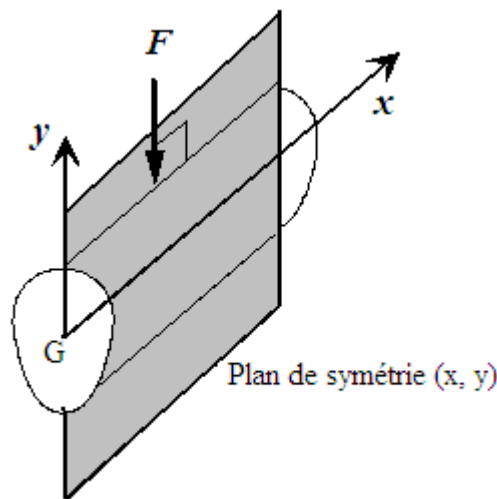


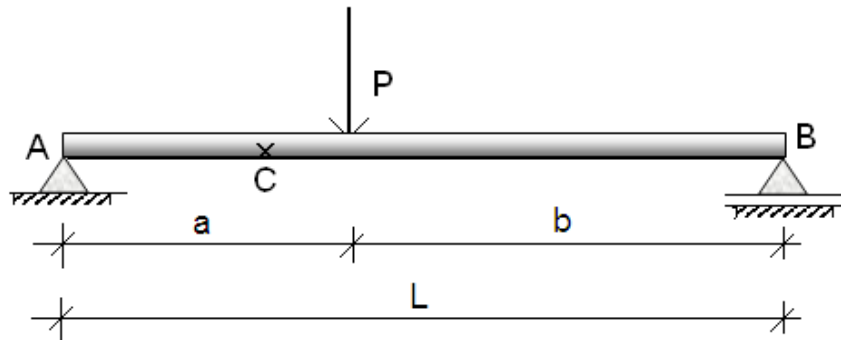
Fig. 6.3- poutre en flexion simple.

- Hypothèses**

- Les déformations sont élastiques et suffisamment petites pour ne pas modifier l'intensité des forces ni leurs distances respectives.
- Toute fibre contenue dans un plan de symétrie demeure dans ce plan pendant la déformation.
- Hypothèse de Navier-Bernoulli(1705): les sections droites de la poutre demeurent planes et perpendiculaires à l'axe de celle-ci après déformation.

### 6.3. Efforts tranchants, moments fléchissants

Soit la poutre ci-dessous soumise à la flexion simple. Imaginons une coupure en un point  $C$  qui divise la poutre en deux parties notées *gauche* et *droite*. Chacune de ces deux parties est en équilibre sous l'action des efforts extérieurs qu'elle reçoit et sous l'action des effets de l'autre partie (efforts intérieurs).



**Fig. 6.4-** Exemple illustratif d'une poutre sollicitée en flexion simple.

Chacune des deux parties agit sur l'autre de sorte que:

- Tous les mouvements horizontaux, verticaux et de rotation d'une partie par rapport à l'autre sont nuls.
- Chaque partie est en équilibre

Pour qu'il y ait concordance en signe entre les deux parties, on utilise la convention de signe montrée sur la figure (6.5).

L'effort tranchant  $T(x)$  dans une section d'abscisse  $x$ , séparant la poutre orientée en une partie *gauche* et une partie *droite*, est la résultante des forces extérieures s'exerçant sur *la partie gauche*.

Le moment fléchissant  $M(x)$  dans une section d'abscisse  $x$ , séparant la poutre orientée en une partie *gauche* et une partie *droite*, est la somme des moments extérieurs (dus aux couples concentrés et aux efforts d'action et de réaction) s'exerçant sur *la partie gauche*.

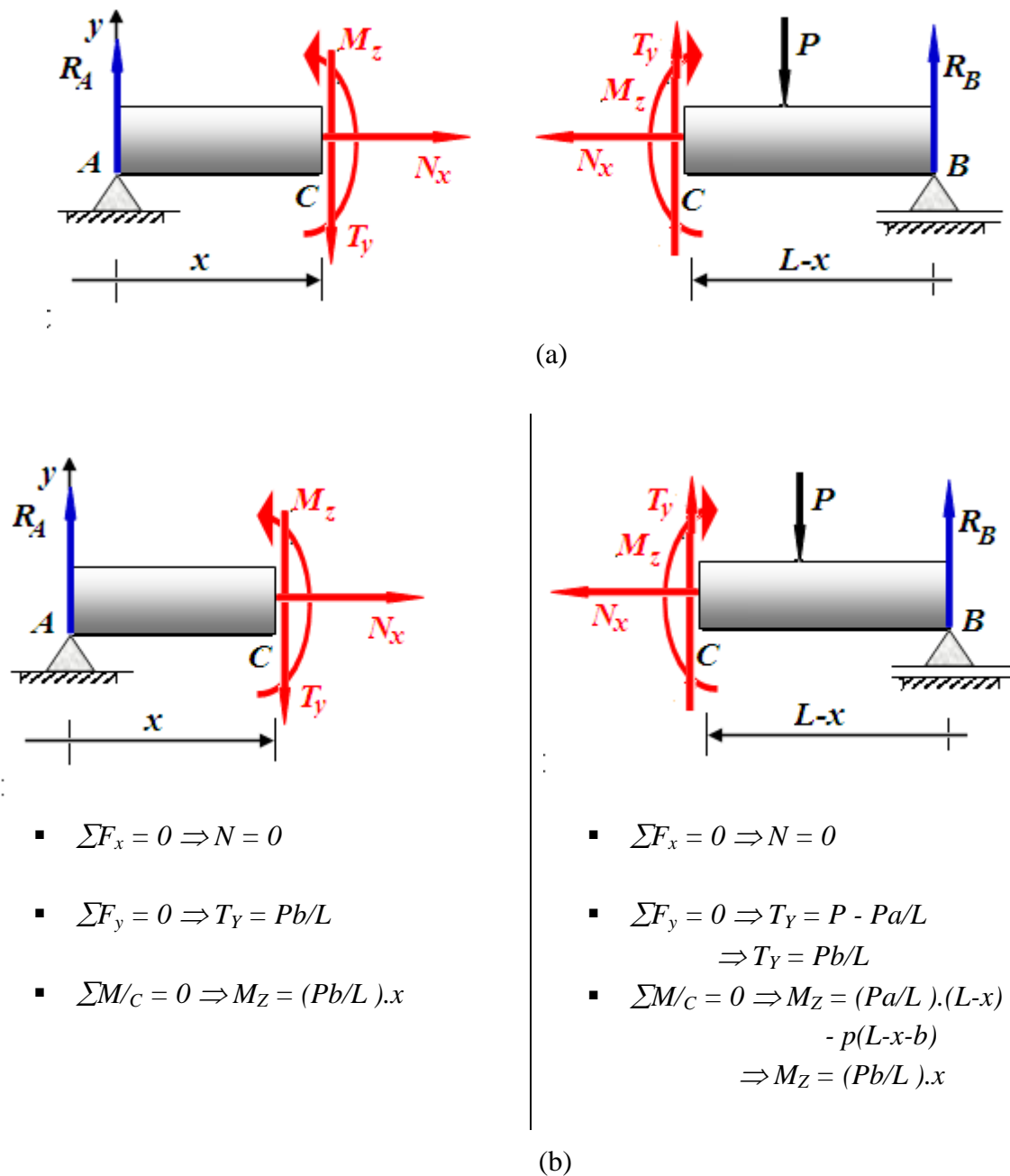


Fig. 6.5 - Conventions de signe.

#### 6.4. Diagrammes des Efforts tranchants et des moments fléchissants

Le diagramme des efforts tranchants est la courbe représentative de la fonction  $T(x)$  et le diagramme des moments fléchissants est la courbe représentative de la fonction  $M(x)$ , où  $x$  est l'abscisse de la poutre de l'une de ses extrémités.

##### • Exemple 6.1

Exprimer et tracer la variation de l'effort tranchant et le moment fléchissant le long de la poutre schématisée par la figure ci-dessous.

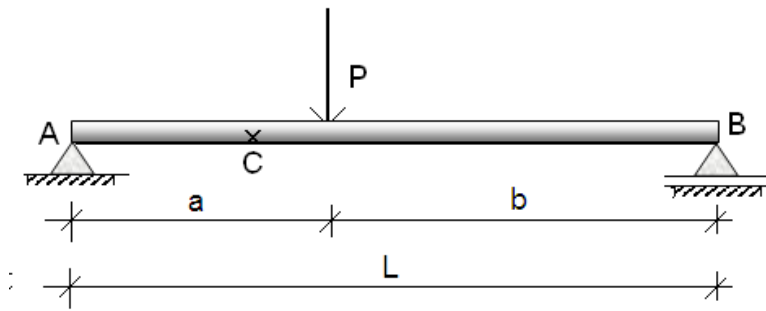


Fig. E6.1-a

• **Solution 6.1**

Supposons que la poutre soit coupée au point C (1<sup>ère</sup> partie) puis au point D (2<sup>ème</sup> partie).

1<sup>ère</sup> partie :  $0 \leq x \leq a$

2<sup>ème</sup> partie :  $a \leq x \leq L$

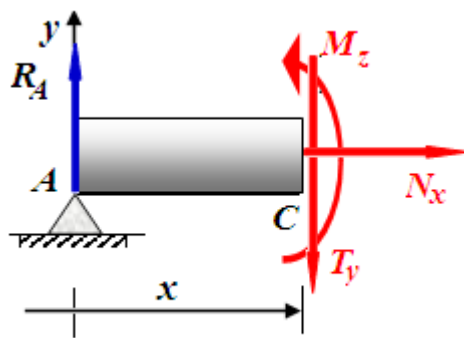


Fig. E6.1-b

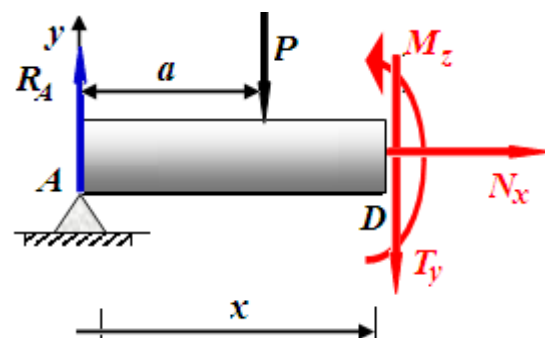


Fig. E6.1-c

- $\sum F_x = 0 \Rightarrow N = 0$
- $\sum F_y = 0 \Rightarrow T_Y = Pb/L$
- $\sum M_C = 0 \Rightarrow M_Z = (Pb/L) \cdot x$   
 $M_Z(x=0) = 0$   
 $M_Z(x=a) = Pab/L$

- $\sum F_x = 0 \Rightarrow N = 0$
- $\sum F_y = 0 \Rightarrow T_Y = -Pa/L$
- $\sum M_C = 0 \Rightarrow M_Z = (Pa/L) \cdot (L-x)$   
 $M_Z(x=a) = Pab/L$   
 $M_Z(x=L) = 0$

Ayant obtenu les expressions des efforts tranchants et moments fléchissants pour chacune des deux parties, traçons leurs variations le long de la poutre comme montrées par la figure ci-dessous.



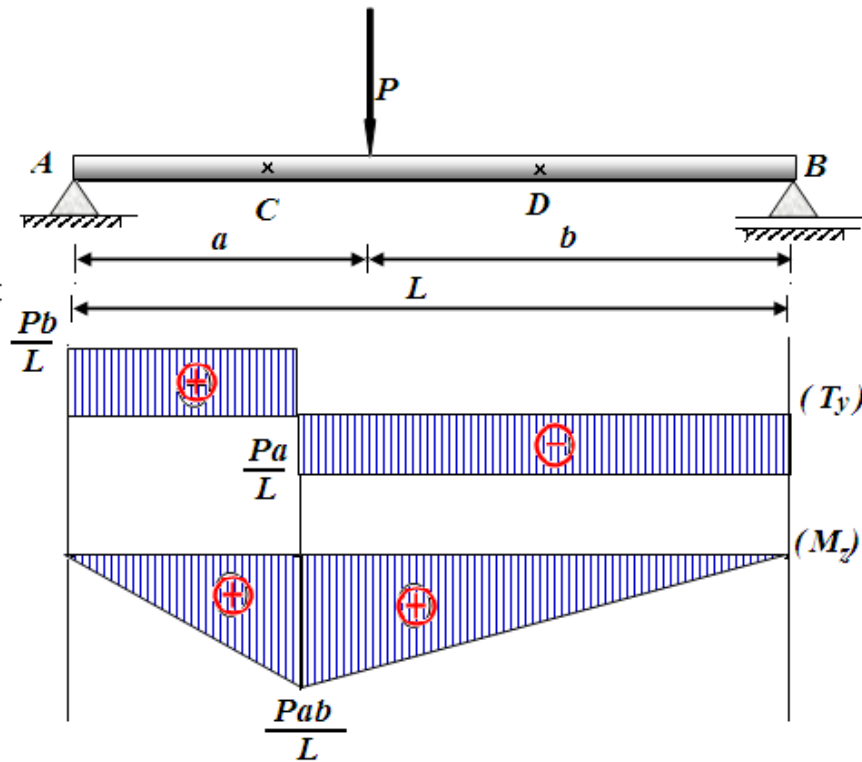


Fig. E6.1-d

### 6.5. Relation entre moment fléchissant et effort tranchant

Considérons un élément de poutre pris entre deux sections ( $\Sigma$ ) et ( $\Sigma'$ ) infiniment voisines, distantes de  $dx$  (Fig. 6.6).

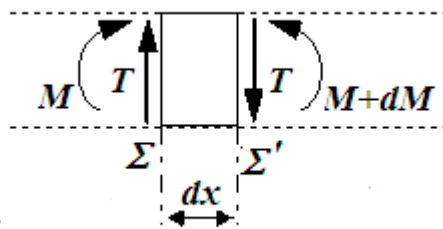


Fig.6.6 - Élément de poutre isolé non chargé.

L'influence de la partie gauche sur l'élément est représentée par  $T$  et  $M$ .

L'influence de la partie droite sur l'élément est représentée par  $T'$  et  $M'$ .

Si aucun effort ne s'exerce sur la poutre entre les sections ( $\Sigma$ ) et ( $\Sigma'$ ), les efforts tranchants de ces deux sections sont égaux ( $T' = T$ ). Par contre les moments fléchissants  $M$  et  $M'$  ( $M' = M + dM$ ) diffèrent. L'équilibre de l'élément s'écrit:

$$M + T dx - M - dM = 0$$

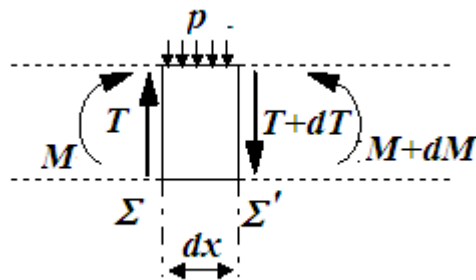
Soit:

$$\frac{dM}{dx} = T \quad (6.1)$$

Ainsi, sur toute portion de poutre comprise entre des charges, l'effort tranchant est la dérivée par rapport à l'abscisse  $x$  du moment fléchissant.

## 6.6. Relation entre effort tranchant et chargement réparti

Considérons le cas où une charge répartie, d'intensité  $p$ , s'exerce entre les sections  $(\Sigma)$  et  $(\Sigma')$  (Fig. 6.7). La charge totale appliquée sur l'élément est  $p \, dx$ .



**Fig.6.7** - Élément de poutre isolé chargé par une force uniformément répartie.

L'équilibre des forces sur l'élément mène à:

$$T - p \, dx - T - dT = 0$$

Ce qui veut dire que:

$$\frac{dT}{dx} = -p \quad (6.2)$$

L'équilibre des moments donne:

$$M + T \, dx - p \, dx \, dx/2 - M - dM = 0$$

En négligeant le terme du second ordre  $(p \frac{(dx)^2}{2})$ , il reste  $T = \frac{dM}{dx}$ . Ce qui veut dire que la relation entre l'effort tranchant et le moment fléchissant reste valable au premier ordre.

### • Exemple 6.2

Pour la poutre console schématisée par la figure ci-dessous, exprimer et tracer la variation de l'effort tranchant et le moment fléchissant le long de la poutre.

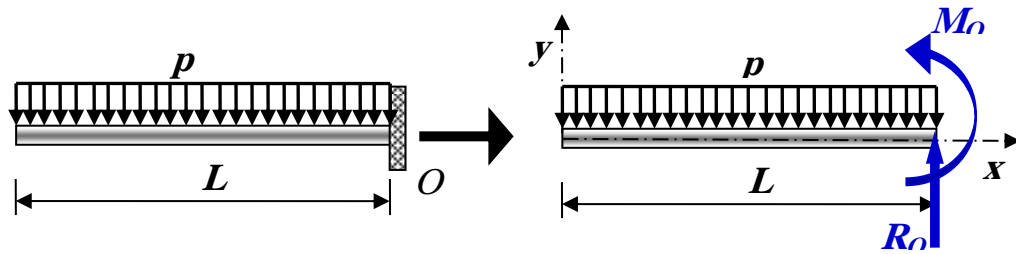


Fig. E6.2-a

- Solution 6.2**

On a, pour  $0 \leq x \leq L$  :

$$T(x) = -p \cdot (x)$$

$$M(x) = -\frac{p \cdot (x)^2}{2}$$

Ces expressions montrent la variation de l'effort tranchant et du moment fléchissant en fonction de l'abscisse  $x$ . Leurs tracés sont montrés sur la figure E6.2-b.

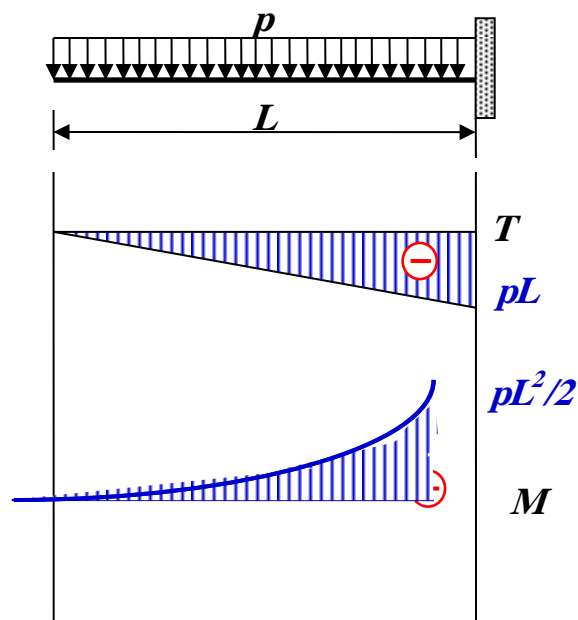
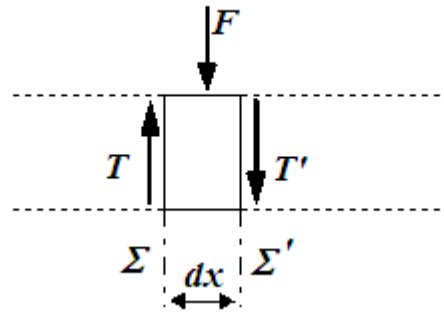


Fig. E6.2-b

- Remarque**

Lorsqu'une charge concentrée s'exerce entre  $(\Sigma)$  et  $(\Sigma')$  (Fig. 6.8), l'équilibre s'écrit:

$$T' = T - F$$

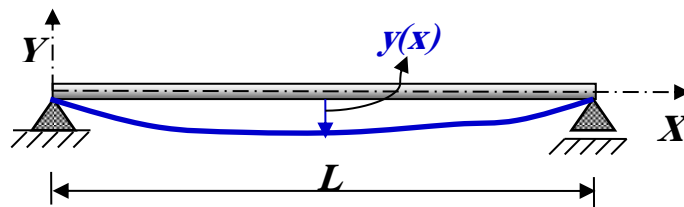


**Fig.6.8** - Élément de poutre isolé chargé par une force concentrée.

L'effort tranchant varie d'une quantité  $F$  lorsqu'on dépasse le point d'application de la charge. En ce point, la pente du moment fléchissant ( $dM/dx$ ) varie brusquement (point anguleux).

### 6.7. Déformée d'une poutre soumise à la flexion simple (flèche)

Sous l'effet des sollicitations auxquelles elle est soumise, une poutre se déforme. On désigne par **flèche** à l'abscisse  $x$ , le déplacement du centre de gravité de la section correspondant à cette abscisse. Elle est comptée positivement si le déplacement s'effectue vers le bas. Le nouveau lieu des centres de gravité de toutes les sections de la poutre prend le nom de **déformée** (Fig. 6.9).



**Fig.6.9** - Poutre déformée.

On admet la relation suivante qui permet le calcul de la déformée

$$y''(x) = \frac{M(x)}{EI} \quad (6.3)$$

$y''(x)$  est la dérivée seconde de la flèche par rapport à  $x$

$M(x)$ , le moment fléchissant à la section d'abscisse  $x$ .

$E$ , le module d'élasticité longitudinale (module d'Young).

$I$ , le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe  $\Delta$  passant par le centre de gravité et perpendiculaire au plan moyen de la poutre. La figure (6.10) montre des expressions du moment d'inertie central pour des sections usuelles.

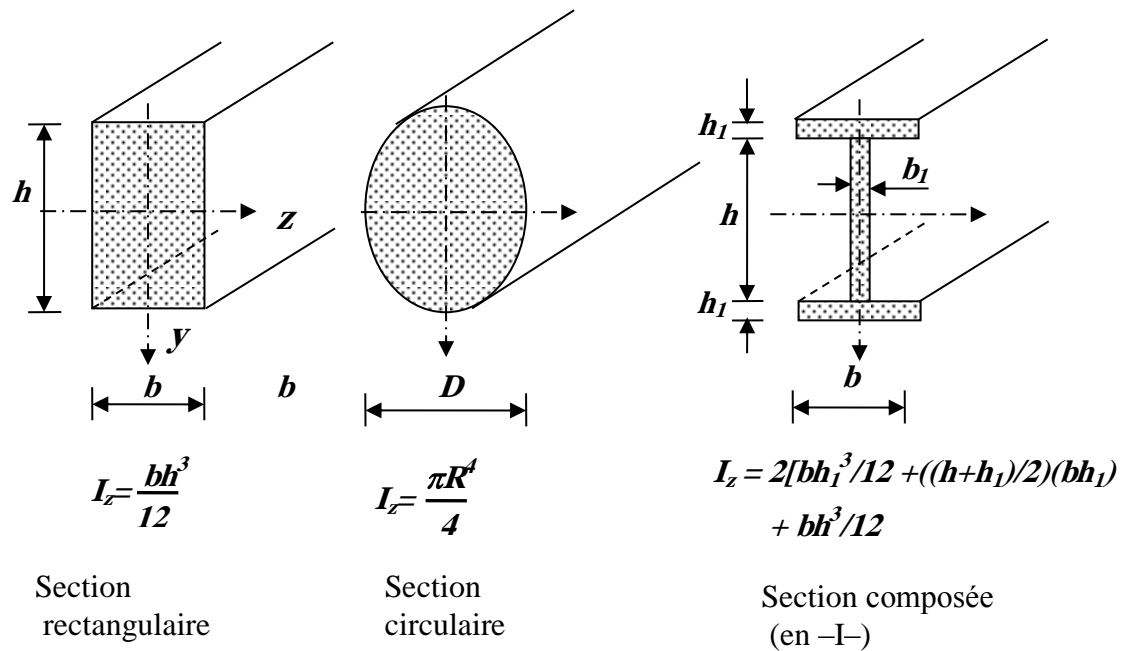


Fig.6.10 - Exemples de sections usuelles.

Pour avoir la flèche  $y$  (ou  $v$ ), il faut donc intégrer cette équation deux fois, d'où l'obtention d'une équation fonction de deux constantes que l'on obtient par les conditions aux limites. Celles-ci s'écrivent, généralement:

- Pour **un appui** :  $y = 0$
- Pour **un encastrement**:  $y = 0$  et  $y' = 0$  (formules de Bresse)

## 6.8. Calcul des contraintes

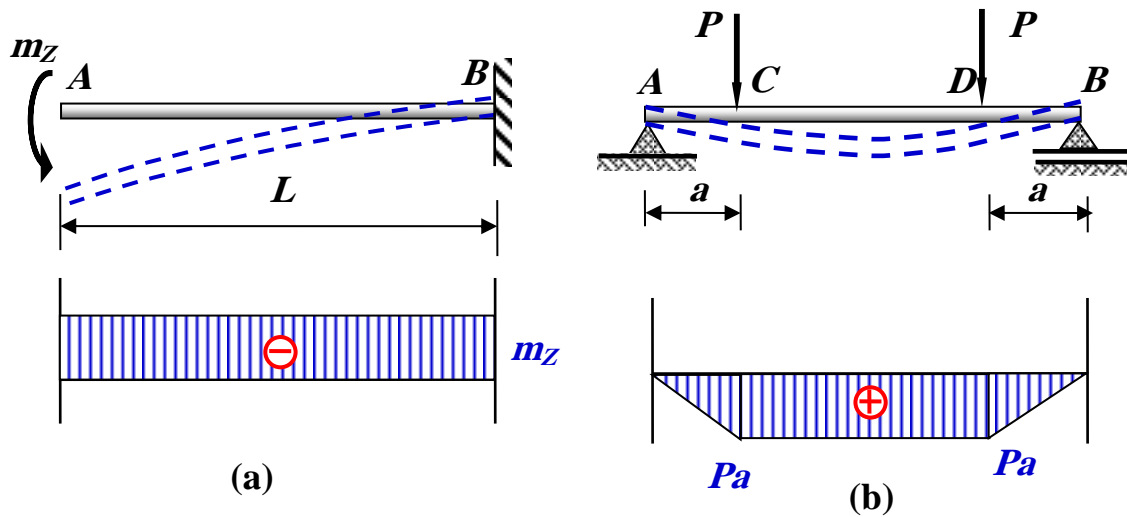
### 6.8.1. Cas de la flexion pure

On dit qu'une poutre est sollicitée en flexion pure si toutes les composantes des efforts intérieurs sont nulles à l'exception du moment fléchissant ( $M_{fz}$  or  $M_{fy} \neq 0$ ) (Fig. 6.11). Autrement dit le moment fléchissant est constant,

$$T = dM/dx \text{ d'où } T = 0$$

#### • Exemples de poutres en flexion pure

Les figures (6.12-a) et (6.12-b) schématisent une poutre et un tronçon de poutre, respectivement, soumis à la flexion pure.



**Fig. 6.11** – Illustration de la flexion pure: (a) poutre en flexion pure, (b) tronçon de poutre en flexion pure.

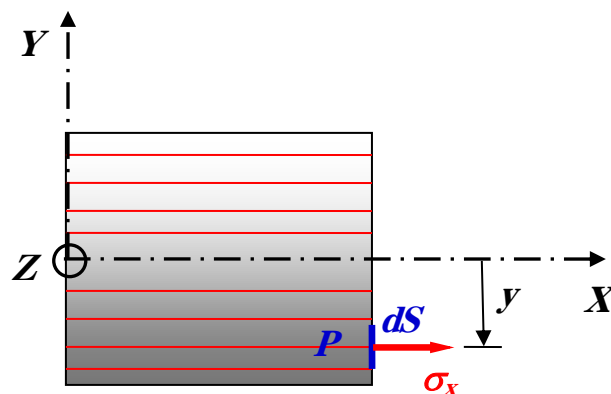
Pour un point  $P$  quelconque, selon l'hypothèse de *Bernouilli*, on peut écrire:

$$\sigma_x(y) = \frac{M_z}{I_z} y \quad (6.4)$$

Avec

$$I_z = \int_S y^2 dS \quad (6.5)$$

$y_P$  est la distance à l'axe et  $I_z$  le moment d'inertie par rapport à l'axe de flexion



**Fig.6.12-** Contrainte dans une fibre déformée.

### • Dimensionnement

Pour dimensionner la poutre on peut utiliser deux types de critères :

- un critère en contrainte normale (condition de résistance)
- un critère sur la flèche maximale (condition de rigidité)

Le critère sur la flèche maximale, traduit le fait que la flèche maximale  $v(P)$  en un point  $P$  doit rester inférieure à une valeur donnée dépendante des conditions d'utilisation:

$$\text{Max}(v(P)) \leq [v] \quad (6.6)$$

Pour les poutres ordinaires, la valeur de la flèche admissible est de l'ordre de:

$$[v] = [f] = L/100 \div L/1000$$

où  $L$  est la longueur de la poutre. On pourrait aussi imaginer un critère de rotation maximale de la section droite.

1- Pour les poutres rigides, c à d  $v \leq L/100$ , la grandeur  $u$  est très petite devant  $v$  (Fig. 6.13), d'où on néglige son influence sur la déformation de la poutre et on ne tient compte que des deux composantes  $v$  et  $\varphi_z$ .

2- Puisque pour les poutres rigides  $\varphi_z$  est petite (  $\varphi_z < 1^\circ$  ), on admet que:

$$\varphi_z \approx \text{tg } \varphi_z$$

D'autre part, on sait que, mathématiquement,  $\text{tg } \varphi_z = dv/dx$ , d'où:

$$\varphi_z = dv / dx \quad (6.7)$$

Ainsi, la déformation de la poutre fléchie est caractérisée par les composantes  $v$  et  $\varphi_z$  tel que:

$$\text{Max} / \varphi_z / \leq [\varphi] \quad (6.8)$$

#### • Dimensionnement à la condition de résistance

Le dimensionnement d'une poutre fléchie à la condition de résistance passe par les étapes suivantes:

- 1- Tracé du diagramme de  $M_f$  ( $M_Z$  ou  $M_Y$ ) le long de la poutre,
- 2- Détermination de la section dangereuse à partir du diagramme de  $M_f$ ,
- 3- Calcul de la contrainte maximale  $\sigma_{max}$ , c'est-à-dire la contrainte au niveau du point dangereux le long de la section transversale de la poutre,
- 4- Satisfaction de la condition de résistance qui s'écrit selon la méthode des contraintes admissibles comme suit:

$$\sigma_{max} \leq [\sigma] \quad (6.9)$$

$\sigma_{max}$  est obtenue en analysant la variation de  $\sigma_x$  dans une section dangereuse de la poutre. Dans ce cas  $M_Z$  et  $I_Z$  sont constants et  $\sigma_x$  dépend linéairement de la coordonnée  $y$  (Fig. 6.14).

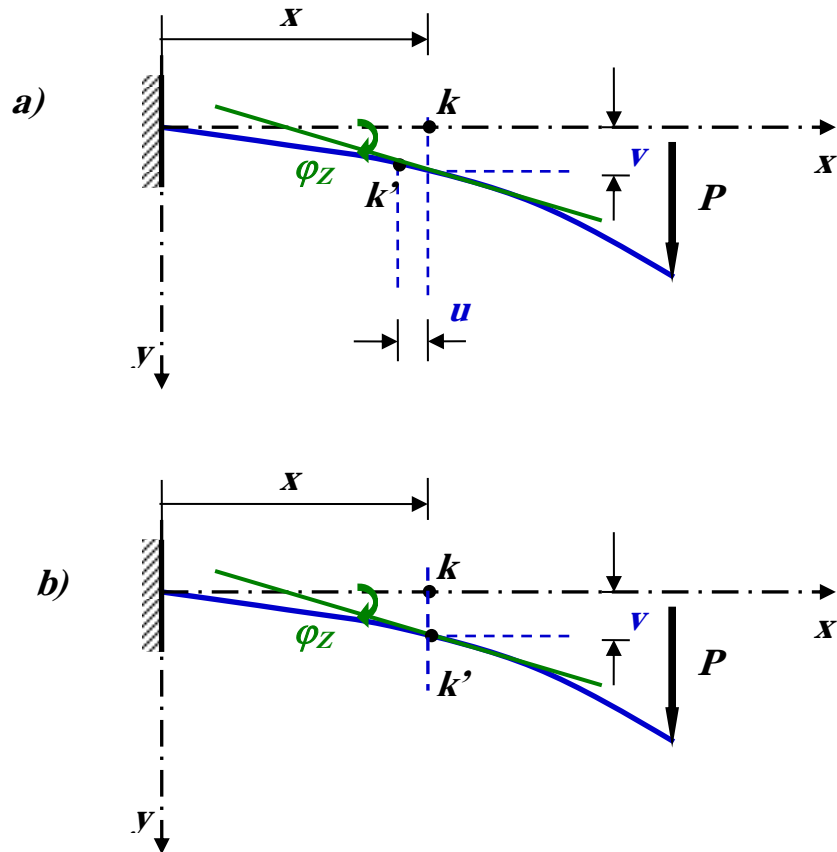


Fig.6.13- Déformations dans une poutre fléchie.

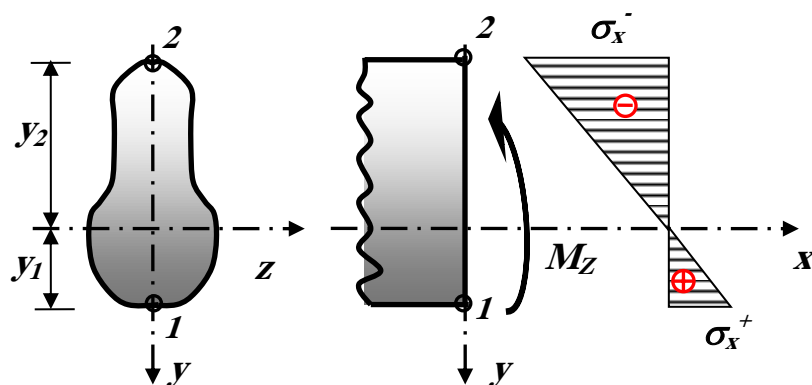


Fig.6.14- Distribution des contraintes dans une section d'une poutre en flexion pure.

- $\sigma_x = 0$  pour les points correspondants à l'axe  $z$  (l'axe neutre)
- Les valeurs maximales de  $\sigma_x$  correspondent aux points les plus éloignés de l'axe neutre (les points 1 et 2)

De l'équation  $\sigma_x(y) = (M_Z / I_Z) \cdot y$  (équation de Navier), on obtient:

$$\sigma_{x\max}^{(1)} = M_Z^{\max} / W_Z^{(1)}, \quad W_Z^{(1)} = I_Z / y_1 = W_Z^{(t)} \quad (6.10-a)$$

$$\sigma_{x\max}^{(2)} = M_Z^{\max} / W_Z^{(2)}, \quad W_Z^{(2)} = I_Z / y_2 = W_Z^{(c)} \quad (6.10-b)$$



Où  $W_Z^{(t)}$  et  $W_Z^{(c)}$  sont les modules de flexion ou de résistance, calculés pour le point le plus tendu (point 1) et le point le plus comprimé (point 2), respectivement.

D'où, les conditions de résistance:

$$\sigma_{x\max}^{(+)} = M_Z^{\max} / W_Z^{(t)} \leq [\sigma]^+ \quad (6.11-a)$$

$$\sigma_{x\max}^{(-)} = M_Z^{\max} / W_Z^{(c)} \leq [\sigma]^- \quad (6.11-b)$$

Pour la majorité des poutres utilisées en construction:

$$W_Z^{(t)} = W_Z^{(c)}$$

et

$$\sigma_{x\max}^{(+)} = \sigma_{x\max}^{(-)}$$

alors les conditions de résistance ci-dessus peuvent être exprimées sous la forme:

$$\sigma_{x\max} = M_Z^{\max} / W_Z \leq [\sigma] \quad (6.12)$$

### • Remarques

a) Si  $|W_Z^{(t)}| = |W_Z^{(c)}|$  mais  $[\sigma]^+ \neq [\sigma]^-$ , on peut utiliser la dernière condition de résistance en prenant pour  $[\sigma]$  la valeur minimale (en module) entre  $[\sigma]^+$  et  $[\sigma]^-$ .

b) Si  $[\sigma]^+ = [\sigma]^-$  mais  $|W_Z^{(t)}| \neq |W_Z^{(c)}|$ , on peut utiliser la dernière condition de résistance en prenant pour  $W_Z$  la valeur minimale (en module) entre  $W_Z^{(t)}$  et  $W_Z^{(c)}$ .

Notons qu'il existe d'autres méthodes de calcul des poutres à la résistance telle que la méthode des états limites.

### 6.8.2. Cas de la flexion simple

Pour le cas de la flexion simple, en plus du moment fléchissant qui est variable dans ce cas il existe la composante de l'effort tranchant  $T$ , c'est-à-dire en plus de la contrainte normale  $\sigma$  on a une contrainte tangentielle  $\tau$ .

La contrainte normale s'exprime par l'équation précédente (6.4) de Navier (cas de la flexion pure). La contrainte tangentielle  $\tau_{xy}$  est donnée par l'équation de Jouravsky:

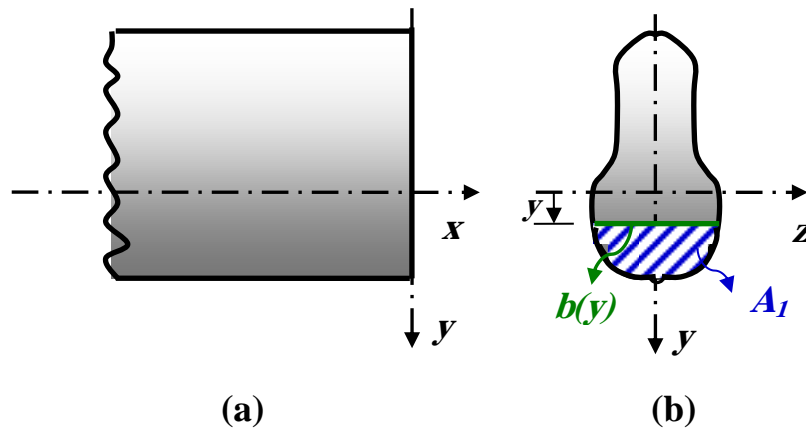
$$\tau_{xy} = \frac{T_y \cdot S_{Iz}(y)}{I_z \cdot b(y)} \quad (6.13)$$

Avec

$$S_{Iz}(y) = \int_{S_I} y dS$$

est le moment statique de la surface située au dessus de la coordonnée  $y$  et par rapport à l'axe  $z$  (l'axe 3 sur la figure 6.15).

La quantité  $b(y)$  est la largeur de la fibre étudiée correspondant à la coordonnée  $y$ .



**Fig.6.15-** Tronçon de poutre non chargé longitudinal (a), transversal (b).

• **Remarques**

- Dans le cas de la figure ci-dessus ( $S_{Iz}(y)$  positif), le signe de  $\tau_{xy}$  dépend uniquement du signe de  $T_y$ .
- $\tau_{xy}$  varie le long de la hauteur de la section en fonction de  $S_{Iz}(y)$  et  $b(y)$ . Pour les points les plus éloignés de l'axe neutre  $\tau_{xy} = 0$ .

Pour trouver la valeur maximale de  $\tau_{xy}$  il faut (dans le cas général) analyser le digramme respectif de  $\tau_{xy}$ . Notons que pour la majorité des poutres utilisées en construction (section symétrique par rapport à l'axe  $z$ ),  $\tau_{xy}^{max}$  a lieu au niveau de la fibre neutre. Cependant, il y a des exemples où  $\tau_{xy}$  est maximale pour une des autres fibres (Fig. 6.16).

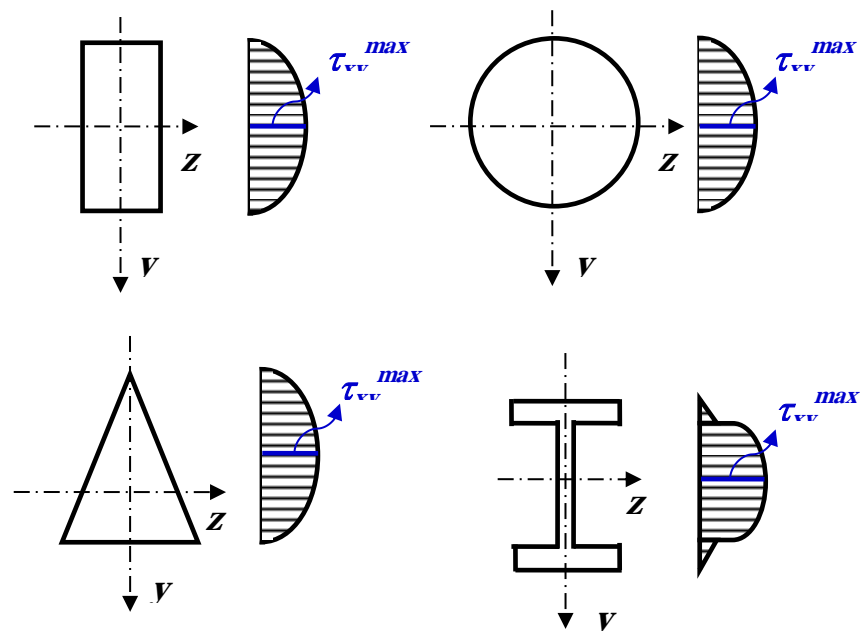
Pour les sections ordinaires, il est commode de déterminer  $\tau_{xy}^{max}$  à l'aide de l'expression:

$$\tau_{xy}^{max} = K \frac{T_y}{S} \quad (6.14)$$

Où  $S$  est l'aire de la section et  $K$  un coefficient dépendant de la forme de la section (Tableau 6.1).

**Tableau 6.1-** Exemples de valeurs du coefficient de forme  $K$ .

Forme de la section	Rectangulaire	Ronde	Triangulaire
Coefficient $K$	$3/2$	$4/3$	$3/2$



**Fig.6.16-** Exemples de distribution des contraintes tangentielles dans une section de poutre en flexion simple.

- **Dimensionnement**

Pour dimensionner la poutre on utilise un critère en contrainte ou en flèche maximale comme dans le cas de la flexion pure.

- **Dimensionnement à la condition de résistance**

Le calcul à la résistance se fait comme dans le cas de la flexion simple (détermination des sections dangereuses et des points dangereux, satisfaction des conditions de résistances).

Pour la sélection des sections dangereuses, on distingue, généralement, trois cas:

- Si  $M_Z$  et  $T_Y$  ont des valeurs maximales dans la même section le long de la poutre, cette section est considérée dangereuse et on y effectue le calcul à la résistance.
- Si  $M_Z$  et  $T_Y$  ont des valeurs maximales dans des sections différentes le long de la poutre, on y effectue le calcul à la résistance dans chacune de celles-ci.
- Parfois, les sections sont dangereuses sans que les efforts y aient des valeurs maximales. Donc, on doit y effectuer un calcul à la résistance.

Pour la satisfaction des conditions de résistances, on doit considérer les cas suivants:

1- Composer une condition de résistance pour le point où  $\sigma_x$  est maximale, dans une section où  $M_Z$  est maximal. En ce point  $\tau_{xy}$  est généralement nul. La condition de résistance pour ce point s'écrit:

$$\sigma_x^{max} \leq [\sigma]$$

2- Composer une condition de résistance pour le point où  $\tau_{xy}$  est maximale. Si la section est symétrique par rapport à l'axe  $z$ ,  $\tau_{xy}^{max}$  correspond habituellement à l'axe neutre où  $\sigma_x = 0$  (Fig. 6.17 ). La condition de résistance pour ce point (dans une section où  $T_y$  est maximale) s'écrit:

$$\tau_{xy}^{max} \leq [\tau]$$

3- Si  $\tau_{xy}$  est maximale dans le point qui ne correspond pas à l'axe neutre et où  $\sigma_x \neq 0$  (Fig. 6.17), une satisfaction de la condition de résistance pour ce point doit se faire dans le cadre des théories de résistance (ç-à-d selon un critère de résistance). On utilise habituellement, en flexion plane, le critère de la contrainte tangentielle maximal (critère de Coulomb) ou le critère de l'énergie potentielle de déformation qui ont, respectivement, les deux expressions suivantes:

$$\sigma_{Eq} = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (6.15-a)$$

$$\sigma_{Eq} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2} \quad (6.15-b)$$

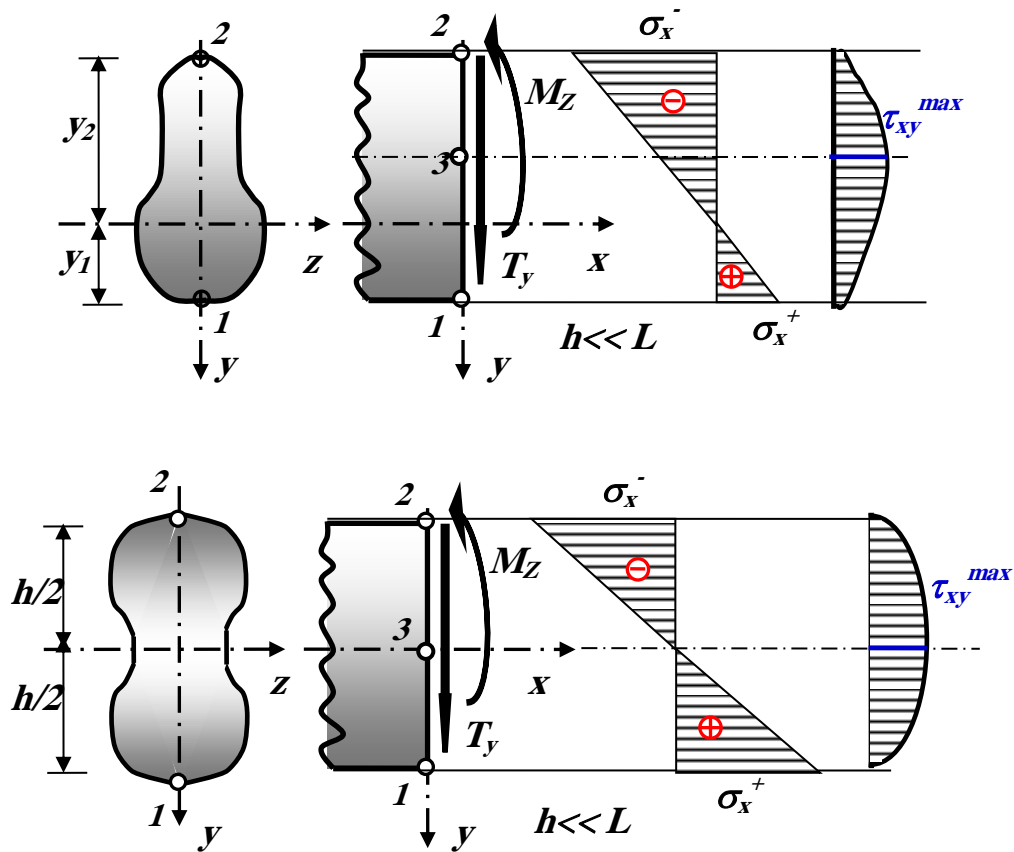
Et la condition de résistance est:

$$\sigma_{Eq} \leq [\sigma] \quad (6.16)$$

#### • Remarques

Pour la plus part des cas, on peut montrer que  $\tau_{xy}^{max} / \sigma_x^{max}$  est du même ordre que  $h/L$ . Donc, la valeur de  $\tau_{xy}^{max}$  peut être proche de la valeur de  $\sigma_x^{max}$  pour les poutres où  $h$  est comparable à  $L$  (pour les consoles courtes par exemple). Dans ce cas la condition  $\tau_{xy}^{max} \leq [\tau]$  peut être déterminante en calcul à la résistance.

Cependant, habituellement on utilise en construction des poutres pour les quelles  $h \ll L$  et par conséquent,  $\tau_{xy}^{max} \ll \sigma_x^{max}$ . Dans ce cas la condition  $\tau_{xy}^{max} \leq [\tau]$  est satisfaite si la condition  $\sigma_x^{max} \leq [\sigma]$  est satisfaite. C'est pourquoi, ordinairement le calcul à la résistance des poutres fléchies s'effectue selon la condition  $\sigma_x^{max} \leq [\sigma]$  pour la section où  $M_Z$  est maximal. La condition  $\tau_{xy}^{max} \leq [\tau]$  composée pour le point où  $\tau_{xy}$  est maximale (dans la section où  $T_y$  est maximal) sert à la vérification.



**Fig.6.17** – Distribution des contraintes dans une section de poutre en flexion simple.

• **Exemple 6.3**

Calculer les contraintes normale et tangentielle maximales pour une poutre ayant une section transversale rectangulaire.

• **Solution 6.3**

On a:

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x^{max-} = \frac{M_z}{I_z / y_{max}^-} = \frac{M_z}{W_Z^{min-}} \\ \sigma_x^{max+} = \frac{M_z}{I_z / y_{max}^+} = \frac{M_z}{W_Z^{min+}} \end{cases}$$

$$\tau_{xy} = \frac{T_y}{I_z} \frac{1}{2} \left( \left( \frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right) \Rightarrow \tau_{xy}^{max} = \frac{3}{2} \frac{T_y}{S} = K \frac{T_y}{S}; \quad K = \frac{3}{2}$$

Sur la figure (E6.3) on trace la distribution des contraintes normale et tangentielle le long de la section transversale de la poutre.

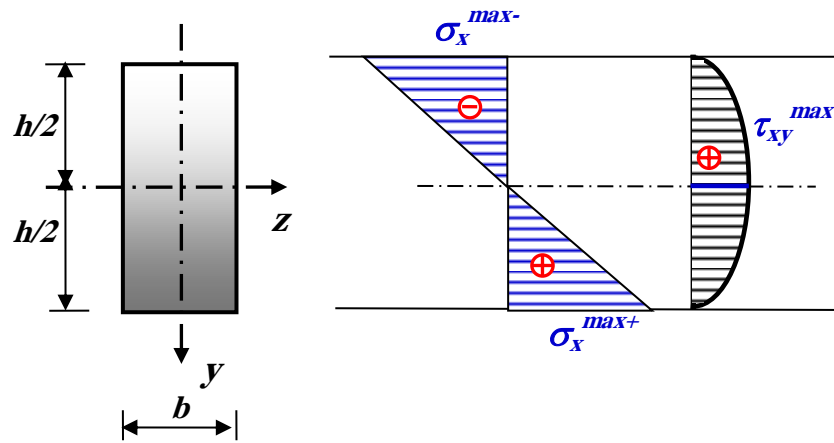


Fig. E6.3

• **Exemple 6.4**

Pour une poutre simplement appuyée, de longueur  $L$  et supportant une charge uniformément répartie, montrer que le rapport  $\frac{\tau_{xy}^{max}}{\sigma_x^{max}}$  est comparable à  $\frac{h}{L}$ . la section transversale de la poutre est supposée rectangulaire.

• **Solution 6.4**

La figure (E6.4) montre la variation de l'effort tranchant et le moment fléchissant le long de la poutre.

La contrainte normale maximale correspond à la section où le moment fléchissant est maximale ( $x = L/2$ ,  $M_z^{max} = \frac{qL^2}{8}$ ) et la contrainte tangentielle maximale correspond à la section où l'effort tranchant est maximal ( $x = 0$  ou  $x = L$ ,  $T_y^{max} = \frac{qL}{2}$ ).

$$M_z^{max} = \frac{qL^2}{8}, \quad T_y^{max} = \frac{qL}{2}, \quad S = bh, \quad W_z = \frac{bh^2}{6}$$

$$\sigma_x^{max} = \frac{M_z^{max}}{W_z} = \frac{3qL^2}{4bh^2}$$

$$\tau_{xy}^{max} = K \frac{T_y^{max}}{S} = \frac{3}{2} \frac{qL}{2bh} = \frac{3qL}{4bh}$$

$$\frac{\tau_{xy}^{max}}{\sigma_x^{max}} = \frac{h}{L}$$

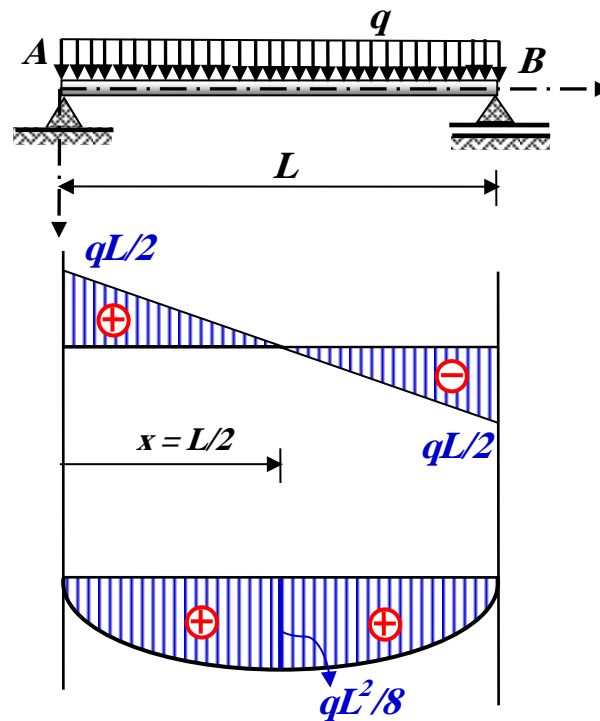


Fig. E6.4

• **Exemple 6.5**

Soit une poutre en acier de section transversale ronde, comme le montre la figure ci-dessous.

- 1- Calculer les réactions aux appuis.
- 2- Tracer les diagrammes des efforts intérieurs tout au long de la poutre.
- 3- Pour la section où le moment fléchissant est maximal, tracer la distribution des contraintes normale et tangentielle tout au long de la section transversale de la poutre.
- 4- Déterminer le diamètre  $D$  de la section si  $[\sigma] = 1600 \text{ kg/cm}^2$ ,  $[\tau] = 1100 \text{ kg/cm}^2$ .

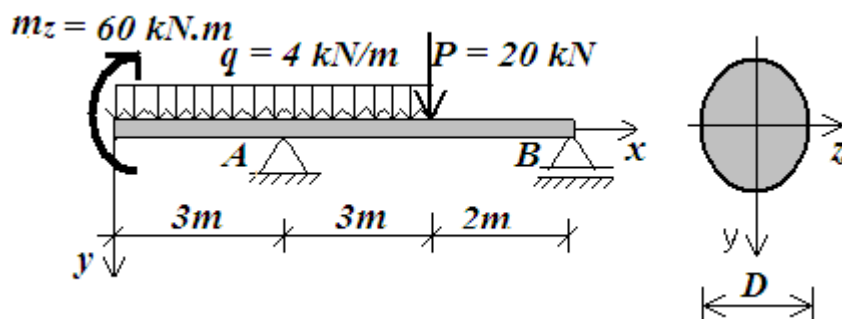


Fig. E6.5-a

• **Solution 6.5**

1- Réactions aux appuis

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Ax} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{Ay} + R_B = 44 \text{ kN}$$

$$\sum M /_A = 0 \Rightarrow R_B = 24 \text{ kN}$$

$$\sum M /_B = 0 \Rightarrow R_{Ay} = 20 \text{ kN}$$

### Vérification

$$R_{Ay} + R_B = 44 \text{ kN} \Leftrightarrow 20 + 24 = 44$$

### 2- Diagrammes des efforts intérieurs

#### Section 1-1 $0 \leq x \leq 3 \text{ m}$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_y = -4x \quad d'où \quad \begin{cases} T_y(x=0) = 0 \\ T_y(x=3) = -12 \text{ kN} \end{cases}$$

$$\sum M /_C = 0 \Rightarrow M_z = 60 - 2x^2 \quad d'où \quad \begin{cases} M_z(x=0) = 60 \text{ kN.m} \\ M_z(x=3) = 42 \text{ kN.m} \end{cases}$$

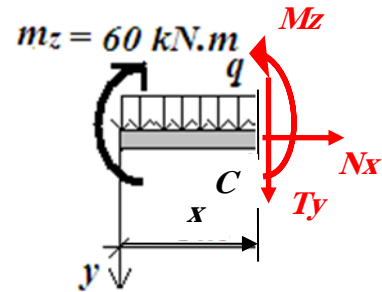


Fig. E6.5-b

#### Section 2-2 $3 \leq x \leq 6 \text{ m}$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_y = 20 - 4x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T_y(x=3) = +8 \text{ kN} \\ T_y(x=6) = -4 \text{ kN} \end{cases}$$

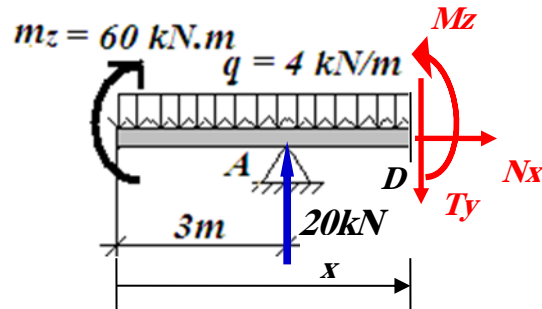


Fig. E6.5-c

$$\sum M /_D = 0 \Rightarrow M_z = 60 + 20(x-3) - 2x^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M_z(x=3) = 42 \text{ kN.m} \\ M_z(x=6) = 48 \text{ kN.m} \end{cases}$$

$$T_y = 0 \Rightarrow x = 5 \text{ m}$$

$$M_z^{max} = M_z(x=5 \text{ m}) = 50 \text{ kN.m}$$

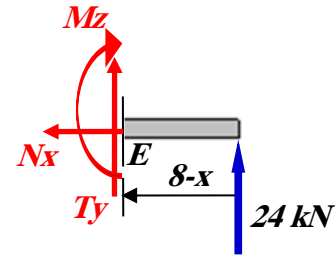


**Section 3-3**  $6 \leq x \leq 8m$ 

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_y = -24kN$$

$$\sum M / E = 0 \Rightarrow M_z = 24(8-x)d' où \quad \begin{cases} M_z(x=6) = 48kN.m \\ M_z(x=8) = 0 \end{cases}$$

**Fig. E6.5-d**

Les diagrammes du moment fléchissant et de l'effort tranchant sont représentés sur la figure E6.5-e.

**3- Distribution des contraintes (Fig. E6.5-f)**

$$M_z^{max} = 60kN.m; \quad T_y^{cor} = 0$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_x(y) &= \frac{M_z}{I_z} y = \frac{60.10^4}{\frac{\pi D^4}{64}} y \\ \tau_{xy} &= \frac{T_y \cdot S_{Iz}(y)}{I_z \cdot b(y)} = 0 \end{aligned} \right.$$

**4- Dimensionnement**

Le dimensionnement à la condition de résistance se fait selon la condition:

$$\sigma_{max} \leq [\sigma]$$

$$\frac{6111,55.10^3}{D^3} \leq 1600 \Rightarrow D \geq 18,3cm$$

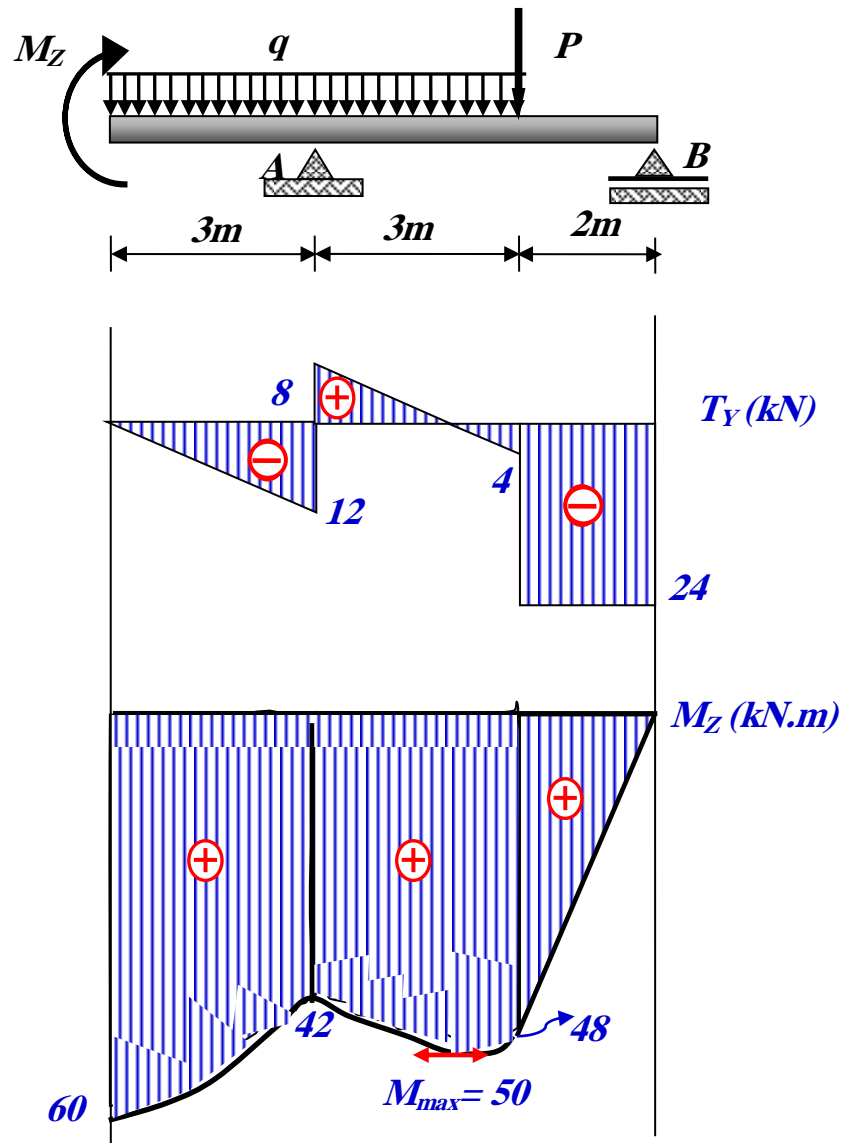


Fig. E6.5-e

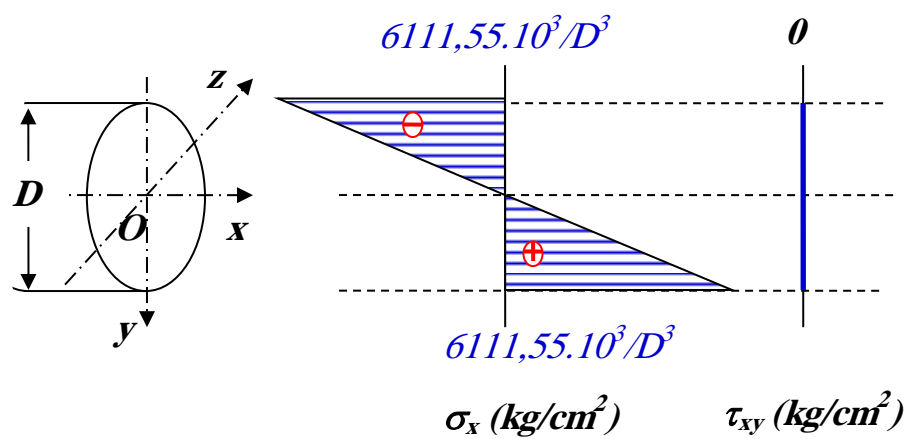
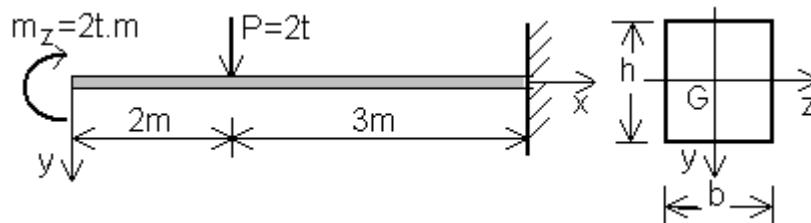


Fig. E6.5-f

## Exercices

### Exercice N°1

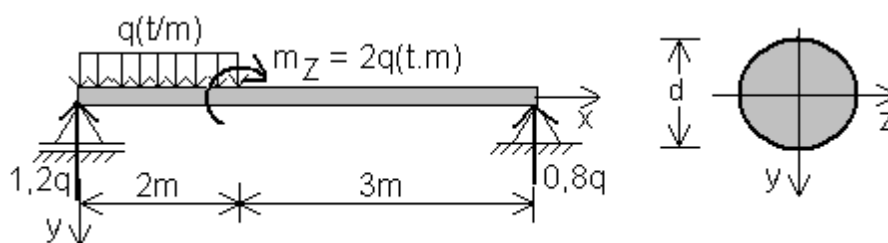
Soit une poutre en acier de section transversale rectangulaire, comme le montre la figure ci-dessous.



- 1- Calculer les réactions aux appuis.
- 2- Tracer les diagrammes des efforts tranchants et des moments fléchissant tout au long de la poutre.
- 3- Déterminer la section (ou les sections) dangereuse.
- 4- Tracer la distribution des contraintes normale et tangentielle tout au long de la section transversale de la poutre, pour la section (ou les sections) dangereuse.
- 5- Déterminer la dimension  $b$  sachant que  $[\sigma] = 1600 \text{ kg/cm}^2$ ,  $[\tau] = 1100 \text{ kg/cm}^2$ ,  $h = 15 \text{ cm}$ .

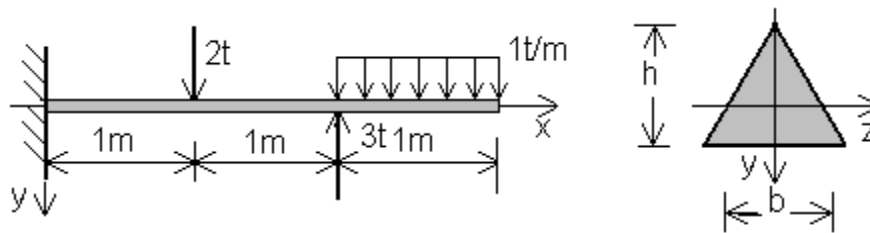
### Exercice N°2

Soit une poutre en bois de section transversale ronde. Déterminer une capacité de chargement  $q(\text{t/m})$ . On donne  $[\sigma]^+ = 100 \text{ kg/cm}^2$ ,  $[\sigma]^- = 120 \text{ kg/cm}^2$ ,  $[\tau] = 20 \text{ kg/cm}^2$ ,  $d = 20 \text{ cm}$ .

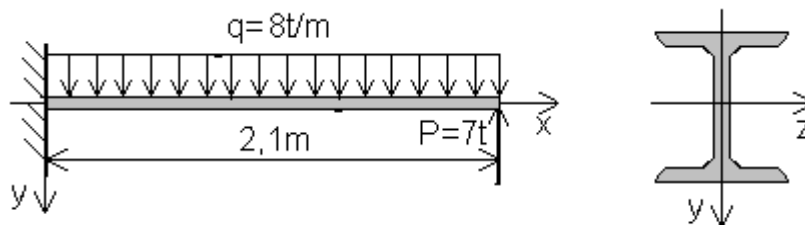


**Exercice N°3**

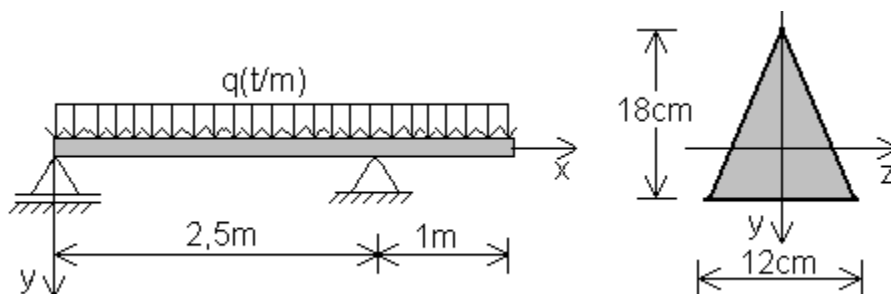
Soit une poutre en acier de section transversale triangulaire. Déterminer la dimension  $b$  de la section transversale. On donne  $[\sigma] = 1600 \text{ kg/cm}^2$ ,  $[\tau] = 1100 \text{ kg/cm}^2$ ,  $h = 12 \text{ cm}$ .

**Exercice N°4**

Soit une poutre en acier profilée en I (IPE). Déterminer les dimensions de la section droite. On donne  $[\sigma] = 1600 \text{ kg/cm}^2$ ,  $[\tau] = 1100 \text{ kg/cm}^2$ .

**Exercice N°5**

Soit une poutre en bois de section transversale triangulaire. Déterminer une capacité de chargement  $q(\text{t/m})$ . On donne  $[\sigma]^+ = 100 \text{ kg/cm}^2$ ,  $[\sigma]^- = 120 \text{ kg/cm}^2$ ,  $[\tau] = 20 \text{ kg/cm}^2$ .



# RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

**Alexandru D.C.** *Quelques chapitres de la résistance des matériaux*. Ed. OPU, Alger, 267p.

**Anisimov A.** *Calcul des barres dans le cas de sollicitation composée (Partie 1 de RDM II)*. Ed. OPU, Alger, 1993, 111p.

**Boucard P.A.** *Cours de Dimensionnement des Structures - Résistance des Matériaux*. IUT Cachan, Paris, 2011, 89p.

**Case J., Chilver L., Ross C.T.F.** *Strength of Materials and Structures*. Ed. John Wiley & Sons Inc., New York, 1999, 699p.

**Del Pedro M., Gmür T., Botsis J.** *Introduction à la mécanique des solides et structures*. PPUR presses polytechniques et Universitaires Romandes, CH-1015 Lausanne, 2004 - 313p.

**Dias da Silva V.** *Mechanics and strength of materials*. Ed. Springer, New York, 2006, 529p.

**FANCHON J.L.** *Guide de mécanique: Sciences et technologies industrielles*. Ed. Nathan, Paris, 1996, 480p.

**Karnovski I.A., Lebed O.I.** *Formulas for structural dynamics: Tables, Graphs, and Solutions*. McGraw-Hill, 2004, 491p.

**Mott R.L.** *Applied Strength of Materials*. Ed. Prentice Hall, New Jersey, 1990, 559p

**Mott R.L.** *Solution manual to accompany Applied Strength of Materials*. Ed. Prentice Hall, New Jersey, 2002, 235p

**Nash W.A.** *Theory and problems of strength of materials*. 4<sup>th</sup> Ed. McGraw-Hill, New York, 1998, 474p.

**Patnaik S.N., Hopkins D.A.** *Strength of materials: A unified theory*. Ed. Elsevier, USA, 2004, 750p.

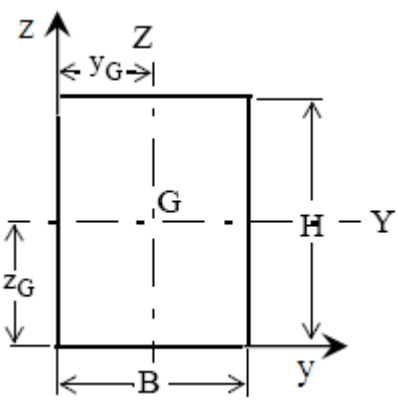
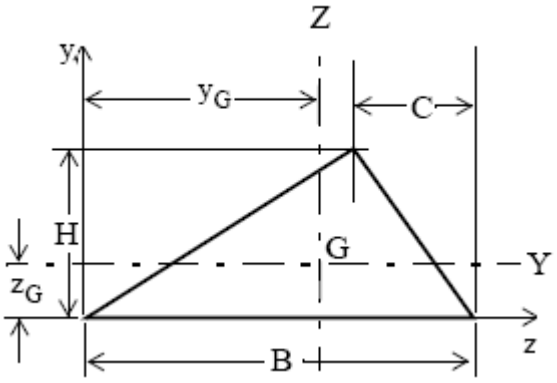
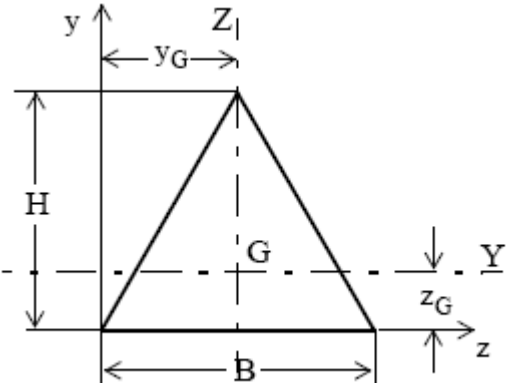
**Richard Liew J.Y., Shanmugam N.W., Yu C.H.** *Structural Analysis*. in *Structural Engineering Handbook*. Ed. Chen Wai-Fah Boca Raton: CRC Press LLC, 1999, 189p.

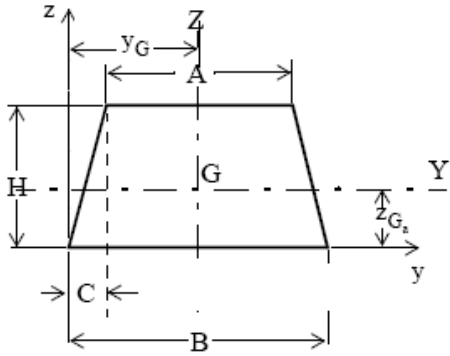
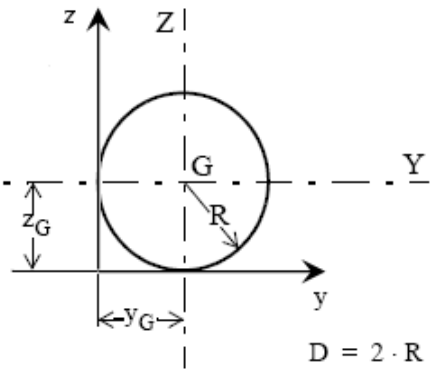
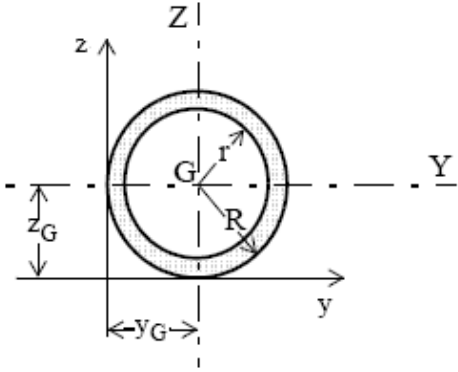
**Timoshenko S.** *Résistance des matériaux – Tome 1: Théorie élémentaire et problèmes*. 3<sup>ème</sup> Ed. Dunod, Paris, 1968, 420p.

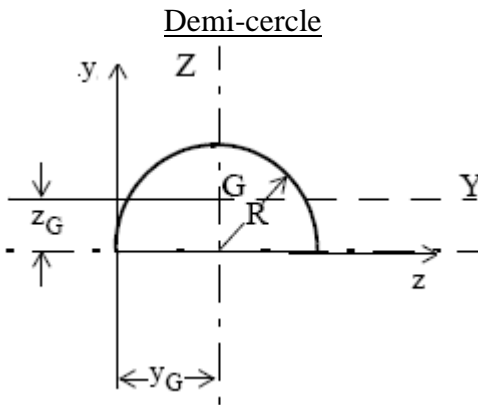
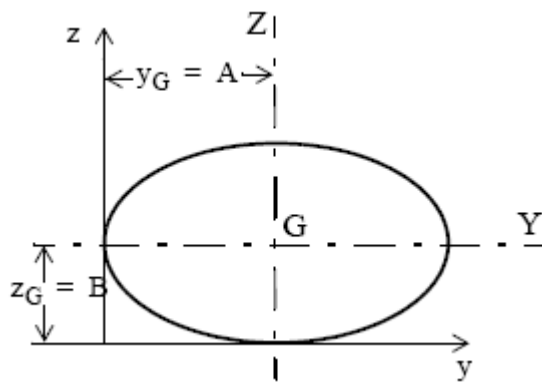
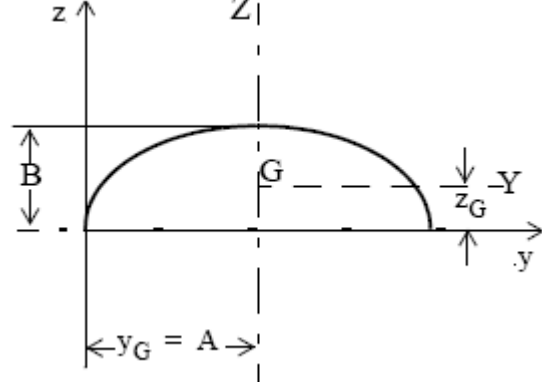
**Timoshenko S.** *Résistance des matériaux – Tome 2: Théorie développée et problèmes*, Dunod, Paris, 1968. 3<sup>ème</sup> Ed. Dunod, Paris, 1968, 464p.

## Annexe 4.1

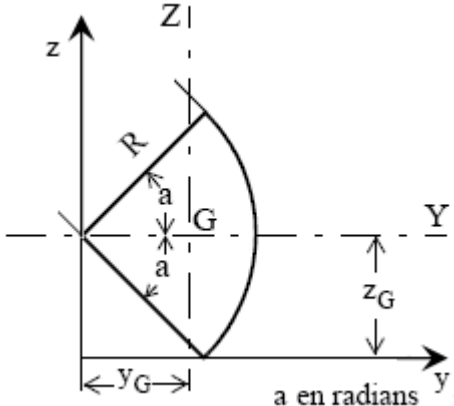
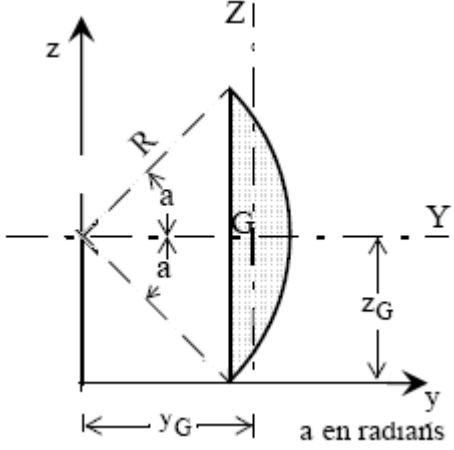
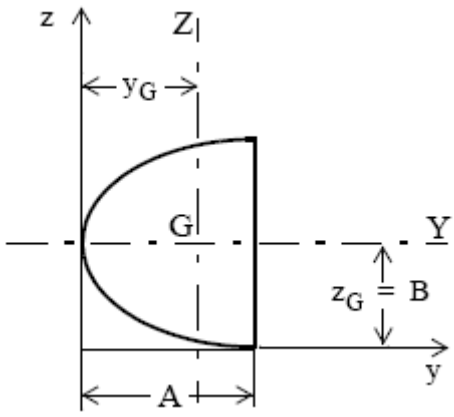
### Caractéristiques géométriques des sections usuelles

Section	Aire / Coordonnées du centre de gravité	Moments quadratiques
<u>Rectangle</u> 	$A = B.H$ $y_G = \frac{B}{2}$ $z_G = \frac{H}{2}$	$I_Y = \frac{BH^3}{12}$ $I_Z = \frac{HB^3}{12}$
<u>Triangle quelconque</u> 	$A = B.H / 2$ $y_G = \frac{2B + C}{3}$ $z_G = \frac{H}{3}$	$I_Y = \frac{BH^3}{36}$ $I_Z = \frac{BH}{36} \cdot (B^2 + C^2 - BC)$
<u>Triangle équilatéral</u> 	$A = B.H / 2$ $y_G = \frac{B}{2}$ $z_G = \frac{H}{3}$	$I_Y = \frac{BH^3}{36}$ $I_Z = \frac{B^3 H}{48}$

<p style="text-align: center;"><u>Trapèze isocèle</u></p> 	$A = (A + B) \cdot H / 2$ $y_G = \frac{B}{2}$ $z_{G_a} = \frac{H \cdot (B + 2A)}{3 \cdot (B + A)}$	$I_Y = \frac{H^3 \cdot (A^2 + 4AB + B^2)}{36 \cdot (A + B)}$ $I_Z = \frac{H \cdot (A + B) \cdot (A^2 + B^2)}{48}$
<p style="text-align: center;"><u>Cercle</u></p>  <p style="text-align: center;"><math>D = 2 \cdot R</math></p>	$A = \pi R^2$ $y_G = R$ $z_G = R$	$I_Y = \frac{\pi \cdot R^4}{4}$ $= 0.0491 \cdot D^4$ $I_Z = \frac{\pi \cdot R^4}{4}$ $= 0.0491 \cdot D^4$
<p style="text-align: center;"><u>Cercle creux (tube)</u></p> 	$A = \pi (R^2 - r^2)$ $y_G = R$ $z_G = R$	$I_Y = \frac{\pi \cdot (R^4 - r^4)}{4}$ $I_Z = \frac{\pi \cdot (R^4 - r^4)}{4}$

<p style="text-align: center;"><u>Demi-cercle</u></p> 	$A = \pi R^2 / 2$ $y_G = R$ $z_G = 0.2122 \cdot D$ $= 0.4244 \cdot R$	$I_Y = 0.1098 \cdot R^4$ $I_Z = 0.3927 \cdot R^4$
<p style="text-align: center;"><u>Ellipse</u></p> 	$\text{Aire} = \pi \cdot A \cdot B$ $y_G = A$ $z_G = B$	$I_Y = \frac{\pi \cdot AB^3}{4}$ $= 0.7854 \cdot AB^3$ $I_Z = \frac{\pi \cdot A^3 B}{4}$ $= 0.7854 \cdot A^3 B$
<p style="text-align: center;"><u>Demi-ellipse</u></p> 	$\text{Aire} = \pi \cdot A \cdot B / 2$ $y_G = A$ $z_G = 0.424 \cdot B$	$I_Y = 0.1098 \cdot AB^3$ $I_Z = 0.3927 \cdot A^3 B$



<p><u>Secteur circulaire</u></p>  <p><math>\phi = 2.a</math> (en degré)</p>	$A = (\pi/360^\circ) \cdot \phi \cdot R^2$ $y_G = \frac{2}{3} \cdot \frac{R \sin a}{a}$ $z_G = R \sin a$	$I_Y = \frac{R^4}{4} \cdot (a - \sin a \cos a)$ $I_Z = \frac{R^4}{4} \cdot \left( a - \frac{16(\sin a)^2}{9a} + \frac{\sin 2a}{2} \right)$
<p><u>Segment circulaire</u></p>  <p>a en radians</p>	$A = \frac{R^2}{2} (2a - \sin 2a)$ $y_G = \frac{4R(\sin a)^3}{3(2a - \sin 2a)}$ $z_G = R \sin a$	$I_Y = \frac{AR^2}{4} \left( 1 - \frac{2(\sin a)^3 \cos a}{3(a - \sin a \cos a)} \right)$ $I_Z = \frac{AR^2}{4} \left( 1 + \frac{2(\sin a)^3 \cos a}{a - \sin a \cos a} \right) - \frac{4R^6(\sin a)^6}{9A}$
<p><u>Segment parabolique</u></p>  <p><math>z_G = B</math></p>	$A = (2/3) \cdot (2B \cdot A)$ $y_G = 0.6 \cdot A$ $z_G = 0.375 \cdot B$	$I_Y = 0.0396 \cdot AB^3$ $I_Z = 0.0457 \cdot A^3 B$

## Annexe 4.2

### Calcul des caractéristiques géométriques des sections planes par décomposition

$N^{\circ}$	$A_i$ ( $cm^2$ )	$x_i$ ( $cm$ )	$y_i$ ( $cm$ )	$x_i.A_i$ ( $cm^3$ )	$y_i.A_i$ ( $cm^3$ )	$x_G = \frac{\sum(x_i.A_i)}{\sum(A_i)}$ ( $cm$ )	$y_G = \frac{\sum(y_i.A_i)}{\sum(A_i)}$ ( $cm$ )
1							
2							
3							
⋮							
n							
Total	$\sum(A_i)$			$\sum(x_i.A_i)$	$\sum(y_i.A_i)$		

$N^{\circ}$	$a_i = x_G - x_i$ ( $cm$ )	$b_i = y_G - y_i$ ( $cm$ )	$I_{xi}$ ( $cm^4$ )	$I_{yi}$ ( $cm^4$ )	$I_{x_i y_i}$ ( $cm^4$ )
1					
2					
3					
⋮					
n					
Total	$\sum(A_i)$			$\sum(x_i.A_i)$	$\sum(y_i.A_i)$

$N^{\circ}$	$I_{Gxi} = (I_{xi} + b_i^2.A_i)$ ( $cm^4$ )	$I_{Gyi} = (I_{yi} + a_i^2.A_i)$ ( $cm^4$ )	$I_{GxiGyi} = (I_{x_i y_i} + a_i.b_i.A_i)$ ( $cm^4$ )
1			
2			
3			
⋮			
n			
Total	$I_{Gx} = \sum(I_{Gxi})$	$I_{Gy} = \sum(I_{Gyi})$	$I_{GxGy} = \sum(I_{GxiGyi})$