CHAPITRE 4

LA TRANSFORMÉE DE $\mathscr{F}$OURIER

4.1 Fonctions localement intégrables

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ une application.

Définition 4.1.1
On dit que f est localement intégrable sur I si f est intégrable sur tout intervalle fermé borné contenu dans I.

C'est à dire, f est localement intégrable sur I, si quelque soit $[a, b] \subset I$, alors $\int_a^b f(x)dx$ existe.

Remarque 4.1.1
Il est clair que toutes les fonctions continues sont localement intégrables.
On note par $Loc(I, \mathbb{R}) = \{f : I \longmapsto \mathbb{R} : f \text{ localement intégrable}\}$.
On a alors $C(I, \mathbb{R}) \subset Loc(I, \mathbb{R})$ et l'inclusion est stricte. Comme exemple la fonction $f(x) = [x]$, (partie entière de x) est localement intégrable mais non continue.

Proposition 4.1.1
L'ensemble $Loc(I, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, (espace de toutes les fonctions définies de I dans $\mathbb{R}$).

4.2 L'intégrale de $\mathscr{F}$ourier

Pour conclure l'étude de la théorie des séries de $\mathscr{F}$ourier, on examinera le cas limite où l'intervalle $]-\ell, \ell[$, dans lequel on étudie la série de $\mathscr{F}$ourier , tend vers $]-\infty, \infty[$, c'est à dire lorsque $\ell \longrightarrow \infty$.
Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$ et telle que $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt$ converge.
On suppose que f satisfait aux conditions de Dirichlet et admet un développement en série de $\mathscr{F}$ourier dans l'intervalle $[-\ell, \ell]$, $\ell > 0$. Donc il existe une fonction $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ périodique, de période $T = 2\ell = \dfrac{2\pi}{\omega}$, vérifiant les hypothèses de Dirichlet (donc développable en série de $\mathscr{F}$ourier) telle que la restriction $g_{|[-\ell,\ell]} = f$.

Alors pour tout $x \in [-\ell, \ell]$ on a :

(a) $$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\right] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\right]$$

(b) $$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} f(x)\cos(n\omega x)dx = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx$$

(c) $$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} f(x)\sin(n\omega x)dx = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx$$

En remplaçant les quantités (b) et (c) dans (a), on a :

$$f(x) = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx + \frac{1}{\ell}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\left(\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}t\right)\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\right)dt\right] =$$

$$\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx + \frac{1}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}(t-x)\right)dt \qquad (1)$$

Nous allons étudier cette dernière intégrale quand $\ell \to \infty$.
Posons $\alpha_1 = \frac{\pi}{\ell}, \quad \alpha_2 = \frac{2\pi}{\ell}, \dots, \alpha_n = \frac{n\pi}{\ell}$ et $\Delta\alpha_n = \alpha_n - \alpha_{n-1} = \frac{\pi}{\ell}$.
En reportant dans l'expression (1) ci-dessus, on obtient :

$$f(x) = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{+\ell} f(t)dt + \frac{1}{\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\cos\alpha_n(t-x)dt\right]\Delta\alpha_n$$

Posons $\varphi(\alpha_n) = \int_{-\ell}^{+\ell} f(t)\cos\left(\alpha_n(t-x)\right)dt$. Il résulte de cela

$$\sum_{k=1}^{n-1}\varphi(\alpha_k)\Delta\alpha_k = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\cos(\alpha_k(t-x)dt)\Delta\alpha_k\right)$$

Par conséquent
$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\varphi(\alpha_k)\Delta\alpha_k = \int_{\pi/\ell}^{\infty}\varphi(\alpha)d\alpha$ (l'intégrale de Riemann.)
Donc $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\varphi(\alpha_k)\Delta\alpha_k = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\cos(\alpha_k(t-x))dt\right)\Delta\alpha_k\right]$.
Ainsi $\frac{1}{\pi}\int_{\pi/\ell}^{\infty}\varphi(\alpha)d\alpha = \frac{1}{\pi}\int_{\pi/\ell}^{\infty}\left(\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\cos(\alpha(t-x))dt\right)d\alpha$.
Comme

$$\lim_{\ell\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{\pi/\ell}^{\infty}\varphi(\alpha)d\alpha = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\varphi(\alpha)d\alpha$$

$$\lim_{\ell\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{\pi/\ell}^{\infty}\left[\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\cos(\alpha(t-x))dt\right]d\alpha = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\alpha(t-x))dt\right]d\alpha.$$

On a finalement la relation pour f continue :

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\alpha(t-x))dt\right]d\alpha$$

Cette dernière expression est appelée intégrale de $\mathscr{F}$ourier. Cette égalité a lieu en tout point x où f est continue.
Si f possède des discontinuités, on a la formule valable pour tout x :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\alpha(t-x))dt\right]d\alpha = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

Posons maintenant $\phi(\alpha) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\alpha(t-x))dt$. Il est clair que $\phi(-\alpha) = \phi(\alpha)$ et donc ϕ est paire et par suite $\displaystyle\int_0^{\infty}\phi(\alpha)d\alpha = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\alpha)d\alpha$.
On a finalement :

L'intégrale de $\mathscr{F}$ourier .

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\alpha(t-x)dt\right]d\alpha$$

4.2.1 forme complexe de l'intégrale de $\mathscr{F}$OURIER

Posons $\psi(\alpha) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\alpha(t-x))dt$.

ψ est une fonction impaire et donc pour tout $a > 0$, $\displaystyle\int_{-a}^{a}\psi(\alpha)d\alpha = 0 = \int_{-a}^{a}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\alpha(t-x))dt\right]d\alpha$.
Donc
$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a}\psi(\alpha)d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\alpha(t-x))dt\right]d\alpha = 0$.
On dit dans ce cas que l'intégrale converge en valeur principale de Cauchy vers 0. Ceci implique qu'on a aussi $\displaystyle\frac{-i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\alpha(t-x))dt\right]d\alpha = 0$ et donc ;

Forme complexe de l'intégrale de $\mathscr{F}$ourier .

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\alpha(t-x)}dt\right]d\alpha.$$

Posons :

$$\mathscr{F}(f)(\alpha) = \widehat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\alpha t}dt;$$

alors

$$\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\alpha(t-x)}dt\right]d\alpha = \frac{2\pi f(x)}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{2\pi}f(x).$$

On peut écrire généralement si f possède des discontinuités :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

Maintenant on peut définir la notion de transformée de $\mathscr{F}$ourier.

4.3 Transformée de $\mathscr{F}$ourier

Définition 4.3.1
Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable et absolument intégrable sur $\mathbb{R}$.
On définit la transformée de $\mathscr{F}$ourier de f, la fonction notée $\widehat{f}$ ou $\mathscr{F}$(f) de $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$; et sa transformée inverse de $\mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}$ par :

Transformée de $\mathscr{F}$ourier .

$$\mathscr{F}(f)(\alpha) = \widehat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx$$

Transformée inverse de $\mathscr{F}$ourier.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

Exemple 4.3.1
Soit $f(x) = e^{-|x|}$.

$$\widehat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{-i\alpha x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{0} e^{x} e^{-i\alpha x} dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x} e^{-i\alpha x} dx \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{0} e^{(1-i\alpha)x} dx + \int_{0}^{\infty} e^{-(1+i\alpha)x} dx \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{1+i\alpha} + \frac{1}{1-i\alpha} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{1+\alpha^2}.$$

Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, La transformaée inverse donne :

$$f(x) = e^{-|x|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\alpha^2} e^{i\alpha x} d\alpha$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+\alpha^2} d\alpha + \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{1+\alpha^2} d\alpha = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+\alpha^2} d\alpha + i.0\,;$$

d'où :

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+\alpha^2}\, d\alpha = \frac{\pi}{2}\, \mathrm{e}^{-|x|}.$$

En particulier on a ; $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2\,\mathrm{e}}$.

4.4 Propriétés

Lemme 4.4.1 (Riemann)

On pose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $f : [a,b] \mapsto \mathbb{K}$ une fonction intégrable sur $[a,b]$. Alors les fonctions $f(t)\cos \alpha t$ et $f(t)\sin \alpha t$ sont intégrables dans $[a,b]$ pour tout α dans $\mathbb{R}$ et on a :

$$\lim_{\alpha \to \pm\infty} \int_{a}^{b} f(t) \cos \alpha t\, dt = \lim_{\alpha \to \pm\infty} \int_{a}^{b} f(t) \sin \alpha t\, dt = 0$$

Preuve.
f intégrable sur $[a,b]$ implique que pour tout $\varepsilon > 0$,
il existe une subdivision de $[a,b]$ $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$
et une fonction en escalier,
$g : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ telles que $|f(t) - g(t)| < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

$$\left|\int_a^b (f(t) - g(t)) \cos \alpha t dt\right| \leq \int_a^b |f(t) - g(t)||\cos \alpha t| dt \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \int_a^b dt = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or, dans chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$, la fonction g est constante et vaut $g_{|]x_k,x_{k+1}[}(t) = c_k$.
On a alors,

$$\begin{aligned}\int_a^b g(t) \cos \alpha t\, dt &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} g(t) \cos \alpha t\, dt = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} \cos \alpha t\, dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k \left(\frac{\sin \alpha t}{\alpha}\right)_{x_k}^{x_{k+1}} = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} c_k (\sin \alpha x_{k+1} - \sin \alpha x_k) \underset{\alpha \longrightarrow \pm\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Et par suite,

$$\lim_{\alpha \to \pm\infty} \int_a^b f(t) \cos \alpha t\, dt = 0.$$

Raisonnement identique pour la deuxième intégrale.

Théorème 4.4.1

> Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ une fonction localement intégrable et absolument intégrable sur $\mathbb{R}$. Alors
>
> 1. $\widehat{f}(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\alpha x}\, dx$ est normalement convergente.
> 2. $\widehat{f}$ est bornée.
> 3. $\displaystyle\lim_{\alpha \to \pm\infty} \widehat{f}(\alpha) = 0$

Preuve.
1. C'est immédiat car $|f(x) e^{-i\alpha x}| = |f(x)|$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}$ par hypothèse.
2. $|\widehat{f}(\alpha)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) e^{-i\alpha x}|\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx = M$.
3. Posons $I(a) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-a}^{a} |f(x)|\, dx$.

$\displaystyle\lim_{a \to \infty} I(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx = I$ existe.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors $b > 0$ tel que $|I - I(b)| = I - I(b) \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

$$|\widehat{f}(\alpha)| = \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\alpha x}\, dt\right| =$$

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-b} f(x) e^{-i\alpha x}\, dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^{b} f(x) e^{-i\alpha x}\, dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{b}^{\infty} f(x) e^{-i\alpha x}\, dx\right| \leq$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-b} |f(x)|\, dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left|\int_{-b}^{b} f(x) e^{-i\alpha x}\, dx\right| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{b}^{\infty} |f(x)|\, dx.$$

Donc $|\widehat{f}(\alpha)| \leq I - I(b) + \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\displaystyle\int_{-b}^{b} f(x)e^{-i\alpha x}\, dx\right|.$
Comme la fonction $f(x)e^{-i\alpha x}$ est localement intégrable, d'après le lemme de Riemann (4.4.1), $\displaystyle\lim_{\alpha\to\pm\infty}\int_{-b}^{b} f(x)e^{-i\alpha x}\, dx = 0.$

Il existe alors $M > 0$, tel que pour tout $|\alpha| \geq M$, on a $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\displaystyle\int_{-b}^{b} f(x)e^{-i\alpha x}\, dx\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}.$

Il résulte que pour tout $|\alpha| \geq M$, $|\widehat{f}(\alpha)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, ce qui traduit le fait que $\displaystyle\lim_{\alpha\to\pm\infty}\widehat{f}(\alpha) = 0.$

Notations.

- $\mathscr{K} = \left\{ f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C} : f \in \mathrm{Loc}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty \right\}.$
- $\mathscr{B} = \left\{ f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C} : \displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0 \right\}.$
- D : opérateur de dérivation définie sur l'ensemble des fonction dérivables $D(\mathbb{R},\mathbb{C})$ par $Df = f'$.
- P : opérateur défini dans l'ensemble des fonctions $\mathscr{B}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ par $(Pf)(x) = xf(x)$.
- $\widehat{f}(\alpha) = \mathscr{F}(f(x))(\alpha)$

Théorème 4.4.2 [Dérivée de la transformée de $\mathscr{F}$ourier]

> Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ une fonction satisfaisant aux conditions suivantes :
>
> i) $f \in \mathscr{K}$
>
> ii) f continue
>
> iii) $Pf \in \mathscr{K}$
>
> Alors $\widehat{f} \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ (fonctions continûment dérivables) et on a :
>
> $$\mathscr{F}'(f(x))(\alpha) = -i\mathscr{F}(xf(x))(\alpha)$$

Preuve.
Soit la fonction $\varphi : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ définie par $\varphi(t,x) = f(t)e^{-itx}$.
φ possède les propriétés suivantes :

a) φ est continue comme produit de deux fonctions continues

b) $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(t,x) = -itf(t)e^{-itx} = -it\varphi(t,x)$ est continue

c) L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t,x)dt$ est normalement convergente car $|\varphi(t,x)| = |f(t)|$ et $f \in \mathscr{K}$

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,x)dt$ est normalement convergente car $\left|\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(t,x)\right| = |tf(t)| = |(Pf)(t)|$ et $Pf \in \mathscr{K}$

Pour ces raisons $\widehat{f}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{\infty-}^{\infty}\varphi(t,x)dt$ est dérivable dans $\mathbb{R}$ et on a :

$$(\widehat{f})'(x) = (D\widehat{f})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty-}^{\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,x)dt = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[tf(t,x)]e^{-itx}dt$$

Ce qui se traduit par $(\widehat{Df})(x) = -i(\widehat{Pf})(x)$ ou $i(\widehat{Df})(x) = (\widehat{Pf}(x)$ en multipliant par i chaque membre.

Théorème 4.4.3 [Transformée de $\mathscr{F}$ourier de la dérivée]

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ une fonction satisfaisant aux conditions suivantes :

1. $f \in \mathscr{K}$
2. $f \in C^1(\mathbb{R})$
3. $Df \in \mathscr{K}$

Alors $f \in \mathscr{B}$ et

$$\mathscr{F}(f'(x))(\alpha) = i\alpha\mathscr{F}(f(x))(\alpha)$$

Preuve.

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x f'(t)dt$. Puisque $Df \in \mathscr{K}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|dt$ est convergente et par suite $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)dt$ converge. D'où $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ell$ existe. Montrons que $\ell = 0$.
Pour cela, on fait un raisonnement par l'absurde. Supposons que $\ell \neq 0$.
a) Supposons $\ell > 0$.
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ell$. Par définition de la limite, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $x \geq M$ on a : $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$. Choisissons ε tel que $\ell - \varepsilon > 0$. Il résulte alors que $f(x) > 0$ pour tout $x \geq M$. Donc $\displaystyle\int_M^a (\ell - \varepsilon)dx \leq \int_M^a f(x)dx \leq \int_M^a (\ell + \varepsilon)dx$ puis lorsqu'on fait tendre $a \to \infty$, on obtient $\displaystyle\int_M^{\infty} f(x)dx \geq \infty$ et par conséquent $\displaystyle\int_M^{\infty} f(x)dx$ diverge. Il en est de même pour $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx = \int_0^M f(x)dx + \int_M^{\infty} f(x)dx$. D'où contraction car $f \in \mathscr{K}$.
b) Supposons que $\ell < 0$.
On prend $(-f)$ et on adopte le même raisonnement. Conclusion $\ell = 0$.
Exercice.
En s'inspirant de cette démonstration, montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

2) $i(\widehat{Pf})(x) = ix\widehat{f}(x) = \dfrac{ix}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\alpha x}\, dx = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ixf(x)e^{-i\alpha x}\, dx.$
Une intégration par parties avec $u = f$ et $dv = ixe^{-itx}dt$, on obtient :

$$i(\widehat{Pf})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-itx} f(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-itx}dt \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-itx}dt = (\widehat{Df})(x).$$

4.5 Quelques propriétés de la transformation de $\mathscr{F}$ourier

Adoptons la notation $\widehat{f} = \mathscr{F}(f)$.

4.5.1 Linéarité

Soient $f, g \in \mathscr{K}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors $\mathscr{F}(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha\mathscr{F}(f)(x) + \beta\mathscr{F}(g)(x)$.
La démonstration de cette propriété est simple.

4.5.2 Transformée de $\mathscr{F}$ourier de la translation.

Soit $T \in \mathbb{R}$ et soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ une application. On note $f_T(x) = f(x - T)$.
Si $f \in \mathscr{K}$.
$\mathscr{F}(f_T)(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_T(x)e^{-i\alpha x}dx = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x-T)e^{-i\alpha x}dx$. On pose $x - T = t$.
Alors $\mathscr{F}(f_T)(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(t+T)\alpha}\, dt = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\alpha t}e^{-i\alpha T}dt =$
$\dfrac{e^{-i\alpha T}}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\alpha t}\, dt.$
Donc $\mathscr{F}(f_T)(\alpha) = e^{-i\alpha T}\mathscr{F}(f)(\alpha)$.

4.5.3 Transformée de $\mathscr{F}$ourier de l'homothétie

Soit $k > 0$ et soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$. On note $f_k(x) = f(kx)$.
Si $f \in \mathscr{K}$,
$\mathscr{F}(f_k)(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_k(x)e^{-ix\alpha}dx = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(kx)e^{-ix\alpha}dx.$
En posant $kx = t$, on obtient :
$\mathscr{F}(f_k)(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\alpha\,(t/k)}\dfrac{dt}{k} = \dfrac{1}{k}\left[\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-it\,(\alpha/k)}dt\right] = \dfrac{1}{k}\mathscr{F}(f)\left(\dfrac{\alpha}{k}\right).$

4.5.4 Produit de convolution

Problème : Étant données deux fonctions f et g et leurs transformées de $\mathscr{F}$ourier $\mathscr{F}(f)(\alpha)$ et $\mathscr{F}(g)(\alpha)$, peut-on trouver une fonction k telle que

$$\mathscr{F}(k)(\alpha) = \mathscr{F}(f)(\alpha) \cdot \mathscr{F}(g)(\alpha)?$$

Solution
On a

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(f)(\alpha) \cdot \mathscr{F}(g)(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\alpha x}\, dx \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-i\alpha y}\, dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(y)e^{-i\alpha(x+y)}\, dxdy
\end{aligned}$$

Posons : $x + y = t$ et donc $dy = dt$, l'intégrale double devient :

$$\mathscr{F}(f)(\alpha) \cdot \mathscr{F}(g)(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)e^{-i\alpha t}\, dxdt$$

Posons : $h(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)\, dx$, on a donc :

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(f)(\alpha) \cdot \mathscr{F}(g)(\alpha) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\alpha t}\, dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\alpha t}\, dt \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathscr{F}(h)(\alpha)
\end{aligned}$$

En posant $k(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} h(t)$, la fonction k est solution du problème posée.

Définition 4.5.1
Soit $f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$. On appelle produit de convolution de f par g, la fonction notée $f \star g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par $(f \star g)(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x)dx$

Proposition 4.5.1

Le produit de convolution est commutatif ; et on a :

$$\mathscr{F}(f \star g)(\alpha) = \sqrt{2\pi}\mathscr{F}(f)(\alpha)\mathscr{F}(g)(\alpha)$$

Preuve :
La preuve découle directement de la définition ; puisque :
$\forall \alpha \in \mathbb{R} \;\; \mathscr{F}(f)(\alpha) \cdot \mathscr{F}(g)(\alpha) = \mathscr{F}(g)(\alpha) \cdot \mathscr{F}(f)(\alpha)$

Exercice 1
Démontrer la commutativité directement à partir de la définition intégrale.

En effet dans l'intégrale $(f \star g)(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x)dx$, on fait le changement de variable en posant $t - x = y$. On obtient :
$(f \star g)(t) = -\displaystyle\int_{\infty}^{-\infty} f(y)g(t-y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-y)f(y)dy = (g \star f)(t).$

Théorème 4.5.1 [Égalité de Parseval]

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ admettant une transformée de $\mathscr{F}$ourier $\mathscr{F}(f)$.
Alors on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\mathscr{F}(f)(\alpha)\right|^2 d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \left|f(t)\right|^2 dt$$

4.6 « Sinus et Cosinus-transformées »de $\mathscr{F}$ourier

Définition 4.6.1
Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction absolument intégrable sur $\mathbb{R}$.

1. On appelle cosinus-transformée de $\mathscr{F}$ourier de f, la fonction :

$$\widehat{f_c}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x)\cos(\alpha x)\, dx$$

L'expression

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \widehat{f_c}(\alpha)\cos(\alpha x)\, d\alpha$$

est appelée inverse de cosinus-transformée de $\mathscr{F}$ourier de f.

2. On appelle sinus-transformée de $\mathscr{F}$ourier de f, la fonction :

$$\widehat{f_s}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x)\sin(\alpha x)\,dx$$

L'expression

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \widehat{f_s}(\alpha)\sin(\alpha x)\,d\alpha$$

est appelée inverse de sinus-transformée de $\mathscr{F}$ourier de f.

Remarque 4.6.1
Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction admettant une transformée de $\mathscr{F}$ourier $\widehat{f}$.

a) Si f est paire.

$$\widehat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\alpha x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\Big(\cos(\alpha x) - i\sin(\alpha x)\Big)\,dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\alpha x)\,dx - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(\alpha x)\,dx.$$

Or la fonction $x \mapsto f(x)\cos(\alpha x)$ est paire et la fonction $t \mapsto f(x)\sin(\alpha x)$ est impaire. Il s'ensuit alors :

$\widehat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x)\cos(\alpha x)\,dx$ car $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(\alpha x)\,dx = 0$. D'où :

$$\widehat{f}(\alpha) = \widehat{f_c}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x)\cos(\alpha x)\,dx$$

b) Si f est impaire.
Avec le même raisonnement on obtient l'expression :

$\widehat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\alpha x}\,dx = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x)\sin(\alpha x)\,dx$. D'où :

$$\widehat{f}(\alpha) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x)\sin(\alpha x)\,dx = -i\widehat{f_s}(\alpha).$$

$$\widehat{f_s}(\alpha) = i\widehat{f}(\alpha).$$