Université Mouloud MAMMERI de TIZI-OUZOU
Concours d'entrée à la formation 3ème cycle en Automatique
Année universitaire : 2012-2013
Épreuve : Méthodes Numériques Appliquées
Durée : 02H00

Exercice 1. (6.0 points)

Pour déterminer les coordonnées (x_0, y_0) du centre d'un cercle et son rayon R, on propose d'utiliser la méthode de Newton. Les coordonnées de trois points appartenant au cercle sont résumées dans le tableau suivant :

x	8,21	0,34	5,96
y	0,00	6,62	−1,12

1. Mettre le problème sous la forme mathématique.
2. Écrire la formule de Newton.
2. D'après les données du problème, estimer les valeurs appropriées pour le point de démarrage de l'algorithme de Newton. (**la solution du problème n'est pas demandée**).

Exercice 2. (8.0 points)

Pour obtenir l'algorithme d'intégration d'équations différentielles de Adams-Bashforth à 3 pas (type multipas), on considère que les points x_i et x_{i+1} sont liés par la relation $h = x_{i+1} - x_i$ où h est un pas constant. Soit la fonction $y(x)$ et l'équation différentielle $y'(x) = f(x, y(x))$.

1. Faire un développement en série de Taylor de $y(x_{i+1})$ au voisinage de x_i à l'ordre 3.
2. Faire un développement en série de Taylor de $f(x_{i-1}, y(x_{i-1}))$ au voisinage de x_i à l'ordre 2.
3. Faire un développement en série de Taylor de $f(x_{i-2}, y(x_{i-2}))$ au voisinage de x_i à l'ordre 2.
4. L'algorithme de Adams-Bashforth à 3 pas est donné par la relation :

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + a\,h\,f(x_i, y(x_i)) + b\,h\,f(x_{i-1}, y(x_{i-1})) + c\,h\,f(x_{i-2}, y(x_{i-2}))$$

D'après les développements en série de Taylor précédents, déterminer les valeurs des paramètres a, b, c, en identifiant les coefficients de h, h^2, h^3.

5. Expliquer comment peut-on dérouler cet algorithme pour intégrer l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(0) = y_0$$

Exercice 3. (6.0 points)

On considère l'équation différentielle générale :

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad a < t < b, \quad y(a) = \alpha$$

1. En utilisant des développements en série de Taylor, montrer que l'on peut obtenir :

$$y'(t_k) = \frac{-3\,y(t_k) + 4\,y(t_{k+1}) - y(t_{k+2})}{2\,h} + O(h^2), \quad h = t_{k+1} - t_k, \forall k$$

2. En déduire l'algorithme d'intégration :

$$y_{k+2} = -3\,y_k + 4\,y_{k+1} - 2\,h\,f(t_k, y_k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-2.$$

3. Utiliser l'algorithme précédent pour résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'(t) = 1 - y(t), \quad 0 \leq t \leq 0,6 \quad \text{et} \quad y(0) = 0$$

avec le pas $h = 0,1$. Pour initialiser la méthode développée, travailler avec la méthode d'Euler.