Université Mouloud Mammeri-Tizi-Ouzou

Concours d'entrée à la formation de $3^{ème}$ cycle en automatique

Epreuve : Systèmes asservis linéaires continus et échantillonnés, Durée : 2h

PARTIE A : Systèmes Asservis Linéaires Continus

La fonction de transfert d'un système d'entrée x(t) et de sortie y(t) est donnée par :

$$G(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{1}{p+2a}, a > 0$$

p est la variable de Laplace et les conditions initiales sont nulles.

1) Calculer la réponse $y(t)$ du système à un échelon d'amplitude constante $x(t) = X_0 u(t)$ ($u(t)$ est l'échelon unité).
2) Déterminer la valeur du paramètre a permettant d'avoir une erreur nulle en régime permanent.

On insère ce système dans une boucle d'asservissement comme le montre la figure 1.

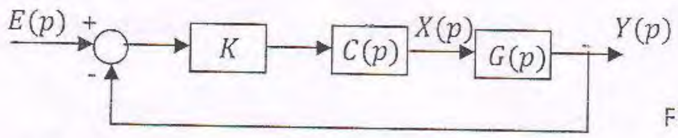

Figure 1

Où : $C(p) = \frac{1}{p+b}$ avec $b > 0$, $K > 0$ et $E(p)$ désigne la transformée de Laplace de l'entrée de consigne $e(t)$

3) Déterminer la fonction de transfert du système asservi.
4) Sachant que $a = 1/2$, déterminer les valeurs de K et b pour que l'amortissement z et la pulsation propre non amortie w_n de ce système asservi soient respectivement de 1.25 et de 4rd/sec.
5) Pour les valeurs trouvées précédemment, déterminer l'erreur de position en régime permanent pour une entrée échelon d'amplitude constante $e(t) = E_0 u(t)$. ($u(t)$est l'échelon unité).

   5-a) Peut-on ajuster K pour réduire cette erreur à 10% ? Justifier votre réponse.

   5-b) Peut-on ajuster K pour réduire cette erreur à zéro ? Justifier votre réponse.

Barème :

Partie A: 10 points

Partie B: **Exercice 1**: 05 points, **Exercice 2**: 05 points

PARTIE B : SYSTEMES ECHANTILLONNES

EXERCICE n°1

Soit $f(t)$ une fonction du temps définie et continue sur l'intervalle $t \in [0^+, +\infty[$. Son échantillonnage instantané produit une suite $\{f(nT)\}$ de nombres $f(nT)$, notée $f^*(t)$, où n est un entier positif ou nul. Ces nombres $f(nT)$ apparaissent à des instants régulièrement espacés d'une durée fixe T, dite période d'échantillonnage. Ainsi, $f^*(t)$ est le résultat d'une modulation d'un train d'impulsions de Dirac $\delta(t)$ par $f(t)$, ce qui s'écrit :

$$f^*(t) = f(t)\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\delta(t-nT) \qquad (1)$$

Par ailleurs, p étant la variable de la Transformée de Laplace (L), on a par définition :

$$F(p) \stackrel{\text{def}}{=} L[f(t)] \text{ et } F^*(p) \stackrel{\text{def}}{=} L[f^*(t)]$$

On a alors :

$$F^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)e^{-nTp} \qquad (2)$$

La transformée en z correspondante, $F(z)$ est:

$$F(z) = \mathrm{F^*(p)} = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)z^{-n}, \qquad (3)$$

expression dans laquelle on a posé $z = e^{Tp}$ et où $\mathrm{F^*(p)}$ est exprimée comme « fonction de fonction ».

Questions :

A) On demande l'expression finale de $F(z)$ (sous forme de fraction rationnelle) pour chacun des cas suivants :

1) Cas où $f(t) = e^{at}$, avec l'hypothèse $|z| > e^{at}$.
2) Cas où $f(t) = t$, avec l'hypothèse $|z| > 1$.
3) Cas où $f(t) = \cos\omega t$.

B) Quel est, pour une fonction donnée $f(t)$, le meilleur choix de la période d'échantillonnage T? Quels sont les inconvénients attendus pour un sur-échantillonnage ($T \to 0$); et pour un sous-échantillonnage ($T \to \infty$)?

EXERCICE n°2

La Figure 1 représente un schéma de commande en boucle fermée d'un procédé par un régulateur linéaire de structure générale, à actions prédictive et rétroactive.

On précise que :

- $\widehat{B_0G}$ est la fonction de transfert échantillonnée du procédé continu avec un bloqueur d'ordre zéro, d'entrée de commande u et de sortie y ,
- u_{FF1} est la composante du signal de commande représentant l'action prédictive (ou «feedforward ») à partir de la consigne u_c ,
- u_{FB} (ou «feedback») en est la composante rétroactive,

.../...

- Le régulateur a ainsi deux entrées, la consigne u_c et la sortie. Il peut être représenté par deux fonctions de transfert G_{F1} et G_R .
- Pour commodité d'écriture, on a omis la variable t pour les signaux, et/ou la variable fréquentielle z^{-1} ou temporelle q^{-1} pour les transferts. On rappelle ici que q^{-1} est l'opérateur de retard, défini comme suit : $q^{-1}x(t) = x(t-1)$.

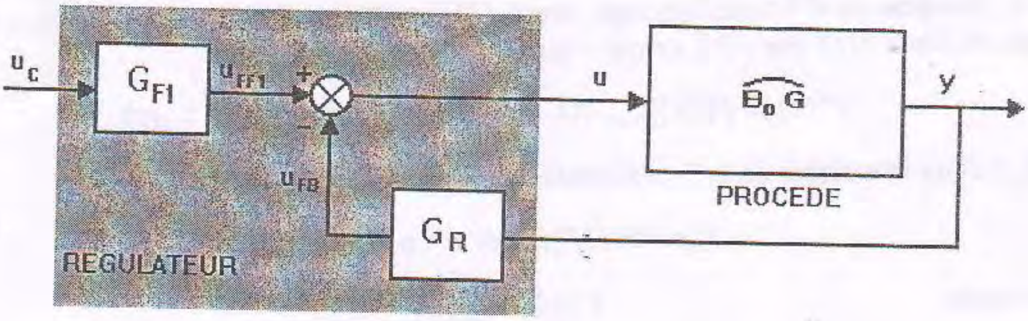

Figure 1 : Structure de régulateur linéaire à actions prédictive et rétroactive.

Questions :

1) On demande d'exprimer la loi de commande donnant u sachant que

$G_{F1} = \frac{T_1}{S_1}$ et $G_R = \frac{R_1}{S_2}$, où T_1, S_1, R_1, S_2 sont des polynômes en q^{-1}.

2) En fonction des éléments précédents, évaluer trois polynômes R, S, T de façon à obtenir le schéma de commande de la Figure 2, dans lequel le transfert du procédé est représenté par $\frac{B}{A}$, où A, B sont des polynômes en q^{-1}.
3) Retrouver alors la forme dite « polynomiale » du régulateur RST, en donnant son schéma fonctionnel « polynômial » déduit du schéma précédent.
4) Ecrire la loi de commande avec ce dernier schéma fonctionnel.
5) Exprimer la fonction de transfert en boucle fermée du système, $H_{BF} = \frac{y}{u_c}$
6) Donner l'expression générale de l'équation diophantine correspondante.

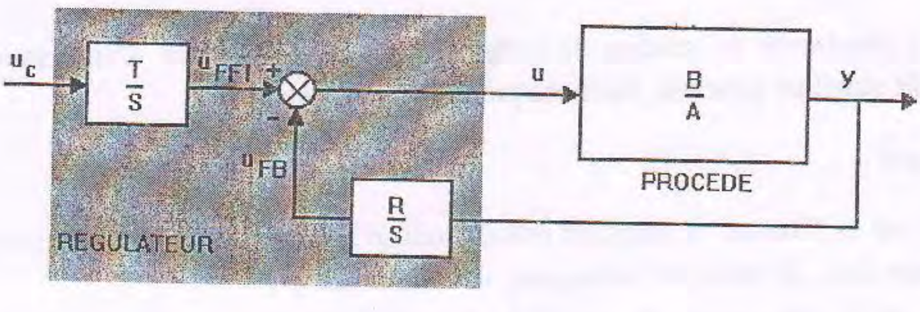

Figure 2 : Régulateur à actions prédictive et rétroactive, de type RST.