

ANALYSE

LMI 3.01

2008

G.EGUETHER

14 mai 2009

Table des matières

1	CONVERGENCE UNIFORME	3
2	SERIES	17
3	SERIES ENTIERES	45
4	INTEGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE	67
5	INTEGRALES GENERALISEES	99

Chapitre 1

CONVERGENCE UNIFORME

Dans ce chapitre on étudie la limite de suites de fonctions. La convergence uniforme est introduite pour que, connaissant des propriétés des fonctions de la suite, par exemple la continuité, on puisse en déduire la même propriété pour la limite. Toutes les fonctions envisagées seront à valeurs réelles ou complexes et définies sur un ensemble A non vide. Pour certains résultats, l'ensemble A sera un intervalle de \mathbb{R} .

1. Fonctions bornées

Rappelons qu'une fonction f à valeurs réelles ou complexes définie sur A est bornée s'il existe un nombre M tel que, pour tout x de A

$$|f(x)| \leq M .$$

Dans ce cas $|f|$ admet une borne supérieure, et l'on notera

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in A} |f(x)| = \sup(|f|(A)) .$$

On appelle cette expression la **norme infinie** de f .

Pour tout x de A on a donc $|f(x)| \leq \|f\|_{\infty}$, et si, pour tout x de A on a $|f(x)| \leq M$, alors $\|f\|_{\infty} \leq M$.

Lorsque f n'est pas bornée, on pourra poser

$$\|f\|_{\infty} = +\infty .$$

On a alors les propriétés suivantes :

1) $\|f\|_{\infty} = 0$ si et seulement si $f = 0$

2) Quels que soient le scalaire λ non nul, et la fonction f

$$\|\lambda f\|_{\infty} = |\lambda| \|f\|_{\infty}$$

3) Inégalité triangulaire : Quelles que soient les fonctions f et g définies sur A ,

$$\|f + g\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} + \|g\|_{\infty} .$$

4) Quelles que soient les fonctions f et g définies sur A , pour lesquelles le produit $\|f\|_{\infty} \|g\|_{\infty}$ ait un sens,

$$\|fg\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} \|g\|_{\infty} .$$

Les deux premières propriétés résultent des définitions. Pour la troisième, on remarque qu'elle est évidente si f ou g n'est pas bornée car le membre de droite est infini. Si f et g sont bornées, on a, pour tout x de A ,

$$|f(x)| \leq \|f\|_{\infty} \quad \text{et} \quad |g(x)| \leq \|g\|_{\infty} ,$$

et donc

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_{\infty} + \|g\|_{\infty} .$$

Alors $\|f\|_{\infty} + \|g\|_{\infty}$ majore $|f + g|$. Elle majore aussi la borne supérieure et donc

$$\|f + g\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} + \|g\|_{\infty} .$$

Pour la quatrième, sauf si $\|f\|_{\infty} = 0$ et $\|g\|_{\infty} = +\infty$ (ou l'inverse), on a

$$|f(x)g(x)| = |f(x)| |g(x)| \leq \|f\|_{\infty} \|g\|_{\infty} .$$

Alors $\|f\|_\infty \|g\|_\infty$ majore $|fg|$. Elle majore aussi la borne supérieure et donc

$$\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty .$$

□

2. Convergence simple

Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes, définies sur le même ensemble A , et soit f une fonction définie sur A . On dit que la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ **converge simplement** vers f , ou que f est **limite simple** de la suite $(f_n)_{n \geq 0}$, si pour tout x dans A , la suite $(f_n(x))_{n \geq 0}$ converge vers $f(x)$.

On peut formuler cette propriété avec des quantificateurs :

$$(\forall x \in A)(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})((n \geq N) \Rightarrow (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon))$$

Nous remarquerons que dans cette formulation, le nombre N dépend à la fois de ε et de x .

Pour cette convergence, on regarde donc point par point les suites numériques $(f_n(x))_{n \geq 0}$, et les théorèmes obtenus pour ces suites subsistent donc. (limite de sommes, produits, quotients etc. . .)

Le point de vue qui nous intéresse est celui de la conservation des propriétés par passage à la limite. La conservation des inégalités par passage à la limite nous permet d'obtenir facilement les deux résultats suivants :

Si les fonctions f_n sont positives, alors la limite est positive.

Si les fonctions f_n sont croissantes (resp. décroissantes), la limite est croissante (resp. décroissante).

En effet, si l'on a pour tout x dans A , et pour tout entier n , l'inégalité $f_n(x) \geq 0$, on en déduit que $f(x) \geq 0$, et si l'on a quels que soient x et y dans A tels que $x \leq y$, et pour tout entier n , l'inégalité $f_n(x) \leq f_n(y)$ (resp. $f_n(x) \geq f_n(y)$) on obtient $f(x) \leq f(y)$, (resp. $f(x) \geq f(y)$). □

Par contre nous allons voir sur un exemple, que la propriété ne se conserve pas, si cette propriété est le fait d'être bornée ou d'être continue.

Soit f_n définie sur $[0, 1]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } 0 \leq x \leq 1/n \\ 1/x & \text{si } 1/n < x \leq 1 \end{cases}$$

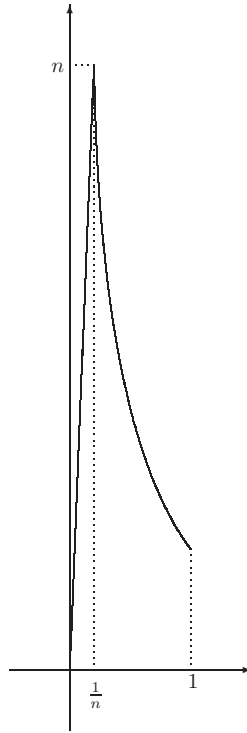
Si $x = 0$, on a pour tout n , $f_n(x) = 0$ et la suite converge vers 0.

Si $0 < x \leq 1$, soit $n_0 > 1/x$. Alors, si $n \geq n_0$, on a $x > 1/n$ et

$$f_n(x) = \frac{1}{x} .$$

La suite $f_n(x)$ est stationnaire et converge vers $1/x$. La suite (f_n) admet donc comme limite simple la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1/x & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$



Les fonctions f_n sont continues, donc bornées sur $[0, 1]$. Aucune de ces propriétés n'a lieu pour la fonction f .

3. Définition de la convergence uniforme

Nous allons donner pour commencer une définition quantifiée de la convergence uniforme, puis ensuite quelques définitions équivalentes.

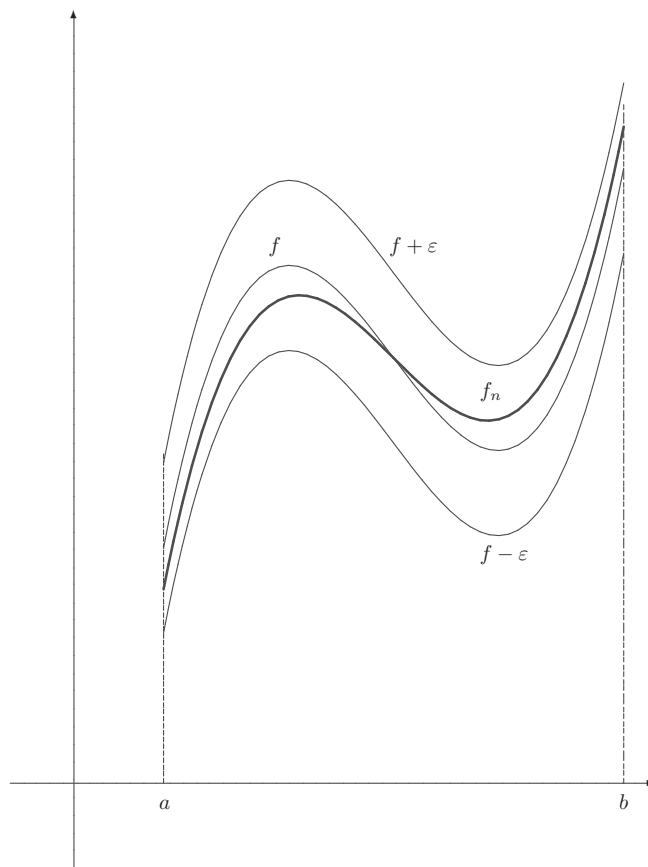
Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes, définies sur le même ensemble A , et soit f une fonction définie sur A . On dit que la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ **converge uniformément** vers f , ou que f est **limite uniforme** de la suite $(f_n)_{n \geq 0}$, si l'on a la propriété suivante :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in A)((n \geq N) \Rightarrow (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon))$$

La différence avec la définition de la convergence simple vient de la place du $(\forall x \in A)$ dans la formule quantifiée. Dans le cas de la convergence uniforme le nombre N ne dépend plus que de ε . Il doit être le même pour tout x de A . Cette définition est beaucoup plus forte que celle de la convergence simple. On retiendra que

Si $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers f alors $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement vers f .

Si A est un intervalle de \mathbb{R} et si l'on trace les courbes représentatives des fonctions $f + \varepsilon$ et $f - \varepsilon$, dire que la suite (f_n) converge uniformément vers f revient à dire qu'à partir d'un certain rang la courbe de f_n est comprise entre les deux autres.



On va reformuler la définition de la convergence uniforme d'une manière plus condensée, en utilisant la norme infinie :

La fonction f est limite uniforme de la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ si et seulement la suite numérique $(\|f_n - f\|_\infty)_{n \geq 0}$ converge vers 0.

Si la suite (f_n) converge uniformément vers f , quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe N , tel que $n \geq N$ et $x \in A$ impliquent

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors $f_n - f$ est bornée et

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Donc la suite $(\|f_n - f\|_\infty)$ converge vers 0.

Réciproquement, si la suite $(\|f_n - f\|_\infty)$ converge vers 0, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N , tel que $n \geq N$ implique

$$\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon.$$

On en déduit, pour tout x de A ,

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon ,$$

et donc (f_n) converge uniformément vers f . \square

Remarques : 1) Les premiers termes de la suite $(\|f_n - f\|_\infty)$ peuvent éventuellement être infinis.

2) Dire que (f_n) converge uniformément vers f équivaut à dire que $(f_n - f)$ converge uniformément vers la fonction constante nulle, on dit dans ce cas que $(f_n - f)$ converge uniformément vers 0.

En pratique, pour étudier si une suite (f_n) converge uniformément, on commencera par déterminer sa limite simple f , par un calcul de limite. Si l'on peut, par l'étude des variations de la fonction $f_n - f$ par exemple, déterminer la borne supérieure de $|f_n - f|$, il restera à voir si la suite $(\|f_n - f\|_\infty)$ de ces bornes supérieures converge vers 0.

Remarque : si $f_n - f$ est continue et si A est un intervalle fermé borné, il existe x_n dans A tel que

$$\|f_n - f\|_\infty = |f_n(x_n) - f(x_n)| .$$

Dans certains cas, le calcul de $\|f_n - f\|_\infty$ n'est pas faisable. Voici deux critères permettant de conclure soit à la convergence uniforme, soit à la non convergence uniforme.

La suite (f_n) converge uniformément vers f si et seulement si il existe une suite numérique (a_n) de limite nulle telle que l'on ait, pour tout x de A

$$|f_n(x) - f(x)| \leq a_n .$$

Remarquons que, comme pour les suites de nombres réels, on ne modifie pas la convergence ou la limite, si l'on modifie les premiers termes d'une suite. Il en résultera que dans ce théorème, comme dans d'autres qui suivront, il suffira que les conditions demandées soient vérifiées « à partir d'un certain rang ».

Si la suite converge uniformément, on peut prendre

$$a_n = \|f_n - f\|_\infty .$$

Inversement, si une telle suite (a_n) existe, alors on aura

$$\|f_n - f\|_\infty \leq a_n ,$$

et il résultera du théorème d'encadrement que la suite $(\|f_n - f\|_\infty)$ converge vers 0. \square

S'il existe une suite (x_n) de points de A telle que, la suite numérique $(f_n(x_n) - f(x_n))$ ne converge pas vers 0, alors la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers f .

On a en effet

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \|f_n - f\|_\infty ,$$

et donc si la suite numérique $(f_n(x_n) - f(x_n))$ ne converge pas vers 0, la suite $(\|f_n - f\|_\infty)$ ne converge pas non plus vers 0. \square

Remarque : on peut démontrer que ce critère donne une condition nécessaire et suffisante de non convergence uniforme.

4. Critère de Cauchy de convergence uniforme

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un ensemble A , à valeurs réelles ou complexes. La suite (f_n) converge uniformément si et seulement pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $m > n \geq N$, on ait,

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon .$$

On a toujours

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty .$$

Si le critère de Cauchy est vérifié, on en déduit qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $m > n \geq N$, on ait, pour tout x de A

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} ,$$

donc la suite $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy numérique. Elle possède une limite que l'on note $f(x)$, et f est limite simple de la suite (f_n) . Reste à voir que c'est une limite uniforme. Mais en faisant tendre m vers l'infini dans l'inégalité ci-dessus, on obtient si $n \geq N$ et si x est dans A ,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon ,$$

ce qui signifie que (f_n) converge uniformément vers f .

Réciproquement si f_n converge uniformément vers f , pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geq N$ on ait

$$\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Alors, si $m > n \geq N$,

$$\|f_n - f_m\|_\infty \leq \|f_n - f\|_\infty + \|f - f_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon ,$$

et le critère de Cauchy est bien vérifié. □

Comme dans le cas des suites numériques, cette propriété de Cauchy permet de montrer la convergence uniforme d'une suite sans en connaître la limite, ce qui sera utile dans le cas des séries de fonctions par exemple.

5. Convergence uniforme locale

La notion de convergence uniforme dépend de l'ensemble sur lequel les fonctions sont définies. On peut déjà faire les deux remarques suivantes :

1) Si (f_n) est une suite de fonctions définies sur A qui converge uniformément vers f , et si B est une partie non vide de A , alors la suite des restrictions des fonctions f_n à B converge uniformément vers la restriction de f à B . Cela vient du fait que

$$\sup_{x \in B} |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| .$$

Nous dirons dans ce cas que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur B .

2) Si (f_n) converge uniformément vers f sur A et sur B , elle converge uniformément vers f sur $A \cup B$, puisque

$$\sup_{x \in A \cup B} |f_n(x) - f(x)| = \max(\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|, \sup_{x \in B} |f_n(x) - f(x)|) .$$

3) Une suite de fonctions peut ne pas converger uniformément sur A mais converger uniformément sur une partie B de A . L'exemple du paragraphe 2 nous donne une suite de fonctions qui ne converge pas uniformément vers sa limite sur $]0, 1]$ mais qui converge uniformément sur tout intervalle $[c, 1]$ où $0 < c < 1$. (Car la suite est stationnaire).

Lorsque A est un intervalle nous dirons que la suite (f_n) converge **uniformément localement** sur A , si elle converge uniformément sur tout segment inclus dans A . Bien sûr la convergence uniforme sur A implique la convergence uniforme locale, mais l'exemple cité ci-dessus montre que si A n'est pas un segment la réciproque peut être fausse.

6. Convergence uniforme et linéarité

Soit (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions définies sur A de limite uniforme respectives f et g . Alors $(f_n + g_n)$ converge uniformément vers $f + g$ et si λ est un scalaire (λf_n) converge uniformément vers λf .

Cela résulte immédiatement de l'inégalité

$$\|(f_n + g_n) - (f + g)\|_\infty \leq \|f_n - f\|_\infty + \|g_n - g\|_\infty ,$$

pour la somme, et de l'égalité

$$\|\lambda f_n - \lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f_n - f\|_\infty ,$$

pour le produit par un scalaire. □

7. Propriétés de la convergence uniforme

Etudions maintenant la conservation de différentes propriétés par passage à la limite.

Convergence uniforme et fonctions bornées

Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} définies sur A de limite uniforme f . La fonction f est bornée, si et seulement si, à partir d'un certain rang les fonctions f_n sont bornées.

Si (f_n) converge uniformément vers f , il existe un entier N tel que, $n \geq N$ implique

$$\|f_n - f\|_\infty < 1 .$$

Alors, si l'on choisit un tel n tel que f_n soit bornée, on a

$$\|f\|_\infty \leq \|f - f_n\|_\infty + \|f_n\|_\infty \leq 1 + \|f_n\|_\infty ,$$

et f est bornée. Inversement, si f est bornée, on a à partir du rang N ,

$$\|f_n\|_\infty \leq \|f - f_n\|_\infty + \|f\|_\infty \leq 1 + \|f\|_\infty ,$$

et les fonctions f_n sont bornées à partir d'un certain rang. \square

Convergence uniforme et continuité

Donnons pour commencer un résultat général d'interversion de limites, qui s'appliquera ensuite à la continuité.

Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} définies sur un intervalle J , de limite uniforme f , et soit b un point de \bar{J} .

On suppose que $f_n(x)$ admet une limite finie α_n lorsque x tend vers b . Alors la suite (α_n) converge vers un nombre α et $f(x)$ admet comme limite α lorsque x tend vers b .

On a donc interversion des limites

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lim_{x \rightarrow b} f_n(x)) = \lim_{x \rightarrow b} (\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)) .$$

On démontre tout d'abord que la suite (α_n) converge en montrant que c'est une suite de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque (f_n) converge uniformément, elle vérifie le critère de Cauchy de convergence uniforme. Il existe N , tel que, si $m > n \geq N$, on ait, quel que soit x ,

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

En faisant tendre x vers b , on obtient

$$|\alpha_n - \alpha_m| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon .$$

Ceci démontre bien que la suite (α_n) est une suite de Cauchy. Notons α sa limite. Il reste à voir que $f(x)$ tend vers α en b .

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque (f_n) converge uniformément, il existe N , tel que, $n \geq N$, implique, quel que soit x dans J ,

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} .$$

il existe aussi N' tel que, $n \geq N'$ implique

$$|\alpha_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{3} .$$

Fixons $n \geq \max(N, N')$. Puisque $f_n(x)$ tend vers α_n en b , il existe une ensemble J_ε tel que, $x \in J_\varepsilon$ implique

$$|f_n(x) - \alpha_n| < \frac{\varepsilon}{3} .$$

(L'ensemble J_ε est de la forme $[b - \eta, b[$ si b est la borne supérieure finie de J , $[K, +\infty[$ si $b = +\infty$ etc...)

Alors, en utilisant l'inégalité triangulaire

$$|\alpha - f(x)| \leq |\alpha - \alpha_n| + |\alpha_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon .$$

Ce qui montre que $f(x)$ tend vers α en b . \square

On en déduit immédiatement les corollaires suivants :

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle J , de limite uniforme f .
On suppose que les fonctions f_n sont continues en un point x_0 de J , alors f est continue en x_0 .

On applique ce qui précède avec $b = x_0$. Alors $\alpha_n = f_n(x_0)$. Puisque la suite converge simplement vers f , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_0) = f(x_0) = \alpha .$$

Alors le théorème précédent affirme que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) ,$$

c'est-à-dire que f est continue en x_0 . □

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle J , qui converge uniformément localement vers f sur J .
On suppose que les fonctions f_n sont continues sur J , alors f est continue sur J .

La convergence uniforme locale suffit, car tout point x de J se trouve dans l'intérieur d'un segment J_x inclus dans J . En appliquant le résultat précédent dans J_x , on trouve que f est continue en x . Comme c'est vrai pour tout x de J , f est continue sur J . □

Remarque : ce théorème donne un critère de non convergence uniforme. Si les fonctions f_n sont continues sur J et si la limite simple f ne l'est pas, alors la suite (f_n) ne converge pas uniformément.

Convergence uniforme et intégration

Nous admettons dans ce paragraphe quelques résultats sur l'intégrale des fonctions continues qui seront revus plus en détail dans le chapitre 4.

1) Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs réelles, et si $f \leq g$, alors

$$\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt .$$

2) Si f est continue sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} ,

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt .$$

3) Si f est dérivable sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} ,

$$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a) .$$

On a alors le résultat suivant :

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $J = [a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} qui converge uniformément vers f .

Alors, la suite (I_n) définie par

$$I_n = \int_a^b f_n(x) dx ,$$

converge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_a^b f(x) dx .$$

On a donc interversion de l'intégrale et de la limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx .$$

On a pour tout x de J

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty ,$$

donc en intégrant

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \int_a^b \|f_n - f\|_\infty dx = (b - a) \|f_n - f\|_\infty ,$$

et alors

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq (b - a) \|f_n - f\|_\infty .$$

Et comme le membre de droite converge vers 0, il en est de même de celui de gauche. \square

Convergence uniforme et dérivation

Si les fonctions f_n sont dérivables, la limite uniforme f ne l'est pas nécessairement. Si $n \geq 1$, considérons par exemple la fonction f_n définie par

$$f_n(x) = x \arctan(nx) .$$

Cette fonction est de classe C^1 sur \mathbb{R} comme produit de fonctions de classe C^1 . La suite $(f_n(x))$ converge simplement vers $x\pi/2$ si $x \geq 0$ et $-x\pi/2$ si $x \leq 0$. Donc la suite (f_n) converge simplement vers la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = |x|\pi/2$. La fonction f n'est pas dérivable en 0.

Cependant la suite (f_n) converge uniformément vers f .

Pour le montrer, utilisons la relation $\arctan u + \arctan(1/u) = \text{sign}(u) \pi/2$, valable pour tout $u \in \mathbb{R}^*$. On a alors

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| x \arctan \frac{1}{nx} \right| ,$$

et en utilisant le fait que, pour tout u réel $|\arctan u| \leq |u|$, on en déduit

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} .$$

Ceci montre que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur \mathbb{R} .

Remarque : on peut même montrer que sur un segment, toute fonction continue est limite uniforme d'une suite de polynômes. (Théorème de Weierstrass).

Pour obtenir la dérivabilité de la limite, on va imposer la convergence uniforme de la suite des dérivées.

Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} définies sur un intervalle J ,

On suppose

(i) que les fonctions f_n sont de classe C^1 sur J ,

(ii) que la suite (f'_n) converge localement uniformément sur J vers une fonction g

(iii) qu'il existe un point a de J tel que la suite $(f_n(a))$ possède une limite finie α .

Alors la suite f_n converge localement uniformément sur J vers la fonction f de classe C^1 telle que

$$f' = g \quad \text{et} \quad f(a) = \alpha .$$

Soit $[u, v]$ un intervalle inclus dans J et contenant a , et soit x dans $[u, v]$.

Considérons la fonction f définie par

$$f(x) = \alpha + \int_a^x g(t) dt .$$

C'est l'unique fonction dérivable dont la dérivée est g et qui vaut α en a .

Puisque f_n est de classe C^1 , on a aussi

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t) dt .$$

Alors

$$f_n(x) - f(x) = (f_n(a) - \alpha) + \int_a^x (f'_n(t) - g(t)) dt .$$

et donc

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(a) - \alpha| + (x - a) \sup_{x \in [u, v]} |f'_n(x) - g(x)| \leq |f_n(a) - \alpha| + (u - v) \sup_{x \in [u, v]} |f'_n(x) - g(x)| .$$

On en déduit

$$\sup_{x \in [u, v]} |f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(a) - \alpha| + (u - v) \sup_{x \in [u, v]} |f'_n(x) - g(x)| .$$

Comme $(f'_n - g)$ converge uniformément vers 0 sur $[u, v]$ (convergence uniforme locale), on en déduit que la suite $(\sup_{x \in [u, v]} |f'_n(x) - g(x)|)$ converge vers 0. Par ailleurs la suite $(|f_n(a) - \alpha|)$ converge vers 0. Alors il résulte du théorème d'encadrement que la suite $(\sup_{x \in [u, v]} |f_n(x) - f(x)|)$ converge vers 0, donc que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[u, v]$. Cela montre que (f_n) converge uniformément localement sur J . \square

On a un corollaire immédiat de ce théorème :

Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} définies sur un intervalle J ,

On suppose

- (i) que les fonctions f_n sont de classe C^1 sur J ,
- (ii) que la suite (f'_n) converge uniformément localement vers une fonction g
- (iii) que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f

Alors la suite f_n converge uniformément localement sur J vers la fonction f , cette fonction est de classe C^1 et $f' = g$.

On déduit alors facilement par récurrence le résultat suivant :

Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} définies sur un intervalle J ,

On suppose

- que les fonctions f_n sont de classe C^k sur J ,
- que la suite $(f_n^{(k)})$ converge uniformément localement vers une fonction g
- que, si $0 \leq p \leq k-1$, la suite $(f_n^{(p)}(a))$ possède une limite α_p pour un point a de J .

Alors la suite f_n converge uniformément localement sur J vers la fonction f de classe C^k telle que

$$f^{(k)} = g \quad \text{et} \quad \text{si } 0 \leq p \leq k-1, \quad f^{(p)}(a) = \alpha_p .$$

Chapitre 2

SERIES

Lorsque l'on regarde une suite de nombres $(u_n)_{n \geq 0}$, il est naturel de sommer les n premiers termes de cette suite et d'étudier si la suite de ces sommes a elle-même une limite. C'est la notion de série, dont un exemple classique est la série géométrique. Nous détaillons dans ce chapitre l'étude des séries numériques, puis nous appliquons les théorèmes de convergence uniforme pour étudier ensuite les séries de fonctions.

PRELIMINAIRES : L'utilisation du symbole \sum

Le symbole de sommation va être utilisé de manière systématique dans le cadre des séries. Nous rappelons rapidement ses principes d'utilisation dans le cas des sommes finies.

Si (u_1, \dots, u_n) désigne une famille de nombres (ou plus généralement d'éléments d'un espace vectoriel), on note

$$u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=1}^n u_k .$$

L'indice k est l'indice de sommation. C'est un indice muet qui peut être remplacé par d'autres lettres (autres que n et u dans l'exemple ci-dessus). Par exemple

$$u_1 + \dots + u_n = \sum_{p=1}^n u_p .$$

Cette somme a des propriétés de linéarités évidentes :

$$\sum_{p=1}^n (\lambda u_p + \mu v_p) = \lambda \sum_{p=1}^n u_p + \mu \sum_{p=1}^n v_p .$$

On a également la relation de Chasles :

$$\sum_{p=1}^r u_p + \sum_{p=r+1}^n u_p = \sum_{p=1}^n u_p .$$

Il est possible de faire des changements de variable sur l'indice de sommation. Par exemple, si a est un entier, les sommes suivantes sont les mêmes :

$$\sum_{p=1}^n u_p = \sum_{q=3}^{n+2} u_{q-2} = \sum_{r=a+1}^{a+n} u_{r-a} .$$

Remarque : on ne peut effectuer que des changements de variable du type

$$q = p + a ,$$

où a est un nombre entier fixé. Bien sûr on peut ensuite reprendre la même lettre comme indice de sommation :

$$\sum_{p=1}^n u_p = \sum_{p=3}^{n+2} u_{p-2} .$$

Il ne faut pas oublier de changer les bornes dans la sommation.

Si $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite de nombres (ou d'éléments d'un espace vectoriel), et si A est une partie finie non vide de \mathbb{N} ,

$$A = \{n_1, \dots, n_p\} ,$$

on posera

$$\sum_{k \in A} u_k = \sum_{r=1}^p u_{n_r} .$$

En raison de l'associativité et de la commutativité de l'addition, cette somme ne dépend pas de l'ordre des termes. Lorsque $A = \emptyset$, on pose par convention

$$\sum_{k \in A} u_k = 0 .$$

On dira que A est un **ensemble d'indices**.

En plus des propriétés de linéarités

$$\sum_{k \in A} (\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k \in A} u_k + \mu \sum_{k \in A} v_k ,$$

on a d'autres propriétés que l'on obtient en changeant les ensembles d'indices :

1) Si A_1, \dots, A_p sont des ensembles d'indices finis deux à deux disjoints , on a

$$\sum_{k \in A_1 \cup \dots \cup A_p} u_k = \sum_{r=1}^p \sum_{k \in A_r} u_k .$$

2) Soit A et B deux ensembles d'indices tels que $A \subset B \subset \mathbb{N}$. Si la suite (u_n) est une suite de nombres réels positifs, on a

$$\sum_{k \in A} u_k \leq \sum_{k \in B} u_k .$$

3) Si A_1, \dots, A_p sont des ensembles finis d'indices, et si la suite (u_n) est une suite de nombres réels positifs, on a

$$\sum_{k \in A_1 \cup \dots \cup A_p} u_k \leq \sum_{r=1}^p \sum_{k \in A_r} u_k .$$

La propriété 1 est évidente. Pour la 2, il suffit écrire $B = A \cup (B \setminus A)$. On a alors une réunion d'ensembles disjoints, donc d'après 1,

$$\sum_{k \in B} u_k = \sum_{k \in A} u_k + \sum_{k \in B \setminus A} u_k ,$$

et comme les nombres sont positifs,

$$\sum_{k \in B \setminus A} u_k \geq 0 ,$$

ce qui donne l'inégalité voulue.

La propriété 3 se démontre par récurrence. On a pour deux ensembles

$$A_1 \cup A_2 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_1 \cap A_2) ,$$

ainsi que

$$A_1 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_1 \cap A_2) \quad \text{et} \quad A_2 = (A_2 \setminus A_1) \cup (A_1 \cap A_2) ,$$

et les ensembles écrits dans ces trois réunions sont deux à deux disjoints. Alors, on a les trois sommes suivantes

$$\begin{aligned} \sum_{k \in A_1 \cup A_2} u_k &= \sum_{k \in A_1 \setminus A_2} u_k + \sum_{k \in A_2 \setminus A_1} u_k + \sum_{k \in A_1 \cap A_2} u_k , \\ \sum_{k \in A_1} u_k &= \sum_{k \in A_1 \setminus A_2} u_k + \sum_{k \in A_1 \cap A_2} u_k , \end{aligned}$$

et

$$\sum_{k \in A_2} u_k = \sum_{k \in A_2 \setminus A_1} u_k + \sum_{k \in A_1 \cap A_2} u_k .$$

On en déduit

$$\sum_{k \in A_1 \cup A_2} u_k = \sum_{k \in A_1} u_k + \sum_{k \in A_2} u_k - \sum_{k \in A_1 \cap A_2} u_k ,$$

et comme la suite est positive

$$\sum_{k \in A_1 \cap A_2} u_k \geq 0 ,$$

ce qui donne l'inégalité voulue.

La propriété est donc vraie pour une réunion de deux ensembles. Supposons qu'elle soit vraie pour une réunion de p ensembles. Alors, en écrivant

$$A_1 \cup \dots \cup A_p \cup A_{p+1} = (A_1 \cup \dots \cup A_p) \cup A_{p+1} ,$$

on a

$$\sum_{k \in A_1 \cup \dots \cup A_p \cup A_{p+1}} u_k \leq \sum_{k \in A_1 \cup \dots \cup A_p} u_k + \sum_{k \in A_{p+1}} u_k ,$$

puis en appliquant l'hypothèse de récurrence

$$\sum_{k \in A_1 \cup \dots \cup A_p} u_k \leq \sum_{r=1}^p \sum_{k \in A_r} u_k ,$$

d'où l'on déduit

$$\sum_{k \in A_1 \cup \dots \cup A_p \cup A_{p+1}} u_k \leq \sum_{r=1}^{p+1} \sum_{k \in A_r} u_k .$$

La propriété est donc vraie à l'ordre $p+1$. Comme elle est vraie pour $p = 2$ et $p = 1$, elle est vraie pour tout $p \geq 1$. \square

Il n'y a pas de difficulté notable pour généraliser ce qui précède lorsque les ensembles A sont des ensembles finis de couples (ou de n -uplets) de nombres entiers. Nous verrons dans le paragraphe I-10, un exemple de sommation à deux indices.

Dans ce qui suit nous allons généraliser les sommations dans le cas d'ensembles d'indices dénombrables.

I. Les séries numériques

1. Définition des séries numériques

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes. A partir de cette suite on définit une nouvelle suite $(S_n)_{n \geq n_0}$ en posant

$$S_n = \sum_{p=n_0}^n u_p .$$

On appelle **série numérique** le couple $((u_n)_{n \geq n_0}, (S_n)_{n \geq n_0})$. Le nombre u_n est appelé **terme général** de la série. Le nombre S_n est la **somme partielle de rang (ou d'ordre) n** de la série, et $(S_n)_{n \geq n_0}$ est la **suite des sommes partielles**.

En pratique pour désigner une telle série, on dira « la série de terme général u_n ». (Par abus de langage on dit parfois « la série $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$ », mais cette dénomination est à éviter).

On dira que la série de terme général u_n **converge** si la suite des sommes partielles converge, et qu'elle **diverge** dans le cas contraire.

Lorsque la série converge, on appellera **somme** de la série la limite de la suite des sommes partielles et l'on notera

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=n_0}^n u_p = \sum_{n=n_0}^{\infty} u_n .$$

On appellera **reste de rang (ou d'ordre) n** de la série, le nombre

$$R_n = \sum_{p=n_0}^{\infty} u_p - \sum_{p=n_0}^n u_p = \sum_{p=n+1}^{\infty} u_p .$$

La suite $(R_n)_{n \geq n_0}$ converge donc vers 0.

On adoptera aussi la notation

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n = \infty .$$

lorsque la limite de la suite des sommes partielles est infinie. (La série diverge dans ce cas).

La notation $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$ n'a *a priori* de sens que si la suite (S_n) a une limite et ne doit être employée dans un calcul que dans ce cas.

Il est important de remarquer que, si la nature d'une série (convergence ou divergence) ne dépend pas des premiers termes, que l'on peut donc supprimer, ou modifier, par contre la valeur de la somme change dans ce cas.

Etudier si une série converge revient à étudier si une suite converge et les théorèmes sur les suites vont donc s'appliquer.

2. Quelques exemples de séries numériques

Nous allons donner dans ce paragraphe quelques exemples de méthodes servant à étudier la convergence ou à calculer la somme d'une série.

La série géométrique

Soit $a \in \mathbb{C}$. La série de terme général a^n converge si et seulement si $|a| < 1$, et dans ce cas

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} .$$

On sait calculer les sommes partielles de la série.

$$S_n = \begin{cases} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} & \text{si } a \neq 1 \\ n+1 & \text{si } a = 1 \end{cases}$$

La suite (a^n) a une limite finie si et seulement si $|a| < 1$ et cette limite est nulle.
 On en déduit que la série de terme général a^n converge si et seulement si $|a| < 1$, et dans ce cas

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} .$$

Si a est un nombre réel plus grand que 1, la série diverge et la somme est infinie. Dans les autres cas la suite des sommes partielles n'a pas de limite. \square

La série harmonique

La série de terme général $1/n$ diverge.

En effet, en remarquant que, si $k \geq 1$, on a, puisque sur l'intervalle $[k, k+1]$, $1/x$ est majoré par $1/k$,

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k} ,$$

on en déduit en sommant ces inégalités terme à terme,

$$\sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} .$$

Mais le membre de gauche vaut

$$\int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1) ,$$

d'où

$$\ln(n+1) \leq S_n .$$

Il en résulte que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ admet $+\infty$ pour limite, et donc que la série de terme général $1/n$ diverge. \square

Cet exemple montre comment l'on peut comparer une série à une intégrale. On verra un peu plus loin un résultat général permettant une telle comparaison.

La série harmonique alternée

On étudie la série de terme général $(-1)^{n-1}/n$. On utilise pour cela la formule de Taylor-Lagrange, appliquée à la fonction f qui à $x > 0$ associe $\ln(1+x)$. On voit facilement par récurrence que, si $n \geq 1$,

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{(n-1)}(n-1)!(1+x)^{-n} ,$$

et donc, il existe c_n dans $]0, 1[$ tel que

$$f(1) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!} ,$$

soit

$$f(1) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{1}{(1+c_n)^{n+1}} .$$

On en déduit alors

$$\left| f(1) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| \leq \frac{1}{n+1} \frac{1}{(1+c_n)^{n+1}} \leq \frac{1}{n+1} ,$$

et il résulte du théorème d'encadrement que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ des sommes partielles admet $f(1) = \ln 2$ pour limite. La formule de Taylor est l'un des moyens qui permet de calculer la somme de certaines séries. Elle servira pour calculer la somme de séries de terme général $a_n z^n$ (séries entières).

Un autre exemple de série dont le terme général n'est pas de signe constant

On montre que la série de terme général $(-1)^{n+1}/\sqrt{n}$ converge. On a

$$S_{2n+2} - S_{2n} = -\frac{1}{\sqrt{2n+2}} + \frac{1}{\sqrt{2n+1}} > 0 \quad \text{et} \quad S_{2n+3} - S_{2n+1} = -\frac{1}{\sqrt{2n+2}} + \frac{1}{\sqrt{2n+3}} < 0 .$$

De plus

$$S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} .$$

On constate donc que la suite $(S_{2n})_{n \geq 1}$ est croissante, que la suite $(S_{2n+1})_{n \geq 0}$ est décroissante, et que la différence $(S_{2n+1} - S_{2n})$ converge vers 0. Les suites sont donc adjacentes et on la même limite finie ℓ . Alors la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ converge aussi vers ℓ . Donc la série de terme général $(-1)^n/\sqrt{n}$ converge. On remarquera que cette méthode, qui elle aussi sera généralisée plus loin, ne donne pas la somme de la série.

Le procédé télescopique

Soit $(v_n)_{n \geq n_0}$ une suite numérique. On pose $u_n = v_n - v_{n+1}$. Alors la série de terme général u_n converge si et seulement si la suite (v_n) converge. De plus

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n = v_{n_0} - \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n .$$

On a en effet, (c'est ce que l'on appelle le procédé télescopique),

$$\sum_{k=n_0}^n u_k = \sum_{k=n_0}^n (v_k - v_{k+1}) = v_{n_0} - v_{n+1} .$$

Donc la limite du membre de droite existe si et seulement si celle du membre de gauche existe, et on a égalité des limites. \square

Si l'on sait écrire le terme général d'une série comme différence de deux termes successifs d'une même suite, on arrivera donc à calculer la somme de la série. Par exemple, si $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$, la décomposition en éléments simples donne

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} ,$$

et donc la série de terme général u_n converge et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 .$$

3. Propriétés des séries numériques

Une condition nécessaire de convergence d'une série

Pour simplifier, nous donnerons les résultats de ce chapitre pour des séries dont de terme général u_n est défini pour $n \geq 0$.

Si la série de terme général u_n converge, alors la suite (u_n) converge vers 0.

En effet, on a

$$u_n = \sum_{k=0}^n u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k = S_n - S_{n-1} .$$

Donc, si la suite (S_n) a une limite finie S , on en déduit que (u_n) converge et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = S - S = 0 .$$

□

Remarque : l'exemple de la série harmonique montre qu'une suite (u_n) peut converger vers 0, sans que la série de terme général u_n ne converge.

Les trois résultats suivants proviennent immédiatement des résultats correspondants sur les suites, appliqués aux suites des sommes partielles :

Somme de séries

Soit (u_n) et (v_n) deux suites numériques. Si la série de terme général u_n et la série de terme général v_n convergent, la série de terme général $u_n + v_n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n .$$

Si l'une des deux séries diverge et si l'autre converge, la série de terme général $u_n + v_n$ diverge.

Remarque : lorsque les deux séries divergent, on ne peut rien dire *a priori* de la somme.

On a

$$\sum_{k=0}^n (u_k + v_k) = \sum_{k=0}^n u_k + \sum_{k=0}^n v_k .$$

Donc si les suites $(\sum_{k=0}^n u_k)$ et $(\sum_{k=0}^n v_k)$ convergent la suite $(\sum_{k=0}^n (u_k + v_k))$ converge, et la limite de la somme est égale à la somme des limites.

Si la série de terme général u_n converge et si la série de terme général $u_n + v_n$ converge, alors

$$\sum_{k=0}^n v_k = \sum_{k=0}^n (u_k + v_k) - \sum_{k=0}^n u_k ,$$

et la série de terme général v_n converge. Donc si la série de terme général v_n diverge, alors la série de terme général $u_n + v_n$ diverge aussi. \square

Produit d'une série par un scalaire

Soit (u_n) une suite numérique et λ un nombre réel ou complexe non nul. Alors la série de terme général λu_n est de même nature que la série de terme général u_n et, si elles convergent,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda u_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n .$$

C'est évident à partir de la relation

$$\sum_{k=0}^n (\lambda u_k) = \lambda \sum_{k=0}^n u_k .$$

\square

Critère de Cauchy

Soit (u_n) une suite numérique. La série de terme général u_n converge si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N , tel que $m > n > N$ implique

$$\left| \sum_{k=n}^m u_k \right| < \varepsilon .$$

Ce critère est exactement le critère de Cauchy appliqué à la suite (S_n) des sommes partielles puisque

$$|S_m - S_{n-1}| = \left| \sum_{k=n}^m u_k \right| .$$

\square

4. Séries à termes positifs

On dira également « série positive » si tous les termes de la série sont positifs.

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite positive. Posons $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

La suite $(S_n)_{n \geq 0}$ est croissante, et la série de terme général u_n converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ est majorée. De plus, pour tout entier n

$$S_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} u_n .$$

On a

$$S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0 ,$$

et la suite (S_n) est croissante. Une telle suite converge si et seulement si elle est majorée. Si elle converge, sa limite majore les termes de la suite. Sinon la limite est infinie. \square

Critères de comparaison

Soit (u_n) et (v_n) deux suites positives à partir d'un certain rang telles que, à partir d'un certain rang

$$u_n \leq v_n .$$

Alors

- si la série de terme général v_n converge, la série de terme général u_n converge,
- si la série de terme général u_n diverge, la série de terme général v_n diverge.

Si l'on a $0 \leq u_n \leq v_n$ pour $n \geq N$, posons

$$S_n = \sum_{k=N}^n u_k \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=N}^n v_k .$$

On a alors, si $n \geq N$, l'inégalité $S_n \leq T_n$.

Si la série de terme général v_n converge, on a, si $n \geq N$,

$$S_n \leq T_n \leq \sum_{n=N}^{\infty} v_n .$$

La suite (S_n) est croissante majorée. Alors la série de terme général u_n converge.

Si la série de terme général u_n diverge, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = +\infty$. Cela signifie que la série de terme général v_n diverge. \square

Soit (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels, telles que, à partir d'un certain rang v_n soit de signe constant. On suppose que

$$u_n \sim v_n .$$

Alors la série de terme général u_n et la série de terme général v_n sont de même nature.

On sait que si les suites sont équivalentes, alors u_n et v_n ont le même signe à partir d'un certain rang.

Il suffit d'étudier le cas où les suites sont positives. (Sinon on applique le résultat à $-u_n$ et $-v_n$). On a, à partir d'un certain rang

$$u_n = \varepsilon_n v_n ,$$

où (ε_n) est une suite qui converge vers 1. A partir d'un certain rang, on a alors

$$\frac{1}{2} \leq \varepsilon_n \leq 2 ,$$

d'où

$$\frac{v_n}{2} \leq u_n \leq 2v_n .$$

Si la série de terme général v_n converge, alors la série de terme général $2v_n$ converge, et d'après le critère précédent la série de terme général u_n converge.

Si la série de terme général u_n converge, alors d'après le critère précédent la série de terme général $v_n/2$ converge, et la série de terme général v_n converge. Les deux séries sont bien de même nature. \square

Il est important que les suites aient un signe constant comme le montre l'exemple suivant :

on pose

$$v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} .$$

La série de terme général v_n converge. Par contre la série de terme général u_n diverge comme somme d'une série convergente de terme général $(-1)^n/\sqrt{n}$ et d'une série divergente de terme général $1/n$. Mais

$$u_n = v_n(1 + v_n) \sim v_n .$$

Donnons maintenant un résultat qui permet de comparer une série à une intégrale.

Critère de comparaison série-intégrale

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[N, +\infty[$, décroissante et positive. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) la série de terme général $f(n)$ converge
- ii) la série de terme général $\int_n^{n+1} f(t) dt$ converge
- iii) une primitive F de f sur $[N, +\infty[$ admet une limite finie en $+\infty$.

Comme f est décroissante sur $[N, +\infty[$, on a, si $n \leq t \leq n+1$, et si $n \geq N$,

$$f(n+1) \leq f(t) \leq f(n) .$$

et en intégrant

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t) dt \leq f(n) .$$

Comme la série de terme général $f(n)$ et la série de terme général $f(n+1)$ sont de même nature. Il résulte du critère de comparaison que la série de terme général $f(n)$ et la série de terme général $\int_n^{n+1} f(t) dt$ sont de même nature.

Prenons comme primitive de f la fonction F définie par

$$F(x) = \int_N^x f(t) dt ,$$

(les autres sont de la forme $F + K$ où K est une constante, et l'existence de la limite ne dépend pas du choix de K). Alors

$$\sum_{k=N}^n \int_k^{k+1} f(t) dt = F(n+1) .$$

La fonction F est croissante. Il en résulte qu'elle possède une limite (finie ou non) à l'infini, et que cette limite est aussi celle de la suite $(F(n+1))$. Donc, dans tous les cas

$$\sum_{n=N}^{\infty} \int_n^{n+1} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_N^x f(t) dt ,$$

et la série de terme général $\int_n^{n+1} f(t) dt$ converge si et seulement si F a une limite finie en $+\infty$. \square

5. Séries de comparaison

Nous avons déjà rencontré quelques séries positives : série géométrique (si la raison est positive), série harmonique. En voici deux autres familles.

Séries de Riemann

La série de terme général $1/n^\alpha$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Si $\alpha \leq 0$, la suite $(1/n^\alpha)$ ne converge pas vers 0 et la série de terme général $1/n^\alpha$ diverge.

Si $\alpha > 0$, posons

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha} .$$

C'est une fonction décroissante positive. On obtient facilement une primitive de f :

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln x & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Donc l'on constate que F possède une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$, et le critère de comparaison série-intégrale montre que la série de terme général $1/(n^\alpha)$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. \square

Remarque : la série harmonique et la série de Riemann obtenue si $\alpha = 1$.

Séries de Bertrand

La série de terme général $1/(n^\alpha(\ln n)^\beta)$ converge si et seulement si l'on a un des deux cas suivants :

- i) $\alpha > 1$
- ii) $\alpha = 1$ et $\beta > 1$

Si $\alpha \leq 0$, la suite $(1/(n^\alpha(\ln n)^\beta))$ ne converge pas vers 0 et la série de terme général $1/(n^\alpha(\ln n)^\beta)$ diverge.

Si $\alpha = 1$, on pose, pour $x \geq 2$,

$$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^\beta}.$$

En calculant la dérivée de f , on constate qu'elle est négative sur un intervalle de la forme $[N, +\infty[$. Donc f est une fonction décroissante positive sur cet intervalle. On obtient facilement une primitive de f :

$$F(x) = \begin{cases} \frac{(\ln x)^{1-\beta}}{1-\beta} & \text{si } \beta \neq 1 \\ \ln \ln x & \text{si } \beta = 1 \end{cases}$$

Donc l'on constate que F possède une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $\beta > 1$, et le critère de comparaison série-intégrale montre que la série de terme général $1/(n(\ln n)^\beta)$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

Si $\alpha < 1$, on écrit

$$\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta} = \frac{1}{n} \frac{n^{1-\alpha}}{(\ln n)^\beta}.$$

Mais la suite $(n^{1-\alpha}/(\ln n)^\beta)$ admet $+\infty$ comme limite. Donc, pour n assez grand

$$\frac{n^{1-\alpha}}{(\ln n)^\beta} \geq 1,$$

et

$$\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta} \geq \frac{1}{n}.$$

Il résulte alors du critère de comparaison que la série diverge.

Si $\alpha > 1$, soit α' tel que $\alpha > \alpha' > 1$. On écrit

$$\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta} = \frac{1}{n^{\alpha'}} \frac{1}{n^{\alpha-\alpha'}(\ln n)^\beta}.$$

Mais la suite $(n^{\alpha-\alpha'}(\ln n)^\beta)$ admet $+\infty$ comme limite. Donc, pour n assez grand

$$\frac{1}{n^{\alpha-\alpha'}(\ln n)^\beta} \leq 1,$$

et

$$\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta} \leq \frac{1}{n^{\alpha'}}.$$

Il résulte alors du critère de comparaison que la série converge.

□

6. Règles de convergence

En plus des critères de comparaison, on a dans le cas des séries des règles qui permettent de savoir si une série à termes positifs converge ou non. Ces règles sont obtenues par comparaison aux séries géométriques ou aux séries de Riemann. En voici quelques unes parmi les plus utilisées, que nous formulerons en termes de limite. (Il existe d'autres formulations plus générales).

Règle de Cauchy

Soit (u_n) une suite de nombres positifs. On suppose que la suite $(\sqrt[n]{u_n})$ possède une limite ℓ . Alors
si $0 \leq \ell < 1$ la série de terme général u_n converge,
si $\ell > 1$ ou si $\ell = 1^+$ la série de terme général u_n diverge.

Si la suite $(\sqrt[n]{u_n})$ converge vers $\ell < 1$, soit a tel que

$$\ell < a < 1 .$$

Alors, il existe N tel que $n \geq N$ implique

$$\sqrt[n]{u_n} \leq a ,$$

soit

$$u_n \leq a^n .$$

On compare la série à une série géométrique de raison $a < 1$. La série de terme général u_n converge donc.

Si la suite $(\sqrt[n]{u_n})$ converge vers $\ell > 1$ ou converge vers 1 par valeurs supérieures, alors, à partir d'un certain rang

$$\sqrt[n]{u_n} \geq 1 ,$$

et donc

$$u_n \geq 1 .$$

La suite (u_n) ne peut avoir une limite nulle, et la série de terme général u_n diverge. \square

Remarques : 1) Ne pas confondre le critère de Cauchy et la règle de Cauchy

2) La règle de Cauchy ne permet pas de conclure si $\ell = 1$. Par exemple si $u_n = n^{-\alpha}$ on a

$$\sqrt[n]{u_n} = e^{-\alpha \ln n / n} ,$$

et cette suite a pour limite 1, alors que la convergence de la série de Riemann dépend de α .

3) Une série de terme général u_n peut converger sans que la suite $(\sqrt[n]{u_n})$ n'ait de limite. Si elle en a une alors nécessairement $\ell \leq 1$.

4) La règle de Cauchy s'applique en général pour des séries dont le terme général est une puissance de la forme $a_n^{b_n}$.

Règle de d'Alembert

Soit (u_n) une suite de nombres strictement positifs. On suppose que la suite (u_{n+1}/u_n) possède une limite ℓ . Alors

si $0 \leq \ell < 1$ la série de terme général u_n converge,
si $\ell > 1$ ou si $\ell = 1^+$ la série de terme général u_n diverge.

Si la suite (u_{n+1}/u_n) converge vers $\ell < 1$, soit a tel que

$$\ell < a < 1 .$$

Alors, il existe N tel que $n \geq N$ implique

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < a .$$

Donc, si $n \geq N + 1$, on a

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} < a \quad , \dots , \quad \frac{u_{N+1}}{u_N} < a ,$$

et en multipliant terme à terme ces $n - N$ inégalités

$$\frac{u_n}{u_N} < a^{n-N} .$$

Comme u_N est une constante, on compare la série à une série géométrique de raison $a < 1$. La série de terme général u_n converge donc.

Si la suite (u_{n+1}/u_n) converge vers $\ell > 1$, ou converge vers 1 par valeurs supérieures, alors, à partir d'un certain rang

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 ,$$

et la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang. Comme elle est strictement positive, elle ne peut avoir une limite nulle, et la série de terme général u_n diverge. \square

Remarques : 1) La règle de d'Alembert ne permet pas de conclure si $\ell = 1$, comme le montre de nouveau l'exemple des séries de Riemann.

2) Une série de terme général u_n peut converger sans que la suite (u_{n+1}/u_n) n'ait de limite. Si elle en a une alors nécessairement $\ell \leq 1$.

3) La règle de d'Alembert s'applique en général pour des séries dont le terme général contient des produits dont le nombre de facteurs dépend de n , des factorielles par exemple.

Remarques sur les règles de Cauchy et de d'Alembert.

1) Les règles de Cauchy et de d'Alembert ont été obtenues par comparaison aux séries harmoniques. Il est donc inutile de démontrer qu'une série harmonique converge en utilisant les règles de Cauchy ou de d'Alembert.

2) On peut démontrer que si (u_n) est une suite de nombres strictement positifs, et si la suite (u_{n+1}/u_n) possède une limite, alors la suite $(\sqrt[n]{u_n})$ possède la même limite. Donc, si l'on a obtenu $\ell = 1$ par l'une des deux règles, il est inutile d'essayer l'autre.

Règle de Riemann

Plutôt que de retenir le résultat donné dans la règle de Riemann, il est préférable de savoir retrouver la démonstration lorsque l'on a besoin de comparer une série positive à une série de Riemann.

Soit (u_n) une suite de nombres strictement positifs. On suppose que la suite $(n^\alpha u_n)$ possède une limite ℓ . Alors

(i) si ℓ est finie et $\alpha > 1$ la série de terme général u_n converge.

(ii) si $\ell > 0$ et si $\alpha \leq 1$ la série de terme général u_n diverge.

Si la limite ℓ est finie, à partir d'un certain rang, on a

$$n^\alpha u_n < \ell + 1 ,$$

et donc

$$u_n < \frac{\ell + 1}{n^\alpha} .$$

La série dont le terme général est le membre de droite converge. Donc la série de terme général u_n converge.

Si la limite ℓ n'est pas nulle, à partir d'un certain rang, on a

$$n^\alpha u_n > K ,$$

où

$$K = \begin{cases} \ell/2 & \text{si } \ell \text{ est finie} \\ 1 & \text{si } \ell \text{ est infinie} \end{cases}$$

Donc, si $\alpha \leq 1$,

$$u_n > \frac{K}{n^\alpha} .$$

La série dont le terme général est le membre de droite diverge. Donc la série de terme général u_n diverge. \square

Remarque : la règle de Riemann s'applique en général pour des séries dont le terme général croît « beaucoup plus vite » ou « beaucoup moins vite » que des puissances.

7. Série absolument convergente

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite numérique. On dira que la série de terme général u_n **converge absolument** si la série de terme général $|u_n|$ est convergente.

Les critères de comparaison s'appliquent aux suites $|u_n|$ et donnent des critères de convergence absolue. De plus, on pourra appliquer les règles de Cauchy, d'Alembert et Riemann. On a également :

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite numérique. Si la série de terme général u_n converge absolument, alors elle converge. De plus

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| .$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N , tel que $m > n > N$ implique

$$\sum_{k=n}^m |u_k| < \varepsilon .$$

Mais

$$\left| \sum_{k=n}^m u_k \right| \leq \sum_{k=n}^m |u_k| .$$

Donc

$$\left| \sum_{k=n}^m u_k \right| \leq \varepsilon ,$$

et le critère de Cauchy montre que la série de terme général u_n converge. On a également, pour tout entier m ,

$$\left| \sum_{k=0}^m u_k \right| \leq \sum_{k=0}^m |u_k| ,$$

et en faisant tendre m vers l'infini

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| .$$

□

8. Séries semi-convergentes

Lorsque une série converge sans converger absolument, on dit qu'elle est **semi-convergente**. Donnons tout d'abord un résultat bien utile :

Si la série de terme général u_n est semi-convergente, et la série le terme général v_n est absolument convergente, alors la série de terme général $u_n + v_n$ est semi-convergente.

Si la série de terme général $u_n + v_n$ était absolument convergente, alors

$$|u_n| \leq |u_n + v_n| + |v_n| ,$$

et la série de terme général u_n serait absolument convergente.

□

Par contre la somme de deux séries semi-convergentes peut être absolument convergente.

Pour montrer qu'une série converge, sans être absolument convergente, on utilise fréquemment un critère spécial appelé, critère d'Abel. Nous allons commencer par donner un cas particulier, le critère de Leibniz.

Soit $(v_n)_{n \geq 0}$ une suite monotone tendant vers 0. Alors la série alternée de terme général $(-1)^n v_n$ converge. De plus

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k v_k \right| \leq |v_{n+1}| .$$

On peut supposer la suite (v_n) décroissante positive (sinon on considère $-v_n$). La démonstration est la même que celle effectuée dans un des exemples du paragraphe I-2. On considère la suite (S_n) des sommes partielles. Alors

$$S_{2n+2} - S_{2n} = v_{2n+2} - v_{2n+1} \leq 0 \quad \text{et} \quad S_{2n+1} - S_{2n-1} = -v_{2n+1} + v_{2n} \geq 0 .$$

La suite (S_{2n}) est décroissante, et la suite (S_{2n+1}) est croissante. Comme

$$S_{2n+1} - S_{2n} = -v_{2n+1} ,$$

la suite $(S_{2n+1} - S_{2n})$ converge vers 0. Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont donc adjacentes et ont la même limite finie S . Alors c'est la limite de la suite (S_n) , ce qui montre que la série de terme général $(-1)^n v_n$ converge. De plus, pour tout entier n ,

$$S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n+2} = S_{2n+1} + v_{2n+2} ,$$

donc

$$0 \leq S - S_{2n+1} \leq v_{2n+2} .$$

De même

$$S_{2n} - v_{2n+1} = S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n} ,$$

donc

$$-v_{2n+1} \leq S - S_{2n} \leq 0 .$$

On en déduit que, pour tout entier n ,

$$|S_n - S| \leq v_{n+1} .$$

□

Le reste d'une série alternée est donc majoré, en valeur absolue, par la valeur absolue du premier terme négligé. On a même, si on le désire, le signe de l'erreur commise en prenant S_n comme valeur approchée de S .

En particulier il résulte immédiatement de ce critère que la série de terme général $(-1)^n/n^\alpha$ converge si $\alpha > 0$. On sait qu'elle converge absolument si et seulement si $\alpha > 1$. Donc si $0 < \alpha \leq 1$ elle est semi-convergente. (Si $\alpha \leq 0$, le terme général de la série ne tend pas vers 0 et la série diverge).

Le critère d'Abel :

Soit $(v_n)_{n \geq 0}$ une suite monotone qui converge vers 0. Soit $(w_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels ou complexes, telle que les sommes partielles $w_n + w_{n+1} + \dots + w_m$ soient majorées par un nombre M indépendant de n et de m . Alors la série de terme général $u_n = v_n w_n$ converge. De plus

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k w_k \right| \leq M |v_{n+1}| .$$

Le critère de Leibniz est le cas particulier où $w_n = (-1)^n$, avec $M = 1$.

On peut supposer que (v_n) est décroissante positive, sinon on prend $-v_n$. La démonstration repose sur la décomposition d'Abel

$$\sum_{p=n}^m v_p w_p = v_m \left(\sum_{p=n}^m w_p \right) + (v_{m-1} - v_m) \left(\sum_{p=n}^{m-1} w_p \right) + \dots + (v_n - v_{n+1}) \left(\sum_{p=n}^n w_p \right) .$$

Donc

$$\left| \sum_{p=n}^m v_p w_p \right| \leq |v_m| \left| \sum_{p=n}^m w_p \right| + |v_{m-1} - v_m| \left| \sum_{p=n}^{m-1} w_p \right| + \dots + |v_n - v_{n+1}| \left| \sum_{p=n}^n w_p \right| ,$$

et, en majorant chaque somme par M ,

$$\left| \sum_{p=n}^m v_p w_p \right| \leq M(|v_m| + |v_{m-1} - v_m| + \cdots + |v_n - v_{n+1}|) .$$

Mais si la suite (v_n) est décroissante positive,

$$|v_m| + |v_{m-1} - v_m| + \cdots + |v_n - v_{n+1}| = v_m + (v_{m-1} - v_m) + \cdots + (v_n - v_{n+1}) = v_n = |v_n| ,$$

Il en résulte que

$$\left| \sum_{p=n}^m v_p w_p \right| \leq M|v_n| .$$

Comme la suite (v_n) converge vers 0, il existe N tel que $n \geq N$ implique $|v_n| < \varepsilon/M$. Donc, si $m > n \geq N$, on a

$$\left| \sum_{p=n}^m v_p w_p \right| \leq \varepsilon ,$$

ce qui d'après le critère de Cauchy, montre que la série de terme général u_n converge. De plus, en faisant tendre m vers l'infini

$$\sum_{p=n}^{\infty} v_p w_p \leq M|v_n| .$$

Donc pour le reste R_n de la série

$$|R_n| \leq M|v_{n+1}| .$$

□

Ce critère permet d'étudier en détail la série de terme général $\frac{\cos(an+b)}{n^\alpha}$, pour $\alpha > 0$, par une méthode qu'il est utile de retenir.

1) Si $\alpha > 1$ on a

$$\frac{|\cos(an+b)|}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha} ,$$

et la série converge absolument, par comparaison à une série de Riemann.

2) Si $0 < \alpha \leq 1$, et $a \neq k\pi$, posons $w_n = \cos(an+b)$, et $v_n = 1/n^\alpha$, on voit déjà que la suite (v_n) décroît et converge vers 0.

Pour calculer la somme $w_n + \cdots + w_m$, on considère w_n comme la partie réelle de $e^{i(an+b)}$, et l'on calcule

$$e^{i(an+b)} + e^{i(a(n+1)+b)} + \cdots + e^{i(am+b)} = e^{i(an+b)} \left(1 + e^{ia} + \cdots + e^{i(m-n)a} \right) .$$

On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison e^{ia} . Cette raison n'est pas égale à 1, puisque $a \neq 2k\pi$, donc

$$1 + e^{ia} + \cdots + e^{i(m-n)a} = \frac{1 - e^{i(m-n+1)a}}{1 - e^{ia}} ,$$

et par suite

$$|e^{i(an+b)} + e^{i(a(n+1)+b)} + \cdots + e^{i(am+b)}| \leq \frac{|1 - e^{i(m-n+1)a}|}{|1 - e^{ia}|} .$$

Mais

$$|1 - e^{i(m-n+1)a}| \leq 1 + |e^{i(m-n+1)a}| = 2 ,$$

donc

$$|e^{i(an+b)} + e^{i(a(n+1)+b)} + \cdots + e^{i(am+b)}| = \frac{2}{|1 - e^{ia}|} = M .$$

Mais puisque la valeur absolue de la partie réelle d'un nombre complexe est inférieure à son module, on obtient

$$|w_n + \dots + w_m| \leq |e^{i(an+b)} + e^{i(a(n+1)+b)} + \dots + e^{i(am+b)}| ,$$

et finalement

$$|w_n + \dots + w_m| \leq M .$$

On peut donc appliquer le critère d'Abel et la série de terme général $v_n w_n$ converge.

Pour montrer que la série de terme général $v_n w_n$ n'est pas absolument convergente, on écrit

$$\frac{|\cos(an+b)|}{n^\alpha} \geq \frac{\cos^2(an+b)}{n^\alpha} = \frac{1 + \cos(2an+2b)}{2n^\alpha} \geq 0 .$$

Si $a \neq k\pi$, la série de terme général $\cos(2an+2b)/n^\alpha$ converge, et la série dont le terme général est le membre de droite, est la somme d'une série divergente positive $1/n^\alpha$ et d'une série convergente. Elle diverge donc et il résulte du critère de comparaison que la série de terme général $\frac{|\cos(an+b)|}{n^\alpha}$ diverge.

Si $a = k\pi$, on a

$$\frac{|\cos(an+b)|}{n^\alpha} = \frac{|\cos b|}{n^\alpha} ,$$

et on obtient une série de Riemann qui diverge, (sauf si $\cos b = 0$).

3) Si $0 < \alpha \leq 1$ et $a = 2k\pi$, on a

$$\frac{\cos(an+b)}{n^\alpha} = \frac{\cos b}{n^\alpha} ,$$

et on obtient une série de Riemann qui diverge, (sauf si $\cos b = 0$).

9. Produit de séries

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ deux suites de nombres positifs. On pose

$$w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} .$$

La série de terme général w_n est appelée la **série produit** de la série de terme général u_n et de celle de terme général v_n . Cette dénomination va être justifiée par les résultats ci-dessous. On remarquera que la série produit n'est pas la série de terme général $u_n v_n$.

On a alors le résultat suivant :

Si les séries sont positives, alors

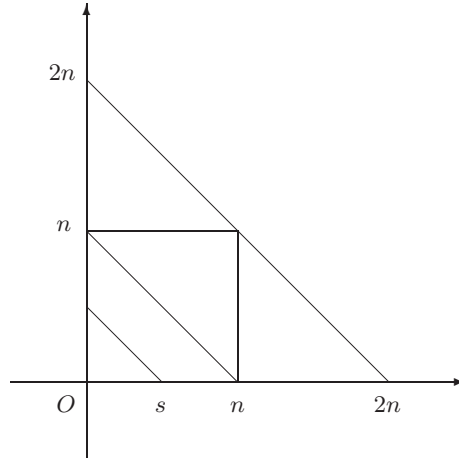
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n .$$

La formule ci-dessus généralise la formule du produit de deux sommes finies. D'autre part dans cette formule, si une des séries est nulle, alors la série produit est nulle, même si l'autre série est infinie.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'origine O , considérons le carré

$$C_n = [0, n] \times [0, n] ,$$

et le triangle isocèle rectangle T_n dont l'angle droit est en O , qui est la moitié du carré C_n . En faisant figurer sur le même dessin les ensembles T_n , C_n et T_{2n} , on a donc le schéma suivant :



et les inclusions

$$T_n \subset C_n \subset T_{2n} .$$

Alors

$$\sum_{(p,q) \in T_n} u_p v_q \leq \sum_{(p,q) \in C_n} u_p v_q \leq \sum_{(p,q) \in T_{2n}} u_p v_q .$$

Mais la somme $\sum_{(p,q) \in C_n} u_p v_q$ n'est autre que le produit $\left(\sum_{p=0}^n u_p \right) \left(\sum_{q=0}^n v_q \right)$.

D'autre part, pour sommer sur un triangle, on peut commencer par sommer sur une droite parallèle à l'hypothénuse, c'est-à-dire prendre les points (p, q) vérifiant $p + q = s$, ou encore les points $(p, s - p)$, puis faire ensuite varier s . Alors

$$\sum_{(p,q) \in T_n} u_p v_q = \sum_{s=0}^n \left(\sum_{p=0}^s u_p v_{s-p} \right) .$$

Donc on a les inégalités

$$\sum_{s=0}^n \left(\sum_{p=0}^s u_p v_{s-p} \right) \leq \left(\sum_{p=0}^n u_p \right) \left(\sum_{q=0}^n v_q \right) \leq \sum_{s=0}^{2n} \left(\sum_{p=0}^s u_p v_{s-p} \right) .$$

Lorsque n tend vers l'infini, on en déduit, puisque toutes les limites existent, finies ou non,

$$\sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^s u_p v_{s-p} \right) \leq \left(\sum_{p=0}^{\infty} u_p \right) \left(\sum_{q=0}^{\infty} v_q \right) \leq \sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^s u_p v_{s-p} \right) .$$

ce qui donne l'égalité voulue. □

On obtient la même formule pour les séries absolument convergentes.

Si la série de terme général u_n et celle de terme général v_n sont absolument convergentes, alors la série produit est absolument convergente et

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n .$$

Tout d'abord

$$|w_n| = \left| \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} \right| \leq \sum_{k=0}^n |u_k| |v_{n-k}| .$$

Mais d'après le théorème précédent, la série de terme général $\sum_{k=0}^n |u_k| |v_{n-k}|$ converge. Donc la série de terme général w_n converge absolument. Evaluons la différence

$$D_n = \left(\sum_{k=0}^n u_k \right) \left(\sum_{k=0}^n v_k \right) - \sum_{p=0}^n \left(\sum_{k=0}^p u_k v_{p-k} \right) .$$

En reprenant les notations de la démonstration du théorème précédent, on a

$$\sum_{(p,q) \in C_n} u_p v_q - \sum_{(p,q) \in T_n} u_p v_q = \sum_{(p,q) \in C_n \setminus T_n} u_p v_q ,$$

et aussi

$$\sum_{(p,q) \in C_n} |u_p v_q| - \sum_{(p,q) \in T_n} |u_p v_q| = \sum_{(p,q) \in C_n \setminus T_n} |u_p v_q| .$$

Alors on a

$$|D_n| = \left| \sum_{(p,q) \in C_n \setminus T_n} u_p v_q \right| \leq \sum_{(p,q) \in C_n \setminus T_n} |u_p v_q| = \sum_{(p,q) \in C_n} |u_p v_q| - \sum_{(p,q) \in T_n} |u_p v_q| .$$

On en déduit

$$|D_n| \leq \left(\sum_{k=0}^n |u_k| \right) \left(\sum_{k=0}^n |v_k| \right) - \sum_{p=0}^n \left(\sum_{k=0}^p |u_k| |v_{p-k}| \right) .$$

Mais le membre de droite converge vers 0 lorsque n tend vers l'infini, donc celui de gauche également. Enfin

$$\sum_{k=0}^n w_k = \left(\sum_{k=0}^n u_k \right) \left(\sum_{k=0}^n v_k \right) - D_n ,$$

et cette suite converge vers $\left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} v_k \right)$, d'où l'égalité voulue. \square

Donnons un exemple de calcul :

Soit z un nombre complexe tel que $|z| < 1$. Effectuons le produit de la série de terme général z^n par elle-même. Le coefficient w_n de la série produit vaut

$$w_n = \sum_{k=0}^n u_k u_{n-k} = \sum_{k=0}^n z^k z^{n-k} = (n+1)z^n .$$

La série de terme général $(n+1)z^n$ converge donc absolument si $|z| < 1$, et

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right)^2 = \frac{1}{(1-z)^2} .$$

II. Les séries de fonctions

On va combiner maintenant la notion de série et la notion de convergence uniforme. On considère donc une suite de fonctions $(u_n)_{n \geq 0}$ définies sur un intervalle J de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , et l'on forme la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \geq 0}$ où

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k .$$

On étudie encore la convergence de la suite S_n .

1. Les différents types de convergence d'une série de fonctions

Il y a plusieurs types de convergence envisageables pour une série de fonctions :

[1] La convergence simple.

La série de terme général u_n converge simplement sur J , si pour tout x de J , la série de terme général $u_n(x)$ converge, c'est-à-dire si, pour tout x de J , la suite $(S_n(x))$ des sommes partielles possède une limite finie. On notera encore

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) ,$$

et cela définit une fonction sur J qui sera notée $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

[2] La convergence absolue.

La série de terme général u_n converge absolument sur J , si pour tout x de J , la série de terme général $|u_n(x)|$ converge, c'est-à-dire si pour tout x de J la suite $(T_n(x))$ définie par

$$T_n = \sum_{k=0}^n |u_k| ,$$

possède une limite finie.

[3] La convergence uniforme.

La série de terme général u_n converge uniformément sur J si la suite de fonctions (S_n) converge uniformément sur J . Donc si l'on note S la limite uniforme, cela signifie que la suite $(\|S_n - S\|_{\infty})$ converge vers 0.

[4] La convergence absolue uniforme.

La série de terme général u_n converge absolument uniformément sur J si la suite de fonctions (T_n) converge uniformément sur J . Donc si l'on note T la limite uniforme, cela signifie que la suite $(\|T_n - T\|_{\infty})$ converge vers 0.

[5] La convergence normale.

La série de terme général u_n converge normalement sur J si la série numérique de terme général $\|u_n\|_{\infty}$ converge.

On sait déjà d'après les résultats généraux sur les séries et sur les suites de fonctions que :

- la convergence absolue implique la convergence simple
- la convergence uniforme implique la convergence simple
- la convergence absolue uniforme implique la convergence absolue

D'autre part, en raison de l'inégalité

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k| ,$$

on a

$$\|S_n - S\|_{\infty} \leq \|T_n - T\|_{\infty} ,$$

et la convergence absolue uniforme implique la convergence uniforme.

Pour montrer que la convergence normale implique toutes les autres, donnons tout d'abord le critère de Cauchy de convergence uniforme pour les séries, qui est l'application à la suite des sommes partielles du critère de Cauchy de convergence uniforme :

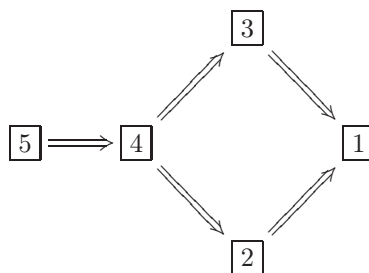
La série de terme général u_n converge uniformément sur J , si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que $m > n \geq N$ implique, pour tout x de J

$$\left| \sum_{k=n+1}^m u_k(x) \right| < \varepsilon .$$

Comme on a

$$\left| \sum_{k=n+1}^m u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^m \|u_k\|_{\infty} ,$$

il résulte immédiatement du critère de Cauchy que, si la série converge normalement, elle converge absolument uniformément et donc uniformément sur J . On a donc le schéma d'implications suivant :



On retiendra donc en particulier que :

Si une série de fonction converge normalement, elle converge uniformément.

2. Critères de convergence uniforme d'une série de fonctions

Donnons tout d'abord une condition nécessaire de convergence uniforme d'une série.

Soit une suite (u_n) de fonctions numériques définies sur J . Si la série de terme général u_n converge uniformément, alors la suite (u_n) converge uniformément vers 0.

En effet, si la suite (S_n) des sommes partielles converge uniformément vers S , on a

$$u_n = S_{n+1} - S_n ,$$

et cette suite converge uniformément vers $S - S = 0$.

□

Nous donnons maintenant deux critères de convergence uniforme.

Le critère de Weierstrass :

Soit une suite (u_n) de fonctions numériques définies sur J . S'il existe une suite numérique (a_n) telle que la série de terme général a_n converge, et pour tout entier n , et tout x de J

$$|u_n(x)| \leq a_n ,$$

alors la série de terme général u_n converge uniformément sur J .

On a en effet

$$\|u_n\|_{\infty} \leq a_n ,$$

et la série de terme général $\|u_n\|_{\infty}$ converge. Donc la série de terme général u_n converge normalement donc uniformément sur J . \square

Le critère de Weierstrass est un critère de convergence absolue. Pour les séries qui ne convergent pas absolument, on a le critère d'Abel :

Soit $(v_n)_{n \geq 0}$ une suite monotone de fonctions définies sur J qui converge uniformément vers 0. Soit $(w_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions définies sur J telle que les sommes partielles $w_n(x) + w_{n+1}(x) + \dots + w_m(x)$ soient majorées par un nombre M indépendant de n , de m et de x . Alors la série de terme général $u_n = v_n w_n$ converge uniformément sur J .

Si l'on applique le critère d'Abel pour les séries numériques, pour tout x de J la série de terme général $v_n(x)w_n(x)$ converge, et l'on a l'inégalité

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k(x)w_k(x) \right| \leq M|v_{n+1}(x)| .$$

Alors

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k(x)w_k(x) \right| \leq M\|v_{n+1}\|_{\infty} ,$$

et comme la suite (v_n) converge uniformément vers 0, le membre de droite tend vers 0, et donc la

suite $\left(\sum_{k=0}^n v_k w_k \right)$ converge uniformément vers $\sum_{n=0}^{\infty} v_n w_n$. \square

Remarquons que la condition sur la suite (w_n) est satisfaite en particulier dans le cas des séries alternées c'est-à-dire lorsque $w_n = (-1)^n$.

3. Propriétés de la convergence uniforme d'une série de fonctions

Nous donnons sans démonstration quelques propriétés qui se déduisent immédiatement de celles de la convergence uniforme des suites de fonctions par application à la suite des sommes partielles.

Soit (u_n) une suite de fonctions numériques définies et continues sur J . Si la série de terme général u_n converge uniformément sur J , sa somme est une fonction continue sur J .

Bien sûr la convergence uniforme locale suffit.

Soit (u_n) une suite de fonctions numériques définies et continues sur un segment $J = [a, b]$. Si la série de terme général u_n converge uniformément sur J , la série numérique de terme général $\int_a^b u_n(x) dx$ converge et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b u_n(x) dx \right) = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \right) dx .$$

(Intervention des signes \sum et \int).

Soit (u_n) une suite de fonctions à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} définies sur un intervalle J ,
On suppose

- (i) que les fonctions u_n sont de classe C^1 sur J ,
- (ii) que la série de terme général u'_n converge uniformément localement,
- (iii) qu'il existe un point a de J tel que la série de terme général $u_n(a)$ converge.

Alors la série de terme général u_n converge uniformément localement sur J . Sa somme est de classe C^1 et l'on a

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} u'_n .$$

(Dérivation terme à terme).

On peut remplacer la condition (iii) par
(iii') la série de terme général u_n converge simplement.

Donnons une généralisation pour des fonctions de classe C^k .

Soit (u_n) une suite de fonctions à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} définies sur un intervalle J ,
On suppose

- (i) que les fonctions u_n sont de classe C^k sur J ,
 - (ii) que la série de terme général $u_n^{(k)}$ converge uniformément localement,
 - (iii) qu'il existe un point a de J tel que, si $0 \leq j \leq k$, la série de terme général $u_n^{(j)}(a)$ converge.
- Alors la série de terme général u_n converge uniformément localement sur J . Sa somme est de classe C^k et l'on a, si $1 \leq j \leq k$,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right)^{(j)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(j)} .$$

De même on peut généraliser pour les fonctions C^∞ .

Soit (u_n) une suite de fonctions à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} définies sur un intervalle J ,

On suppose

(i) que les fonctions u_n sont de classe C^∞ sur J ,

(ii) que, pour tout $k \geq 0$, les séries de terme général $u_n^{(k)}$ convergent uniformément localement sur J

Alors la série de terme général u_n converge uniformément localement sur J . Sa somme est de classe C^∞ et l'on a, si $j \geq 1$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right)^{(j)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(j)} .$$

Chapitre 3

SERIES ENTIERES

Un type de séries de fonctions qui joue un rôle important en mathématiques est constitué de fonctions puissances et généralise les fonctions polynômes : ce sont les séries entières que nous allons étudier dans ce chapitre. Nous verrons en particulier une application dans la résolution de certaines équations différentielles linéaires.

1. Définition d'une série entière

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres complexes, et x un nombre réel ou complexe. On appelle **série entière de coefficients** a_n la série de terme général $a_n x^n$. Par abus de langage on appellera parfois cette série « la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ »

Si l'on pose, pour x réel,

$$u_n(x) = a_n x^n,$$

on pourra considérer la série entière comme une série de fonctions définies sur \mathbb{R} , et étudier les propriétés de la fonction considérée.

Remarque : on ne s'occupera pas dans ce chapitre de l'aspect fonctionnel lorsque x est dans \mathbb{C} , ce qui ne nous interdit pas de considérer la série entière dans ce cas.

2. Rayon de convergence d'une série entière

Considérons l'ensemble I constitué des nombres réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)_{n \geq 0}$ soit bornée.

Cet ensemble contient 0 et n'est donc pas vide. Si r appartient à I , et si $0 \leq r' \leq r$ on a

$$|a_n| r'^n \leq |a_n| r^n.$$

Donc la suite $(a_n r'^n)_{n \geq 0}$ est également bornée. Il en résulte que I est un intervalle de borne inférieure 0. On appelle **rayon de convergence** de la série entière de coefficients a_n la borne supérieure R (éventuellement infinie) de l'intervalle I .

Étudions la convergence de la série suivant les valeurs de $x \in \mathbb{C}$.

- Si $|x| > R$, alors la suite $(a_n x^n)$ n'est pas bornée. Elle ne converge pas vers 0, et la série ne converge pas.
- Si $|x| < R$. Soit r tel que $|x| < r < R$. Alors, en écrivant

$$|a_n x^n| = |a_n| r^n \left(\frac{|x|}{r} \right)^n,$$

et puisque la suite $(a_n r^n)$ est majorée par une constante M , on a

$$|a_n x^n| \leq M \left(\frac{|x|}{r} \right)^n.$$

Mais puisque $|x|/r < 1$, le membre de droite est le terme général d'une série géométrique convergente. Donc la série de terme général $a_n x^n$ converge absolument, donc converge.

Si le rayon de convergence R n'est pas nul, on appelle **disque de convergence** de la série entière le disque ouvert de centre O et de rayon R . Si l'on se limite aux nombres réels, on appellera **intervalle de convergence** de la série entière l'intervalle $] -R, R[$.

Ce qui précède ne donne aucun renseignement sur ce qui se passe lorsque $|x| = R$, et, suivant la série considérée, on verra qu'elle peut converger ou diverger.

Nous résumons tous ceci dans le tableau suivant :

$ x < R$	$ x = R$	$ x > R$
La série de terme général $a_n x^n$ converge absolument		La série de terme général $a_n x^n$ ne converge pas absolument
La série de terme général $a_n x^n$ converge		La série de terme général $a_n x^n$ diverge
La suite $(a_n x^n)_{n \geq 0}$ converge vers 0		La suite $(a_n x^n)_{n \geq 0}$ ne converge pas vers 0
La suite $(a_n x^n)_{n \geq 0}$ est bornée		La suite $(a_n x^n)_{n \geq 0}$ n'est pas bornée
Il peut se passer n'importe quoi		

Remarques :

- 1) Dire que $R = 0$ revient à dire que la série de terme général $a_n x^n$ converge uniquement si $x = 0$. Dans ce cas la série n'a pas d'intérêt.
- 2) Dire que $R = \infty$ revient donc à dire que la série de terme général $a_n x^n$ converge absolument quel que soit x complexe. Le « disque » de convergence est \mathbb{C} tout entier.
- 3) Dire que la série entière de coefficients a_n converge pour un nombre x signifie que son rayon R est tel que $|x| \leq R$.
- 4) Dire que la série entière de coefficients a_n diverge pour un nombre x signifie que son rayon R est tel que $|x| \geq R$.
- 5) Il résulte du chapitre sur les séries que la série géométrique de terme général x^n est une série entière de rayon 1. Par ailleurs un polynôme est une série entière de rayon infini. En particulier la série nulle est une série entière de rayon infini.

- 6) Le rayon de convergence d'une série entière ne dépend pas des premiers termes de la série. On peut modifier un nombre fini de coefficients sans modifier le rayon de convergence.

Donnons quelques résultats sur les rayons de convergence.

On peut comparer les rayons de convergence de deux séries si l'on sait comparer leurs coefficients :

Soit (a_n) et (b_n) deux suites de nombres complexes. Soit R_1 le rayon de convergence de la série entière de coefficients a_n et R_2 celui de la série entière de coefficients b_n . Alors

- si à partir d'un certain rang $|a_n| \leq |b_n|$, on a $R_2 \leq R_1$*
- si $|a_n| \sim |b_n|$, on a $R_2 = R_1$*

Si à partir d'un certain rang $|a_n| \leq |b_n|$, on a pour tout x

$$|a_n x^n| \leq |b_n x^n| .$$

Or si $|x| < R_2$ la série de terme général $|b_n x^n|$ converge, donc la série de terme général $|a_n x^n|$ converge. Alors $R_1 \geq R_2$. (Il faut faire attention au renversement de l'inégalité).

Si $|a_n| \sim |b_n|$, alors

$$|a_n x^n| \sim |b_n x^n| ,$$

la série de terme général $|a_n x^n|$ et la série de terme général $|b_n x^n|$ sont de même nature. Les deux séries auront donc le même rayon de convergence. \square

3. Opérations sur les séries entières

Nous allons voir quelques opérations que l'on peut effectuer sur les séries entières et ce que l'on peut dire des rayons de convergence.

Multiplication par un scalaire

Soit (a_n) une suite de nombres complexes, et λ un nombre complexe non nul. Les séries entières de coefficients a_n et λa_n ont le même rayon de convergence R , et, si $|x| < R$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n) x^n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

D'après les résultats sur les séries numériques, on sait que la série de terme général $a_n x^n$ est de même nature que la série de terme général $\lambda a_n x^n$, ce qui montre que les deux séries entières ont le même rayon de convergence, et lorsque les séries convergent on a l'égalité voulue. \square

Somme

Soit (a_n) et (b_n) deux suites de nombres complexes. Soit R_1 le rayon de convergence de la série entière de coefficients a_n et R_2 celui de la série entière de coefficients b_n . Alors le rayon R de convergence de la série entière de coefficients $a_n + b_n$ vérifie

$$\begin{aligned} R &= \inf(R_1, R_2) & \text{si } R_1 \neq R_2 \\ R &\geq R_1 & \text{si } R_1 = R_2 \end{aligned}$$

et si $|x| < \inf(R_1, R_2)$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n .$$

Si $|x| < \inf(R_1, R_2)$ les séries de terme général $a_n x^n$ et $b_n x^n$ convergent toutes les deux, donc la série de terme général $(a_n + b_n)x^n$ également. Il en résulte que l'on a $R \geq \inf(R, R')$, et que si $|x| < R$, on a l'égalité

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n .$$

Si $R_1 = R_2$ on ne peut rien dire de plus.

Par contre si $R_1 \neq R_2$, choisissons x strictement compris entre R_1 et R_2 . Alors une des deux séries converge, et l'autre diverge donc la somme diverge. Il en résulte que R est plus petit que $\inf(R_1, R_2)$. \square

Remarques : 1) si $R_1 = R_2$, le rayon de la série somme peut être effectivement plus grand. Par exemple, les séries de terme général x^n et $-x^n$ sont de rayon 1, mais leur somme est la série nulle de rayon infini.

2) Lorsque $R_1 \neq R_2$, si $|x| > \sup(R_1, R_2)$ les deux séries divergent et leur somme également.

Produit

Soit (a_n) et (b_n) deux suites de nombres complexes. Soit R_1 le rayon de convergence de la série entière de coefficients a_n et R_2 celui de la série entière de coefficients b_n . Alors le rayon R de convergence de la série entière produit de coefficients $\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ est tel que $R \geq \inf(R_1, R_2)$

et si $|x| < \inf(R_1, R_2)$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) .$$

Si $|x| < \inf(R_1, R_2)$ les séries de terme général $a_n x^n$ et $b_n x^n$ convergent toutes les deux absolument, donc la série produit également. Elle a pour terme général

$$\sum_{k=0}^n (a_k x^k) (b_{n-k} x^{n-k}) = \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n .$$

Il en résulte que l'on a $R \geq \inf(R, R')$, et que si $|x| < R$, on a l'égalité

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right).$$

□

Remarques : 1) on peut donner des exemples où $R > \inf(R_1, R_2)$, que R_1 soit égal ou non à R_2 .

2) multiplier une série entière par un monôme ne change pas le rayon de la série entière.

Changement de variable dans une série entière

Si la série entière de coefficients a_n a pour rayon R , et si λ est un nombre complexe non nul, la série entière de coefficients $a_n \lambda^n$ a pour rayon $R' = R/|\lambda|$.

La série de terme général $a_n \lambda^n x^n$ converge si $|\lambda x| < R$ donc si $|x| < R/|\lambda|$, et diverge si $|\lambda x| > R$ donc si $|x| > R/|\lambda|$. Donc $R' = R/|\lambda|$. □

Remarque : en particulier si $\lambda = -1$, ou si $R = \infty$, on a $R' = R$.

Si la série entière de coefficients a_n a pour rayon R , et si p est un nombre entier positif, la série entière de terme général $a_n x^{np}$ a pour rayon $R' = R^{1/p}$.

La série de terme général $a_n x^{np}$ converge si $|x|^p < R$ donc si $|x| < R^{1/p}$, et diverge si $|x|^p > R$ donc si $|x| > R^{1/p}$. Donc $R' = R^{1/p}$. □

Attention, si l'on considère la série de terme général $a_n x^{2n}$ par exemple, les coefficients de la série entière sont $a_0, 0, a_1, 0, \dots$

4. Convergence uniforme d'une série entière

La série entière de coefficients a_n et de rayon R converge uniformément sur tout disque fermé de centre O et de rayon $R' < R$.

Soit r tel que $|x| < R' < r < R$. Alors, en écrivant

$$|a_n x^n| = |a_n| r^n \left(\frac{|x|}{r} \right)^n,$$

et puisque la suite $(a_n r^n)$ est majorée par une constante M , on a

$$|a_n x^n| \leq M \left(\frac{R'}{r} \right)^n.$$

Mais puisque $|R'|/r < 1$, le membre de droite est le terme général d'une série géométrique convergente. Donc la série de terme général $a_n x^n$ converge normalement donc uniformément sur le disque de centre O et de rayon R' . \square

On en déduit immédiatement les conséquences suivantes :

La somme d'une série entière de rayon R est une fonction continue sur $] -R, R[$.

On a convergence uniforme locale sur $] -R, R[$, et les fonctions u_n sont des monômes donc des fonctions continues. Donc la somme est continue. \square

Soit une série entière qui converge pour tout $|x| < r$. Si en un point x_0 tel que $|x_0| = r$, la somme S de la série n'admet pas de limite radiale finie, alors le rayon de convergence R de la série vaut $R = |x_0|$.

Par **limite radiale** en x_0 on entend la limite lorsque t tend vers 1_- de $S(tx_0)$, où t appartient à $[0, 1[$.

Si $|x_0| \leq R$, considérons la série entière de la variable t de terme général $a_n t^n x_0^n$. C'est une série de rayon $R/|x_0|$, et elle est continue sur l'intervalle $] -R/|x_0|, R/|x_0|[$. Si $|x_0| < R$, alors $R/|x_0| > 1$, et la somme de la série, qui vaut $S(tx_0)$, est une fonction continue en 1. Donc

$$\lim_{t \rightarrow 1_-} S(tx_0) = S(x_0) ,$$

et la limite est finie. Donc, si $S(rx_0)$ n'admet pas de limite finie en 1_- , c'est que $|x_0| = R$. \square

5. Dérivation d'une série entière

Soit une série entière de coefficients a_n . On appelle **série dérivée** la série entière de coefficients $(n+1)a_{n+1}$. Cette terminologie sera justifiée par le théorème de dérivation des séries entières donné plus loin. Tout d'abord on montre que le rayon de convergence ne change pas.

Une série entière et sa série dérivée ont le même rayon de convergence R .

Notons R' le rayon de la série dérivée. On a, si $n \geq 1$,

$$|a_n x^n| \leq n |a_n x^{n-1}| |x| .$$

Donc si $|x| < R'$, la série de terme général $(n+1)a_{n+1}x^n$ converge absolument, et il en est de même de la série de terme général $na_n x^n$ et donc de la série $a_n x^n$. Il en résulte que $R \geq R'$.

Si $|x| < R$, soit r tel que $|x| < r < R$. Alors

$$|na_n x^{n-1}| \leq \frac{n}{r} \left(\frac{|x|}{r} \right)^{n-1} |a_n| r^n .$$

Comme $|x|/r < 1$ la suite $\left(\frac{n}{r} \left(\frac{|x|}{r} \right)^{n-1} \right)$ converge vers 0. Elle est donc majorée par une constante M , et

$$|na_n x^{n-1}| \leq M |a_n| r^n .$$

Comme la série de terme général $a_n r^n$ converge absolument, il en est de même de la série de terme général $na_n x^{n-1}$ ou encore de $(n+1)a_{n+1}x^n$. Il en résulte que $R' \geq R$.

Finalement on a $R = R'$. □

On peut alors donner le théorème de dérivation des séries entières.

Si la série entière de coefficients a_n est de rayon R non nul, sa somme $S(x)$ est de classe C^∞ dans l'intervalle $] -R, R[$, et sur cet intervalle, on a, pour tout entier positif k ,

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n x^{n-k} ,$$

ou encore

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+k)(n+k-1) \cdots (n+1) a_{n+k} x^n .$$

Par une récurrence immédiate, toutes les séries dérivées successives ont le même rayon de convergence R . Par ailleurs ces séries convergent uniformément localement dans $] -R, R[$, donc le théorème de dérivation des séries s'applique et l'on peut dériver terme à terme. □

On en tire une conséquence immédiate :

Si la série entière de coefficients a_n possède un rayon de convergence R non nul, et a pour somme $S(x)$, on a, pour tout entier n

$$a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!} .$$

Donc pour une telle série, on a, si $|x| < R$,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(0)}{n!} x^n .$$

Cette dernière expression est appelée **développement en série entière au voisinage de 0** de la fonction S .

Exemple : en dérivant la série géométrique de rayon 1 :

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} ,$$

on déduit, si $-1 < x < 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2} .$$

Remarque : on voit réapparaître dans ce développement les coefficients de Taylor de la fonction S . Il faut remarquer cependant que l'on ne peut confondre cette somme avec la formule de Taylor-Young qui ne donne pas les mêmes renseignements sur la fonction S .

La relation

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(0)}{n!} x^n ,$$

signifie que pour x fixé tel que $|x| < R$, la suite $\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{S^{(k)}(0)}{k!} x^k \right)$ admet comme limite 0 quand n tend vers l'infini.

La formule de Taylor-Young

$$S(x) = \sum_{k=0}^n \frac{S^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) ,$$

signifie que, pour n fixé, la fonction qui à x associe $\left(S(x) - \sum_{k=0}^n \frac{S^{(k)}(0)}{k!} x^k \right) x^{-n}$ admet pour limite 0 quand x tend vers 0.

Une autre conséquence, permet de caractériser l'égalité de deux séries entières :

Soit deux séries entières de coefficients respectifs a_n et b_n et de somme respectives $S_1(x)$ et $S_2(x)$. Alors si $S_1(x) = S_2(x)$ sur un intervalle $]a, b[$ contenant 0, on a, pour tout entier n , l'égalité des coefficients $a_n = b_n$.

Comme les séries convergent pour tout x de $]a, b[$ elles ont des rayons de convergence non nuls. Les deux fonctions S_1 et S_2 sont C^∞ et donc, pour tout entier n et tout x de $]a, b[$

$$S_1^{(n)}(x) = S_2^{(n)}(x) .$$

Alors

$$a_n = \frac{S_1^{(n)}(0)}{n!} = \frac{S_2^{(n)}(0)}{n!} = b_n .$$

□

Remarque : en particulier, si la somme est nulle dans un intervalle contenant 0, alors les coefficients sont nuls. Par contre il ne faut pas croire qu'une fonction de classe C^∞ en 0, ait nécessairement un développement en série entière au voisinage de 0. La fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a ses dérivées en 0 qui sont toutes nulles, alors que f n'est pas la fonction nulle. Elle ne peut donc être développable en série entière en 0.

6. Primitivation d'une série entière

En appliquant ce qui précède, les séries entières de coefficients a_n et $a_n/(n+1)$ ont le même rayon de convergence, et la première est la dérivée de la seconde si le rayon n'est pas nul. Donc

Si la série entière de coefficients a_n est de rayon R non nul, et de somme $S(x)$, une primitive F de S dans l'intervalle $] -R, R[$ est développable en série entière de rayon R de la forme

$$F(x) = F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n ,$$

ou encore

$$F(x) = F(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} .$$

On intègre donc terme à terme en n'oubliant pas le terme constant $F(0)$.

Exemple : en prenant la primitive nulle en 1 de la série géométrique de rayon 1 :

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} ,$$

on déduit, si $-1 < x < 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) .$$

7. Détermination du rayon de convergence

La liste des méthodes indiquées ci-dessous n'est pas exhaustive, et on peut trouver bien des variantes possibles.

Application des propriétés du rayon de convergence

On procède souvent en deux temps :

- Si l'on sait que pour tout x tel que $|x| < |x_0|$ la série entière converge, on en déduit que $R \geq |x_0|$
 - Si la série diverge pour x_0 , on en déduit que $R \leq |x_0|$
- alors $R = |x_0|$.

Exemple : $\sum_{n=0}^{\infty} \sin nx^n$

On a $|\sin nx^n| \leq |x^n|$. Donc la série à un rayon $R \geq 1$. Par ailleurs si $x = 1$, le terme général $|\sin n|$ ne converge pas vers 0 et la série diverge. Donc $R = 1$.

Application des règles de Cauchy et de d'Alembert

Soit R le rayon de convergence de la série entière de coefficients a_n .

- Si la suite $(|a_{n+1}/a_n|)$ converge vers ℓ , alors, $R = 1/\ell$.
- Si la suite $(\sqrt[n]{|a_n|})$ converge vers ℓ , alors, $R = 1/\ell$.

On applique la règle de d'Alembert à la série de terme général $u_n(x) = a_n x^n$. On a

$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} |x| ,$$

Alors si $(|a_{n+1}/a_n|)$ converge vers ℓ , la suite $(\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|})$ converge vers $\ell|x|$, et la série converge si $\ell|x| < 1$, soit $|x| < 1/\ell$, et diverge si $\ell|x| > 1$, soit $|x| > 1/\ell$. On en déduit que $R = 1/\ell$.

Le raisonnement est le même pour la règle de Cauchy. □

Exemple : $\sum_{n=1}^{\infty} R(n)x^n$ où R est une fraction rationnelle. La limite de la suite $(R(n+1)/R(n))$ vaut 1, et donc $R = 1$.

Lorsque beaucoup de coefficients de la série sont nuls, on peut parfois appliquer les règles de Cauchy et de d'Alembert non pas à la série de terme général $a_n x^n$ mais à la série constituée des termes non nuls.

Exemple : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{n}$

Cette série a pour coefficient

$$a_n = \begin{cases} 1/\sqrt{n} & \text{si } n \text{ est un carré non nul} \\ 0 & \text{si } n \text{ n'est pas un carré ou si } n = 0 \end{cases}$$

Le rapport a_{n+1}/a_n n'a pas de sens. Mais on peut appliquer la règle de d'Alembert à $v_n(x) = x^{n^2}/n$. On obtient

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n}{n+1} |x^{2n+1}| .$$

Mais cette expression converge vers 0 si $|x| < 1$ donc la série converge, et tend vers l'infini si $|x| > 1$ et la série diverge. Donc $R = 1$.

Application des règles de comparaison

On sait que l'on peut comparer les coefficients avec un équivalent ce qui donne des séries de même rayon.

Exemple : $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n} x^n$

Comme la suite $(\sqrt[n]{n})$ converge vers 1, on a

$$\sqrt[n]{n} \sim 1 ,$$

mais la série géométrique de coefficients 1 est de rayon 1. Donc la série proposée également.

Quelques exemples

- La série entière de coefficients λ^n ou λ est un nombre complexe non nul a pour rayon de convergence $1/|\lambda|$. (La série de terme général $\lambda^n x^n$ est une série géométrique de raison λx).
- La série entière de coefficients n^α a pour rayon 1. C'est une conséquence immédiate de la règle de d'Alembert puisque la suite a_{n+1}/a_n converge vers $1 = 1/R$.

- Si R est une fraction rationnelle non nulle, la série entière de coefficients $R(n)$ est de rayon 1 car $R(n)$ est équivalent au rapport des termes de plus haut degré donc on a

$$R(n) \sim \lambda n^k ,$$

où λ un réel non nul et k un entier.

- Les séries de rayon nul s'obtiennent quand le coefficient tend « vite » vers l'infini, en particulier si $|a_{n+1}/a_n|$ ou $\sqrt[n]{|a_n|}$ tend vers l'infini. C'est le cas de $n!$ ou de n^n . Bien sûr en prenant comme terme général l'inverse des exemples précédents, on obtient des séries de rayon infini : $1/n!$ ou $1/n^n$.

9. Le théorème d'Abel

La théorie générale ne précise pas la nature de la série entière au bord du disque de convergence, et effectivement on peut rencontrer beaucoup de situations diverses : la série peut converger en tout point du bord, ou diverger en tout point du bord, ou converger en certains points et diverger en d'autres. Lorsque la série converge en un point x_0 du bord, on a le théorème suivant :

Soit une série entière de coefficients (a_n) , de rayon non nul, R et de somme S . On suppose que la série converge en un point x_0 tel que $|x_0| = R$. Alors S admet une limite radiale en x_0 et

$$\lim_{r \rightarrow 1_-} S(rx_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n .$$

Remarque : si $x_0 = -R$, cette relation peut s'écrire

$$\lim_{r \rightarrow -R^+} S(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n ,$$

et si $x_0 = R$

$$\lim_{r \rightarrow R^-} S(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n .$$

On considère la série entière de la variable r de terme général $a_n r^n x_0^n$. Et l'on va montrer que cette série converge uniformément sur $[0, 1]$. On pose, pour r dans $[0, 1]$,

$$w_n = a_n x_0^n \quad \text{et} \quad v_n(r) = r^n .$$

La suite (v_n) est une suite décroissante positive de fonctions. Comme la série de terme général w_n converge, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N , tel que $m > n > N$ implique

$$\left| \sum_{k=n}^m w_k \right| < \varepsilon .$$

Alors d'après une majoration obtenue dans le chapitre sur les séries dans le critère d'Abel, on en déduit

$$\left| \sum_{k=n}^m w_k v_k(r) \right| < \varepsilon v_n(r) < \varepsilon .$$

Il résulte du critère de Cauchy de convergence uniforme, que la série de terme général $v_n w_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$. Mais

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n(r) w_n = \begin{cases} S(rx_0) & \text{si } r \in [0, 1[\\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n & \text{si } r = 1 \end{cases}$$

La continuité en 1 donne alors

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} S(rx_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n .$$

□

Exemple : on veut calculer la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. La série converge puisque c'est une série alternée. Or, si $-1 < x < 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) .$$

On déduit donc du théorème d'Abel appliqué en $x_0 = -1$ que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \lim_{n \rightarrow -1^+} -\ln(1-x) = -\ln 2 .$$

10. Les séries entières usuelles

Elles sont de deux types :

- celles qui proviennent de la série exponentielle qui sont de rayon infini
- celles qui proviennent de la série du binôme et qui sont de rayon 1.

Série de l'exponentielle

Comme on l'a vu, les coefficients des séries sont ceux déjà obtenus dans les développements limités des mêmes fonctions.

On a, pour tout x réel,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Commençons par la série de l'exponentielle. En appliquant la règle de d'Alembert, on a

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{n+1} ,$$

et ceci tend vers 0. Donc $R = \infty$. Cela montre en particulier que pour tout nombre x , la suite $(x^n/n!)$ converge vers 0.

En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction exponentielle, pour tout entier n , et tout réel x non nul, il existe c_n compris entre 0 et x tel que

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + e^{c_n} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Donc

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq e^{c_n} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Si $x > 0$, alors $e^{c_n} \leq e^x$, et si $x < 0$, alors $e^{c_n} \leq 1$. Donc, en posant $M = \max(e^x, 1)$, on a

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Alors, lorsque n tend vers l'infini, le membre de droite a pour limite 0, d'où l'égalité

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

La même démonstration s'applique aux fonctions sinus et cosinus. Pour les fonctions sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique, on utilise simplement le fait que

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

ce qui donne les séries extraites de l'exponentielle des termes de rang pair et de rang impair. \square

Série du binôme

Si m est un nombre entier positif, on a la formule du binôme de Newton :

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^m \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n.$$

C'est un polynôme, donc en particulier une série entière de rayon infini. La série du binôme généralise cette formule pour $m \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, et donne des séries entières de rayon 1.

On a, pour tout x de $] -1, 1 [$

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Etudions tout d'abord la série du binôme lorsque m est un nombre réel positif non entier. L'application de la règle de d'Alembert montre que

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|m-n|}{n+1},$$

converge vers $1/R=1$. Donc la série du binôme est de rayon 1.

Posons

$$f(x) = (1+x)^m.$$

Si l'on applique la formule de Taylor avec reste intégral de Lagrange, on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt.$$

(Cette formule se démontre facilement par récurrence par exemple). Ce qui donne

$$f(x) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{m(m-1)\cdots(m-n)}{n!} (1+t)^{m-n-1} (x-t)^n dt,$$

et l'on en déduit

$$\left| f(x) - \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!} x^k \right) \right| \leq \left| \int_0^x \frac{|m(m-1)\cdots(m-n)|}{n!} |1+t|^{m-n-1} |x-t|^n dt \right|.$$

On remarque que,

si $0 \leq t \leq x < 1$, on a $|x-t| \leq x+t \leq 1+t$,

si $-1 < x \leq t \leq 0$, on a $|x-t| = t-x \leq 1+t$,

Donc, si $-1 < x < 1$, et si t est compris entre 0 et x , on a $|x-t| \leq 1+t$, et par suite on peut majorer l'intégrale par

$$\left| \int_0^x \frac{|m(m-1)\cdots(m-n)|}{k!} (1+t)^{m-n-1} |x-t|^n dt \right| \leq \left| \int_0^x \frac{|m(m-1)\cdots(m-n)|}{k!} (1+t)^{m-1} dt \right|,$$

et en calculant le membre de droite,

$$\left| \int_0^x \frac{|m(m-1)\cdots(m-n)|}{k!} (1+t)^{m-n-1} |x-t|^n dt \right| \leq \frac{|(m-1)\cdots(m-n)|}{k!} |1-(x+1)^m|.$$

Il reste à montrer que la suite (K_n) définie par

$$K_n = \frac{|(m-1)\cdots(m-n)|}{n!},$$

converge vers 0, pour obtenir la somme de la série du binôme.

On a

$$\ln K_n = \sum_{k=1}^n \ln \frac{|m-k|}{k} = \sum_{k=1}^n \ln \left| 1 - \frac{m}{k} \right|.$$

Mais, lorsque k tend vers l'infini

$$\ln \left| 1 - \frac{m}{k} \right| \sim -\frac{m}{k},$$

et m/k est le terme général d'une série divergente négative. Il en est de même pour la série de terme général $\ln \left| 1 - \frac{m}{k} \right|$ et il en résulte que la suite $(\ln K_n)$ a pour limite $-\infty$. Alors la suite (K_n) converge vers 0.

Il reste à étudier la série du binôme dans le cas où m est négatif.

Tout d'abord si $m = -1$, elle s'écrit

$$\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} = \frac{(-1)(-2)\cdots(-n)}{n!} = (-1)^n .$$

On a donc la série géométrique

$$(1+x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n .$$

Par ailleurs, on montre facilement par récurrence, en dérivant, que si la formule

$$(1+x)^p = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!} x^n ,$$

est vraie, alors, on a pour tout entier $s \geq 0$,

$$(1+x)^{p-s} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p-s)(p-s-1)\cdots(p-s-n+1)}{n!} x^n .$$

Il en résulte, en prenant $p = -1$ et $s = m+1$, que la formule est vraie pour tout entier $m \leq -1$.

Si maintenant m est un réel négatif non entier, soit s entier tel que $m+s$ soit positif, alors, en prenant $p = m+s$, on en déduit que la formule est vraie pour m .

En intégrant la relation

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n ,$$

on obtient

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} ,$$

et en intégrant

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} ,$$

on obtient

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} .$$

Enfin, en écrivant

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2} (\ln(1+x) - \ln(1-x)) ,$$

on remarque que cette fonction est la partie impaire de $\ln(1+x)$ est donc, si $-1 < x < 1$,

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} .$$

□

Remarques : 1) la fonction qui a x dans $] -1, 1[$ associe $\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ est la fonction argument tangente hyperbolique. On note

$$\operatorname{argth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} ,$$

et l'on montre que c'est la fonction réciproque de la fonction tangente hyperbolique.

2) Les fonctions tangente et tangente hyperbolique admettent des développements en série à l'origine dont les coefficients ne sont pas simples et s'expriment en fonction de nombres appelés « nombres de Bernoulli ». Ces séries ne sont pas de rayon 1, mais $\pi/2$.

3) Les formules précédentes permettent de calculer les sommes de nombreuses séries entières, on pensera à utiliser la dérivation, la primitivation, la décomposition des fractions rationnelles en éléments simples pour se ramener aux séries connues.

11. L'exponentielle complexe

Nous avons vu que la série entière de coefficients $1/n!$ était de rayon infini. On peut alors définir pour tout nombre complexe z , l'exponentielle de z par

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} .$$

Nous allons retrouver à partir de cette définition que e^z vérifie bien les relations de l'exponentielle.

Pour tous nombres complexes z_1 et z_2 , on a

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2} .$$

En effet, comme la convergence est absolue, on peut effectuer le produit des séries donnant e^{z_1} et e^{z_2} , donc

$$e^{z_1} e^{z_2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{z_1^k}{k!} \frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!} \right) .$$

Mais en utilisant les coefficients binomiaux

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} ,$$

on a

$$\sum_{k=0}^n \frac{z_1^k}{k!} \frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k} = (z_1 + z_2)^n ,$$

d'où

$$e^{z_1} e^{z_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} = e^{z_1+z_2} .$$

□

Si $z = a + ib$ avec a et b réels, on a

$$e^z = e^a (\cos b + i \sin b) .$$

(Cette relation que l'on a utilisé jusqu'à présent comme une notation commode, prend ici tout son sens).

Si b est réel,

$$e^{ib} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ib)^n}{n!} .$$

Comme la convergence est absolue on peut sommer en séparant les termes de rang pair et ceux de rang impair. Alors

$$e^{ib} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ib)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ib)^{2n+1}}{(2n+1)!} .$$

Mais

$$(ib)^{2n} = (-1)^n b^{2n} \quad \text{et} \quad (ib)^{2n+1} = i(-1)^n b^{2n+1} ,$$

donc

$$e^{ib} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{b^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{b^{2n+1}}{(2n+1)!} ,$$

et en utilisant les séries entières de sinus et de cosinus

$$e^{ib} = \cos b + i \sin b .$$

Alors en utilisant la formule précédente

$$e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a (\cos b + i \sin b) .$$

□

On peut alors définir pour tout nombre complexe :

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} , \\ \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} , \\ \operatorname{ch} z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} , \\ \operatorname{sh} z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} , \end{aligned}$$

avec les relations

$$\operatorname{ch}(iz) = \cos z , \quad \operatorname{sh} iz = i \sin z , \quad \cos(iz) = \operatorname{ch} z , \quad \sin(iz) = i \operatorname{sh} z .$$

On remarquera que sur \mathbb{C} les fonctions sinus et cosinus ne sont pas bornées, puisque $\cos ib = \operatorname{ch} b$ et $|\sin ib| = \operatorname{sh} b$ tendent vers l'infini lorsque le nombre réel b tend vers l'infini. On peut donc avoir $\sin z = 2$ par exemple.

Les formules de trigonométrie classiques restent valables. Par exemple, quels que soient les nombres complexes z_1 et z_2

$$\begin{aligned} \cos(z_1 + z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 , \\ \sin(z_1 + z_2) &= \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1 . \end{aligned}$$

On obtient alors facilement les formules de trigonométrie hyperbolique correspondantes

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(z_1 + z_2) &= \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2 , \\ \operatorname{sh}(z_1 + z_2) &= \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_2 \operatorname{ch} z_1 . \end{aligned}$$

Cela permet en particulier d'obtenir les parties réelles et imaginaires de $\cos(a + ib)$ et $\sin(a + ib)$ lorsque a et b sont réels :

$$\cos(a + ib) = \cos a \operatorname{ch} b - i \sin a \operatorname{sh} b ,$$

et

$$\sin(a + ib) = \sin a \operatorname{ch} b + i \cos a \operatorname{sh} b .$$

Enfin, on peut définir la tangente et la tangente hyperbolique d'un nombre complexe (lorsque le dénominateur n'est pas nul),

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \quad \text{et} \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} .$$

On a alors

$$\tan iz = i \operatorname{th} z \quad \text{et} \quad \operatorname{th} iz = i \tan z ,$$

et là encore les formules de trigonométries restent valables. Par exemple

$$\tan(z_1 + z_2) = \frac{\tan z_1 + \tan z_2}{1 - \tan z_1 \tan z_2} .$$

Cherchons, par exemple, pour quelles valeurs de z , $\tan z$ a un sens, c'est-à-dire quand $\cos z \neq 0$. Si $z = a + ib$ avec a et b réel

$$\cos z = \cos(a + ib) = \cos a \cos ib - \sin a \sin ib = \cos a \operatorname{ch} b - i \sin a \operatorname{sh} b .$$

Cette expression est nulle si et seulement si

$$\cos a \operatorname{ch} b = 0 ,$$

et

$$\sin a \operatorname{sh} b = 0 .$$

comme $\operatorname{ch} b > 1$, la première équation devient $\cos a = 0$, et a pour solutions : $a = \pi/2 + k\pi$ avec k entier. Alors $\sin a$ n'est pas nul et la deuxième équation devient $\operatorname{sh} b = 0$ soit $b = 0$. Finalement $\tan z$ est définie pour $z \neq \pi/2 + k\pi$.

12. Résolution d'équations différentielles linéaires

Si l'on se donne une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont des polynômes, on peut chercher les solutions de cette équation qui se développent en série entière au voisinage de 0.

Prenons l'équation différentielle

$$u_s y^{(s)} + \dots + u_0 y = v ,$$

où u_0, \dots, u_s sont des polynômes et v une fonction développable en série entière de rayon r non nul sous la forme

$$v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n .$$

(En particulier v peut être un polynôme).

On cherche une solution y qui se développe sous la forme

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

méthode : on calcule les dérivées successives de y en dérivant terme à terme et on reporte dans le membre de gauche de l'équation. Après avoir regroupé les termes de même degré, ce membre se met sous la forme

$$u_s(x)y^{(s)}(x) + \cdots + u_0(x)y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n .$$

Les nombres A_k sont des combinaisons linéaires des coefficients a_k , faisant intervenir les coefficients des polynômes u_k . On identifie alors les deux séries entières, ce qui donne, pour tout $n \geq 0$ les relations

$$A_n = b_n ,$$

et fournit une relation de récurrence permettant de calculer les coefficients a_k de proche en proche. On s'assure que le rayon de convergence R de la série trouvée n'est pas nul. Cela fournit les solutions de l'équation dans un intervalle $] -t, t[$, où $t = \inf(r, R)$, développables en série entière au voisinage de 0. (Il peut y avoir d'autres solutions qui ne le sont pas).

Remarque : le calcul donne souvent une relation générale du type

$$g(a_{n+p}, \dots, a_n) = 0 ,$$

valable pour $n \geq n_0$, avec des relations particulières pour des valeurs de n inférieures à n_0 . Il faut faire soigneusement attention au domaine de validité des formules que l'on écrit.

Exemple : trouver les solutions de l'équation différentielle

$$xy''(x) + xy'(x) + y(x) = 1 ,$$

développable en série entière au voisinage de 0.

En dérivant deux fois, on a

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} ,$$

puis

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} .$$

Alors

$$xy''(x) + xy'(x) + y(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

d'où, en remarquant que $n a_n$ est nul si $n = 0$, et $n(n-1) a_n$ si $n = 1$,

$$xy''(x) + xy'(x) + y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

En changeant d'indice de sommation dans la première somme,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) a_{n+1} x^n ,$$

donc

$$xy''(x) + xy'(x) + y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n ,$$

ou encore

$$\sum_{n=0}^{\infty} [n(n+1) a_{n+1} + (n+1) a_n] x^n .$$

L'équation devient donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} [n(n+1)a_{n+1} + (n+1)a_n]x^n = 1 ,$$

et en identifiant terme à terme, on a $a_0 = 1$, et pour tout $n \geq 1$,

$$n(n+1)a_{n+1} + (n+1)a_n = 0 ,$$

soit, puisque $n+1$ n'est pas nul,

$$a_{n+1} = -\frac{a_n}{n} .$$

A ce stade on constate déjà que

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{n} ,$$

a pour limite 0. Donc la série est de rayon infini.

Par ailleurs, on montre facilement par récurrence que, si $n \geq 1$,

$$a_n = (-1)^{n-1} \frac{a_1}{(n-1)!} ,$$

d'où

$$y(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{a_1}{(n-1)!} x^n ,$$

ou encore en mettant xa_1 en facteur

$$y(x) = 1 + a_1 x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} ,$$

et en changeant d'indice de sommation

$$y(x) = 1 + a_1 x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} ,$$

ce qui donne finalement

$$y(x) = 1 + a_1 x e^{-x} .$$

On obtient ainsi toutes les solutions de l'équation développables en série entière au voisinage de 0. Ces solutions sont définies sur \mathbb{R} tout entier, et font intervenir un seul paramètre a_1 . Comme c'est une équation d'ordre 2, il y a d'autres solutions qui elles ne seront pas développables en série entière au voisinage de 0.

Remarque 1 : si les solutions obtenues ont un rayon de convergence fini non nul, et si l'on sait calculer la somme de la série, la fonction y trouvée est souvent la restriction d'une fonction Y définie sur \mathbb{R} tout entier, et il est alors facile de vérifier que Y satisfait l'équation sur \mathbb{R} et pas seulement sur $] -t, t [$.

Remarque 2 : si l'équation est une équation homogène du second ordre, les solutions de l'équation sont de la forme $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$, où α_1 et α_2 sont des constantes et y_1 et y_2 des solutions linéairement indépendantes.

- Lorsque la relation de récurrence obtenue lie a_{n+1} et a_n on n'obtient en général qu'une seule solution y_1 de l'équation différentielle développable en série entière au voisinage de 0. Une solution y_2 peut alors être obtenue par le procédé de variation de la constante, c'est-à-dire en cherchant une solution de la forme $y_2 = C y_1$, où C est une fonction également. En remplaçant dans l'équation différentielle, on obtient une équation différentielle linéaire d'ordre 1 vérifiée par C' . On calcule alors C' , puis C .
- Si la relation de récurrence lie a_{n+2} et a_n , on obtiendra en général deux solutions y_1 et y_2 développables en série entière en 0, l'une paire, et l'autre impaire.

Chapitre 4

INTEGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE

On expose dans ce chapitre la construction de l'intégrale d'une fonction à valeurs réelles due à Riemann qui permet de donner un sens précis à la notion d'aire d'un domaine \mathcal{D} limité par la courbe représentative d'une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$. L'idée de base est que l'on sait calculer l'aire d'un rectangle, et que l'on va approcher le domaine \mathcal{D} par des rectangles. On comprend que lorsque la fonction f est assez régulière, plus le nombre de rectangles est grand, plus on s'approchera de l'aire cherchée. On commence donc par étudier les fonctions dont la courbe représentative donne des rectangles. On définira ensuite les fonctions intégrables au sens de Riemann, et on montrera que les fonctions continues vérifient cette propriété. Nous nous limiterons ensuite à l'intégrale de ces fonctions continues.

1. Les fonctions en escalier

Quelques définitions

On appelle **subdivision** de l'intervalle $[a, b]$, un ensemble fini de points $\mathcal{X} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ tels que

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

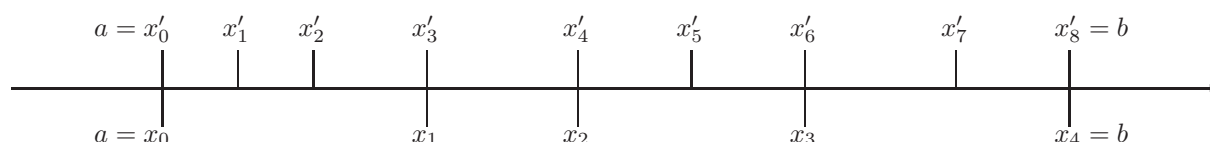
Le **pas** de la subdivision, sera le plus grand des nombres $x_k - x_{k-1}$, lorsque k est compris entre 1 et n .

Une subdivision \mathcal{X}' est dite **plus fine** que \mathcal{X} , si l'ensemble \mathcal{X}' contient \mathcal{X} . (plus fine = plus de points).

La pas de la subdivision \mathcal{X}' est donc plus petit que celui de \mathcal{X} .

Obtenir une subdivision plus fine que $\mathcal{X} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, revient à subdiviser les intervalles $[x_i, x_{i+1}]$.

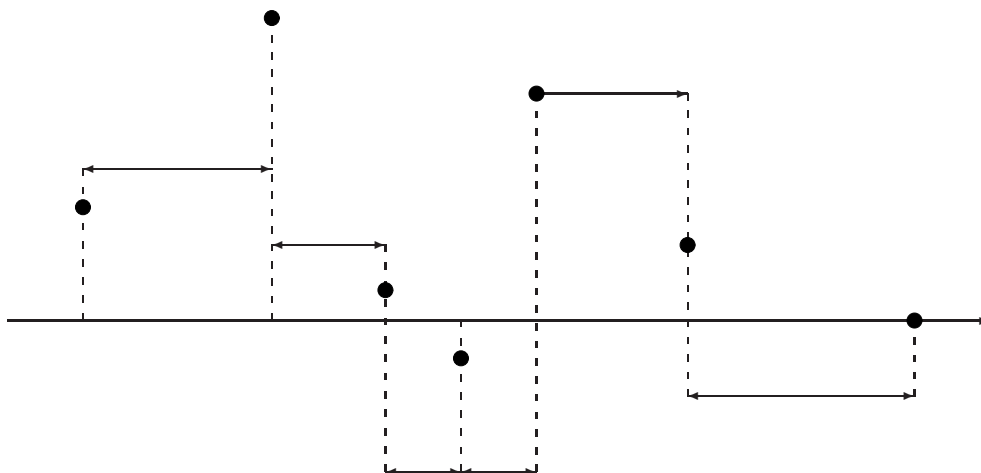
Exemple :



On appelle **fonction en escalier** une application définie sur un segment $[a, b]$ à valeurs réelles, pour laquelle il existe une subdivision $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ et un ensemble de nombres $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ tels que, pour k variant de 1 à n , la fonction soit constante sur l'intervalle $]x_{k-1}, x_k[$ et y prenne la valeur λ_k . (Aux points x_k la fonction peut prendre d'autres valeurs éventuellement).

On dira que la subdivision $\mathcal{X} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ est **adaptée** à la fonction en escalier f si f est constante sur chacun des intervalles $]x_{k-1}, x_k[$. Toute subdivision plus fine que \mathcal{X} est encore adaptée à f .

On notera $\mathcal{E}([a, b])$ l'ensemble des fonctions en escalier définies sur $[a, b]$.



Quelques propriétés des fonctions en escalier

- Une fonction en escalier est bornée, puisqu'elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs.
- Si f est une fonction en escalier sur $[a, b]$, et si λ est un nombre réel, alors λf est une fonction en escalier sur $[a, b]$, et une subdivision adaptée à f est aussi adaptée à λf . En effet, si f est constante sur $]x_{k-1}, x_k[$, il en est de même de λf .
- Si f et g sont des fonctions en escalier sur $[a, b]$, il en est de même de $f + g$. En effet, si \mathcal{X} et \mathcal{X}' sont des subdivisions adaptées à f et g respectivement, la subdivision $\mathcal{X} \cup \mathcal{X}' = \{x_0, \dots, x_n\}$ est adaptée à la fois à f et à g , et sur chacun des intervalles $]x_{k-1}, x_k[$, les fonctions f et g sont constantes, donc $f + g$ également et $\mathcal{X} \cup \mathcal{X}'$ est une subdivision adaptée à $f + g$.

En particulier $\mathcal{E}([a, b])$ est un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

Intégrale d'une fonction en escalier

Soit f une fonction en escalier définie sur $[a, b]$. Si $\mathcal{X} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ est une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f , et si, pour k compris entre 1 et n , on appelle λ_k la valeur prise par la fonction f sur l'intervalle $]x_{k-1}, x_k[$, on peut considérer la somme

$$\sigma = \sum_{k=1}^n \lambda_k (x_k - x_{k-1}) .$$

Remarquons que le nombre $|\lambda_k|(x_k - x_{k-1})$ est l'aire géométrique du rectangle de hauteur $|\lambda_k|$ et de base $x_k - x_{k-1}$. Le nombre σ représente donc l'aire algébrique du domaine délimité par la courbe représentative de f qui est formé d'une réunion finie de rectangles. Les aires des rectangles situés en dessous de l'axe des x sont comptées négativement.

Cette somme ne dépend pas de la subdivision adaptée à f choisie. Prendre une subdivision plus fine revient à décomposer les rectangles précédents en rectangles plus petits, et la somme reste inchangée. Cette somme ne dépend que de f , et sera notée

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx ,$$

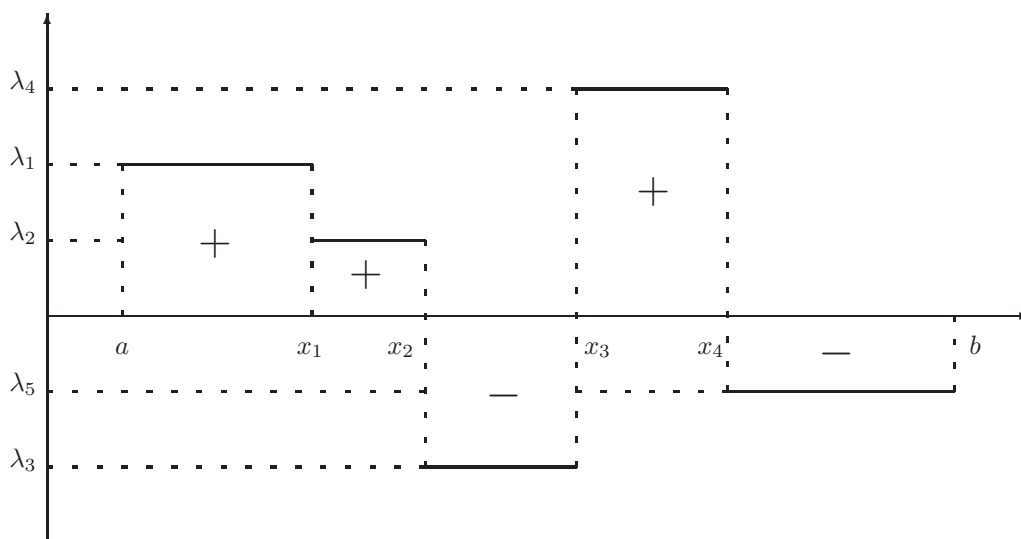
on l'appelle l'**intégrale** de f sur $[a, b]$.

Remarque : la lettre x figurant dans l'intégrale ci-dessus est ce que l'on appelle une **variable muette**. Elle peut être remplacée par une autre lettre, non encore utilisée. Par exemple

$$I(f) = \int_a^b f(t) dt \quad \text{ou} \quad I(f) = \int_a^b f(u) du .$$

Mais on ne pourra pas remplacer x par a ou b par exemple.

Dans la suite du texte nous utiliserons la notation I lorsque l'intégrale est prise sur $[a, b]$. Nous reviendrons à la notation intégrale lorsqu'il y aura plusieurs intervalles.



Quelques remarques :

1) Modifier la valeur de f en un nombre fini de points ne modifie pas la valeur de la somme. En particulier si $f(x) = 0$ sauf pour un nombre fini de valeurs de x , alors $I(f) = 0$.

2) Si f est la fonction caractéristique d'un intervalle de bornes c et d ($c < d$),

$$I(f) = d - c .$$

3) Si f est constante sur $[a, b]$ et vaut λ , alors

$$I(f) = \lambda(b - a) .$$

4) Si f est positive, alors $I(f)$ est positive, car tous les termes de la somme sont positifs

5) Si $a \leq c \leq b$, en introduisant le point c dans la subdivision, on a la relation de Chasles

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx .$$

(Avec la convention $\int_a^a f(x) dx = 0$).

Linéarité de I

Si f et g sont deux fonctions en escalier définies sur $[a, b]$, et si μ est un nombre réel, alors on a

$$I(f + g) = I(f) + I(g) \quad \text{et} \quad I(\mu f) = \mu I(f) .$$

L'application I est donc linéaire sur $\mathcal{E}([a, b])$.

On a vu que $f+g$ est une fonction en escalier, et que l'on peut prendre une subdivision $\mathcal{X} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ adaptée à la fois à f et à g qui sera alors une subdivision adaptée à $f + g$.

Si, sur l'intervalle $]x_{k-1}, x_k[$, on a $f(x) = \lambda_k$ et $g(x) = \mu_k$, alors, $(f + g)(x) = \lambda_k + \mu_k$ et par définition

$$I(f + g) = \sum_{k=1}^n (\lambda_k + \mu_k)(x_k - x_{k-1}) .$$

On obtient alors

$$I(f + g) = \sum_{k=1}^n \lambda_k (x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^n \mu_k (x_k - x_{k-1}) ,$$

c'est-à-dire

$$I(f + g) = I(f) + I(g) .$$

De même μf est une fonction en escalier, et vaut $\mu \lambda_k$ sur $]x_{k-1}, x_k[$, d'où

$$I(\mu f) = \sum_{k=1}^n (\mu \lambda_k)(x_k - x_{k-1}) = \mu \sum_{k=1}^n \lambda_k (x_k - x_{k-1}) = \mu I(f) .$$

□

Conséquence : si $f \leq g$, alors $I(f) \leq I(g)$, car

$$I(g) - I(f) = I(g - f) \geq 0 .$$

2. Fonctions intégrables au sens de Riemann

Toutes les fonctions envisagées désormais sont des fonctions à valeurs réelles définies sur un segment $[a, b]$ et **bornées** sur cet intervalle.

Pour une fonction bornée, il existe donc un nombre M , tel que, pour tout x de $[a, b]$, on ait

$$-M \leq f(x) \leq M .$$

Notons

$$\mathcal{I}_+(f) = \{I(G) \mid G \in \mathcal{E}([a, b]) , G \geq f\} .$$

Cet ensemble n'est pas vide car il contient $I(M) = M(b - a)$. D'autre part, si G est une fonction en escalier telle que $G \geq f$, on a aussi $G \geq -M$, et donc

$$I(G) \geq -M(b - a) .$$

L'ensemble $\mathcal{I}_+(f)$ est donc minoré. Il possède une borne inférieure. On note $I_+(f)$ cette borne inférieure, qui est appelée **intégrale supérieure** de f .

De même, si l'on pose

$$\mathcal{I}_-(f) = \{I(g) \mid g \in \mathcal{E}([a, b]) , \ g \leq f\} ,$$

le même raisonnement montre que cet ensemble n'est pas vide et est majoré (par $M(b-a)$). Sa borne supérieure existe. On note $I_-(f)$ cette borne supérieure, qui est appelée **intégrale inférieure** de f . Donc

$$\mathcal{I}_+(f) = \inf_{\substack{G \in \mathcal{E}([a, b]) \\ G \geq f}} I(G) \quad \text{et} \quad \mathcal{I}_-(f) = \sup_{\substack{g \in \mathcal{E}([a, b]) \\ g \leq f}} I(g) .$$

Remarquons en particulier, que si $g \leq f \leq G$, et si g et G sont en escalier, alors $I(g) \leq I(G)$, donc $I(G)$ majore $\mathcal{I}_-(f)$, et il en résulte que

$$I_-(f) \leq I(G) .$$

Mais cela signifie que $I_-(f)$ minore $\mathcal{I}_+(f)$, donc

$$I_-(f) \leq I_+(f) .$$

Enfin, si f est une fonction en escalier, $I(f)$ appartient à $\mathcal{I}_-(f)$ et est un majorant de cet ensemble, il appartient aussi à $\mathcal{I}_+(f)$ et est un minorant de cet ensemble, donc

$$I(f) = I_+(f) = I_-(f) .$$

On dira qu'une fonction f est **intégrable au sens de Riemann** ou **Riemann-intégrable**, si l'on a $I_+(f) = I_-(f)$. On notera alors

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx ,$$

la valeur commune.

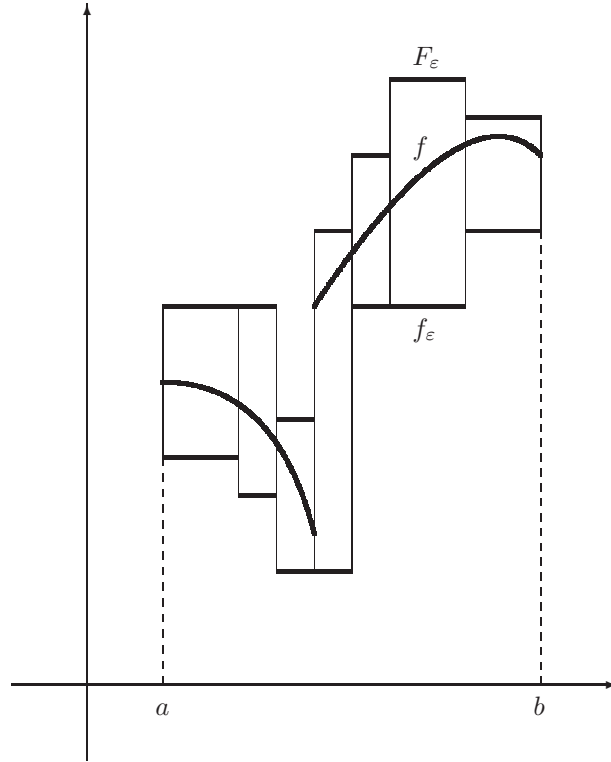
En particulier, d'après ce qui précède, une fonction en escalier est Riemann-intégrable.

Critères d'intégrabilité

En revenant à la définition de la borne inférieure et de la borne supérieure, on peut donner divers critères équivalents pour montrer l'intégrabilité.

Une fonction bornée f est Riemann-intégrable, si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver, des fonctions en escalier f_ε et F_ε , telles que $f_\varepsilon \leq f \leq F_\varepsilon$ et

$$\int_a^b (F_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x)) dx \leq \varepsilon .$$



Sur le dessin précédent l'intégrale $I(F_\varepsilon - f_\varepsilon)$ est l'aire des rectangles limités par les courbes représentatives des fonctions en escalier F_ε et f_ε . Cette aire est inférieure à ε .

Donnons nous $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne supérieure, il existe F_ε en escalier majorant f telle que

$$I_+(f) \leq I(F_\varepsilon) \leq I_+(f) + \frac{\varepsilon}{2} .$$

Par définition de la borne inférieure, il existe f_ε en escalier minorant f telle que

$$I_-(f) - \frac{\varepsilon}{2} \leq I(f_\varepsilon) \leq I_-(f) .$$

On en déduit

$$0 \leq I(F_\varepsilon) - I(f_\varepsilon) \leq I_+(f) + \frac{\varepsilon}{2} - \left(I_-(f) - \frac{\varepsilon}{2} \right) .$$

Donc, si f est Riemann-intégrable,

$$I(F_\varepsilon - f_\varepsilon) = I(F_\varepsilon) - I(f_\varepsilon) \leq \varepsilon .$$

Réciproquement, si l'on peut trouver, pour tout $\varepsilon > 0$ des fonctions en escalier f_ε et F_ε , telles que $f_\varepsilon \leq f \leq F_\varepsilon$ et

$$\int_a^b (F_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x)) dx \leq \varepsilon ,$$

on a en particulier, quel que soit ε

$$I(f_\varepsilon) \leq I_-(f) \leq I_+(f) \leq I(F_\varepsilon) ,$$

donc

$$0 \leq I_+(f) - I_-(f) \leq I(F_\varepsilon - f_\varepsilon) \leq \varepsilon .$$

On en déduit que $I_+(f) - I_-(f) = 0$, donc que f est Riemann-intégrable. \square

On peut donner une version de ce critère en terme de suites :

Une fonction bornée f est Riemann-intégrable, si et seulement si, on peut trouver, deux suites $(f_n)_{n \geq 0}$ et $(F_n)_{n \geq 0}$ de fonctions en escalier, telles que, pour tout entier n on ait $f_n \leq f \leq F_n$ et vérifiant

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (F_n(x) - f_n(x)) dx = 0 .$$

Dans ce cas

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b F_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx .$$

Si f est Riemann-intégrable, prenons $\varepsilon = 1/n$. Donc, on peut trouver, des fonctions en escalier f_n et F_n , telles que $f_n \leq f \leq F_n$ et

$$0 \leq \int_a^b (F_n(x) - f_n(x)) dx \leq \frac{1}{n} .$$

Le théorème d'encadrement permet de conclure que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (F_n(x) - f_n(x)) dx = 0 .$$

Réciproquement, si l'on a obtenu deux telles suites, et si l'on se donne $\varepsilon > 0$, en prenant $n \geq 1/\varepsilon$, on obtient deux fonctions satisfaisant les hypothèses du critère précédent.

Enfin

$$0 \leq I(f) - I(f_n) \leq I(F_n) - I(f_n) \quad \text{et} \quad 0 \leq I(F_n) - I(f) \leq I(F_n) - I(f_n) .$$

On déduit du théorème d'encadrement que

$$I(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b F_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx .$$

□

Linéarité de l'intégrale de Riemann

L'ensemble des fonctions numériques définies sur $[a, b]$ et intégrables au sens de Riemann est un espace vectoriel et l'application qui à une fonction associe son intégrale est linéaire.

Soit f et g intégrables au sens de Riemann. Il existe alors quatre suites de fonctions en escaliers (f_n) , (F_n) , (g_n) , (G_n) telles que, pour tout entier n

$$f_n \leq f \leq F_n \quad \text{et} \quad g_n \leq g \leq G_n ,$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I(F_n - f_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} I(G_n - g_n) = 0 .$$

Alors

$$f_n + g_n \leq f + g \leq F_n + G_n ,$$

Les fonctions $f_n + g_n$ et $F_n + G_n$ sont en escalier, et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I((F_n + G_n) - (f_n + g_n)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} I(F_n - f_n) + \lim_{n \rightarrow +\infty} I(G_n - g_n) = 0 .$$

Il en résulte que $f + g$ est Riemann-intégrable, et que

$$I(f + g) = \lim_{n \rightarrow +\infty} I(f_n + g_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} I(f_n) + \lim_{n \rightarrow +\infty} I(g_n) = I(f) + I(g) .$$

Si λ est un nombre réel positif, on a

$$\lambda f_n \leq \lambda f \leq \lambda F_n ,$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I((\lambda F_n) - (\lambda f_n)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda(I(F_n - f_n)) = 0 ,$$

donc λf est Riemann-intégrable et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I(\lambda f_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} I(f_n) = \lambda I(f) .$$

Si λ est un nombre réel négatif, on a

$$\lambda F_n \leq \lambda f \leq \lambda f_n ,$$

et la conclusion subsiste encore. □

Positivité et croissance de l'intégrale de Riemann

Si f est Riemann-intégrable et positive, alors $I(f) \geq 0$.

En effet $I(0) = 0$ appartient alors à $\mathcal{I}_-(f)$, donc $I_-(f) = I(f)$ est positif. □

Remarque : une fonction qui est nulle sauf en un nombre fini de points est telle que son intégrale soit nulle.

On en déduit la croissance de I :

Si f et g sont deux fonctions Riemann-intégrables sur $[a, b]$, alors si $f \leq g$, on a $I(f) \leq I(g)$.

On a en effet $g - f \geq 0$, donc $I(g - f) \geq 0$, mais

$$I(g - f) = I(g) - I(f) ,$$

donc

$$I(f) \leq I(g) .$$

□

Restriction d'une fonction Riemann-intégrable.

Soit f définie sur $[a, b]$ et Riemann-intégrable. Soit $[c, d]$ un intervalle inclus dans $[a, b]$. Alors la restriction de f à $[c, d]$ est Riemann-intégrable.

Si de plus f est positive, alors

$$\int_c^d f(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx .$$

Si l'on a $f_n \leq f \leq F_n$ où f_n et F_n sont en escalier et où $I(F_n - f_n)$ tend vers zéro, alors,

$$(f_n)_{/I} \leq f_{/I} \leq (F_n)_{/I} ,$$

et les restrictions à I de f_n et F_n sont en escalier sur I .

D'autre part la fonction $F_n - f_n$ étant en escalier et positive, on a

$$0 \leq \int_c^d (F_n - f_n)(x)dx \leq \int_a^b (F_n - f_n)(x)dx .$$

(En prenant une subdivision de $[a, b]$ contenant c et d , la somme définissant l'intégrale de droite, contient celle définissant l'intégrale de gauche, plus des termes positifs). Il résulte du théorème d'encadrement que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_c^d (F_n - f_n)(x)dx = 0 .$$

donc la restriction de f à $[c, d]$ est Riemann-intégrable.

Si f est positive, on peut choisir f_n positive, alors

$$0 \leq \int_c^d f_n(x)dx \leq \int_a^b f_n(x)dx ,$$

et par passage à la limite

$$0 \leq \int_c^d f(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx .$$

□

Relation de Chasles

Soit f une fonction numérique définie sur $[a, b]$, et $a \leq c \leq b$. La fonction f est Riemann-intégrable si et seulement si ses restrictions $f_{/[a, c]}$ et $f_{/[c, b]}$, sont Riemann-intégrables, et alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

(Avec la convention $\int_a^a f(x)dx = 0$).

Si f est Riemann-intégrable il résulte du paragraphe précédent que ses restrictions à $[a, c]$ et $[c, b]$ le sont aussi.

Montrons la réciproque. On choisit quatre suites de fonctions en escaliers (f_n) , (F_n) , (g_n) , (G_n) telles que, pour tout entier n et pour tout x de $[a, c]$,

$$f_n(x) \leq f(x) \leq F_n(x) ,$$

et pour tout x de $[c, b]$,

$$g_n(x) \leq f(x) \leq G_n(x) .$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^c (F_n - f_n)(x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_c^b (G_n - g_n)(x)dx = 0 .$$

Alors on définit deux fonctions en escalier Φ et φ en posant

$$\Phi_n(x) = \begin{cases} F_n(x) & \text{si } a \leq x \leq c \\ G_n(x) & \text{si } c < x \leq b \end{cases} \quad \text{et} \quad \varphi_n(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{si } a \leq x \leq c \\ g_n(x) & \text{si } c < x \leq b \end{cases} .$$

On a, sur $[a, b]$

$$\varphi_n \leq f \leq \Phi_n ,$$

et, en appliquant la relation de Chasles à la fonction en escalier $\Phi_n - \varphi_n$,

$$\int_a^b (\Phi_n - \varphi_n)(x)dx = \int_a^c (F_n - f_n)(x)dx + \int_c^b (G_n - g_n)(x)dx ,$$

et il résulte du théorème sur les limites d'une somme que cette expression converge vers 0. On en déduit que f est Riemann-intégrable. De plus, en utilisant la relation de Chasles pour les fonctions en escalier

$$\int_a^b \Phi_n(x)dx = \int_a^c F_n(x)dx + \int_c^b G_n(x)dx ,$$

et par passage à la limite

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

□

3. Continuité uniforme

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et continue sur I . Alors pour tout x dans I , quel que soit le nombre réel $\varepsilon > 0$ que l'on se donne, il existe donc un nombre réel $\alpha > 0$ tel que pour tout y de I vérifiant $|x - y| < \alpha$, on ait $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

Le réel α dépend *a priori* de x (et de ε bien sûr) et en général il n'est pas possible de trouver un réel α ne dépendant que de ε et qui conviendrait pour tout choix de x dans I . Lorsque tel est le cas cependant, on dit que f est uniformément continue sur I .

Autrement dit, f est **uniformément continue** sur I lorsque

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \alpha > 0) (\forall (x, y) \in I^2) (|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon) .$$

L'uniforme continuité traduit donc le fait que si x et y sont pris suffisamment proches (en un sens qui ne dépend pas de x et de y), leurs images ne sauraient être trop éloignées l'une de l'autre.

Une fonction uniformément continue sur un intervalle est bien sûr continue sur cet intervalle.

La réciproque est fausse. Par exemple la fonction $x \rightarrow x^2$ est continue sur \mathbb{R} sans y être uniformément continue.

Cependant, nous avons le résultat suivant :

Théorème de HEINE

Toute fonction continue sur un segment $[a, b]$ est uniformément continue sur $[a, b]$.

Nous montrons ce résultat par l'absurde. Pour cela nous supposons que f n'est pas uniformément continue sur $[a, b]$. Il existe donc $\varepsilon > 0$, tel que, pour tout $n > 0$, on puisse trouver $x_n \in [a, b]$ et $x'_n \in [a, b]$ vérifiant

$$|x'_n - x_n| \leq \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad |f(x'_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon .$$

Nous construisons ainsi deux suites $(x_n)_{n \geq 0}$ et $(x'_n)_{n \geq 0}$ qui sont bornées. D'après la propriété de Bolzano-Weierstrass, nous pouvons extraire de la suite $(x_n)_{n \geq 0}$, une suite $(x_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ qui converge vers une limite, notée ℓ et $\ell \in [a, b]$. Comme nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_{\varphi(n)} - x'_{\varphi(n)}| \leq \frac{1}{\varphi(n)+1}$, la suite extraite $(x'_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ converge aussi vers la même limite ℓ .

Puisque f est continue en ℓ , les suites $(f(x_{\varphi(n)}))_{n \geq 0}$ et $(f(x'_{\varphi(n)}))_{n \geq 0}$ convergent toutes les deux vers $f(\ell)$. Il existe donc q dans \mathbb{N} et q' dans \mathbb{N} tels que

$$\forall n \geq q, \quad |f(x_{\varphi(n)}) - f(\ell)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{et} \quad \forall n \geq q', \quad |f(x'_{\varphi(n)}) - f(\ell)| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Si $n \geq \max(q, q')$, nous avons alors

$$|f(x_{\varphi(n)}) - f(x'_{\varphi(n)})| \leq |f(x_{\varphi(n)}) - f(\ell)| + |f(x'_{\varphi(n)}) - f(\ell)| < \varepsilon ,$$

ce qui est contradictoire. □

Comme exemple de fonctions uniformément continues sur un intervalle I , on peut donner les fonctions vérifiant la propriété suivante :

Si f est définie sur I et s'il existe un nombre réel k positif, tel que

$$(\forall (x, y) \in I^2) (|f(x) - f(y)| \leq k |x - y|) ,$$

alors f est uniformément continue sur I .

Si l'on se donne $\varepsilon > 0$, et si $k \neq 0$, il suffit de prendre $\alpha = \varepsilon/k$ pour que soit satisfaite la propriété de définition de la continuité uniforme. Si $k = 0$, la fonction est constante et on peut prendre n'importe quel α □

Par exemple les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto |x|$ sont uniformément continue sur \mathbb{R} ($k = 1$).

4. Intégration des fonctions continues

Toute fonction numérique continue sur $[a, b]$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$.

La fonction f étant continue sur le segment $[a, b]$ elle est bornée et uniformément continue sur cet intervalle. Soit n un entier strictement positif. il existe $\alpha > 0$ tel que $|x - y| < \alpha$, implique

$$|f(x) - f(y)| < \frac{1}{n}.$$

Choisissons p entier tel que $p > (b - a)/\alpha$, et posons, si $0 \leq k \leq p$,

$$x_k = a + k \frac{b - a}{p}.$$

On obtient ainsi une subdivision $\{x_0, x_1, \dots, x_p\}$ de $[a, b]$, telle que

$$x_k - x_{k-1} = \frac{b - a}{p}.$$

Par ailleurs, sur $[x_{k-1}, x_k]$ la fonction continue f atteint sa borne supérieure en un point ξ_k et sa borne inférieure en un point ζ_k .

On définit deux fonctions en escalier f_n et F_n en posant, si x appartient à $[x_{k-1}, x_k]$

$$F_n(x) = f(\xi_k) \quad \text{et} \quad f_n(x) = f(\zeta_k),$$

et

$$F_n(b) = f_n(b) = f(b).$$

On a alors

$$f_n \leq f \leq F_n.$$

Comme ξ_k et ζ_k appartiennent à l'intervalle $[x_{k-1}, x_k]$, on a

$$|\xi_k - \zeta_k| \leq \frac{b - a}{p} < \alpha,$$

et donc

$$0 \leq f(\xi_k) - f(\zeta_k) \leq \frac{1}{n}.$$

Alors

$$0 \leq I(F_n - f_n) = \sum_{k=1}^p (f(\xi_k) - f(\zeta_k)) \frac{b - a}{p} \leq \sum_{k=1}^p \frac{1}{n} \frac{b - a}{p} = \frac{b - a}{n}.$$

Cette suite converge donc vers zéro, et il en résulte que f est Riemann-intégrable. \square

Bien qu'il soit possible d'énoncer beaucoup des résultats suivants dans le cadre des fonctions Riemann-intégrables, nous nous contenterons de les donner pour des fonctions continues, ce qui simplifie notablement les démonstrations.

Si f est continue, il en est de même de $|f|$, et

$$|I(f)| \leq I(|f|) .$$

Puisque

$$-|f| \leq f \leq |f| ,$$

on en déduit

$$-I(|f|) = I(-|f|) \leq I(f) \leq I(|f|) ,$$

ou encore, puisque $I(|f|)$ est positif

$$|I(f)| \leq I(|f|) .$$

□

Inégalité de la moyenne : si f est continue

$$|I(f)| \leq (b-a) \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)| .$$

Si M désigne un majorant de $|f|$, on a

$$|f| \leq M ,$$

donc

$$|I(f)| \leq I(|f|) \leq I(M) = M(b-a) .$$

□

5. Intégrale indéfinie

Une notation universelle

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, et si c et d sont dans $[a, b]$, on pose, si $c > d$,

$$\int_c^d f(x)dx = - \int_d^c f(x)dx .$$

Avec cette convention, on voit facilement que l'on a, quels que soient u, v, w dans $[a, b]$ la relation de Chasles :

$$\int_u^w f(x)dx = \int_u^v f(x)dx + \int_v^w f(x)dx ,$$

ou encore

$$\int_u^w f(x)dx - \int_u^v f(x)dx = \int_v^w f(x)dx .$$

On peut également généraliser l'inégalité de la moyenne de la manière suivante :

si M est un majorant de $|f|$, et si c et d sont inclus dans $[a, b]$

$$\left| \int_c^d f(t) dt \right| \leq M|d - c| .$$

En effet, si $c > d$, on a

$$\left| \int_c^d f(t) dt \right| = \left| \int_d^c f(t) dt \right| \leq M(c - d) = M|d - c| ,$$

et si $c < d$,

$$\left| \int_c^d f(t) dt \right| \leq (d - c) = M|d - c| .$$

Définition de l'intégrale indéfinie

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Si c appartient à $[a, b]$, on définit une fonction F sur $[a, b]$ en posant

$$F(x) = \int_c^x f(t) dt .$$

Cette intégrale est appelée **intégrale indéfinie** de f . On a alors le théorème fondamental du calcul intégral :

Soit f est une fonction continue sur $[a, b]$, alors la fonction F définie sur $[a, b]$ en posant

$$F(x) = \int_c^x f(t) dt ,$$

est dérivable sur $[a, b]$ et, pour tout x_0 de $[a, b]$, on a

$$F'(x_0) = f(x_0) .$$

Soit x_0 dans $[a, b]$. On va montrer que la différence

$$\delta(x) = \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) ,$$

tend vers 0, lorsque x tend vers x_0 , ce qui signifiera que F est dérivable en x_0 et que $F'(x_0) = f(x_0)$.

Pour cela évaluons

$$(x - x_0)\delta(x) = F(x) - F(x_0) - (x - x_0)f(x_0) .$$

Tout d'abord, par la relation de Chasles,

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t) dt ,$$

mais aussi

$$(x - x_0)f(x_0) = \int_{x_0}^x f(x_0) dt ,$$

donc

$$F(x) - F(x_0) - (x - x_0)f(x_0) = \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt .$$

Si f est continue en x_0 , quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$, tel que, si $|x - x_0| < \alpha$, et si x appartient à $[a, b]$ on ait

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon .$$

Alors si t est compris entre x et x_0 , on a $|t - x_0| < \alpha$ et

$$|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon .$$

Il résulte de l'inégalité de la moyenne que

$$\left| \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt \right| \leq \varepsilon |x - x_0| .$$

Donc, en divisant par $|x - x_0|$,

$$|\delta(x)| < \varepsilon .$$

En résumé, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$, tel que, si $|x - x_0| < \alpha$, et si x appartient à $[a, b]$ on ait

$$|\delta(x)| < \varepsilon .$$

Cela signifie que $\delta(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers x_0 d'où le résultat voulu. \square

Conséquences :

1) toute fonction f continue sur $[a, b]$, possède une primitive dans cet intervalle.

2) Formule de Newton-Leibniz : pour toute primitive G de f dans $[a, b]$, on a

$$\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a) .$$

3) si f est de classe C^1 , il résulte alors de ce qui précède que

$$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a) .$$

La fonction F construite précédemment est bien une primitive de f . Si G est une autre primitive, la fonction $G - F$ est constante sur $[a, b]$. Donc, il existe une constante k telle que $G = F + k$ et

$$G(b) - G(a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx .$$

\square

On notera de manière générale

$$G(b) - G(a) = \left[G(x) \right]_a^b.$$

Exemple : Trouver la dérivée de la fonction G définie sur \mathbb{R}^+ par $G(x) = \int_{2x}^{x^2+1} \sqrt{1+t^3} dt$.

Si $f(x) = \sqrt{1+t^3}$, on note F une primitive de f sur \mathbb{R}^+ . Alors $G(x) = F(x^2+1) - F(2x)$, et en dérivant

$$G'(x) = 2xF'(x^2+1) - 2F'(2x) = 2x\sqrt{1+(x^2+1)^3} - 2\sqrt{1+8x^3}.$$

6. Intégrale d'une fonction continue positive

Soit f une fonction positive continue sur $[a, b]$. Si

$$\int_a^b f(x) dx = 0,$$

alors f est la fonction constante nulle.

Considérons la fonction F définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

C'est une fonction dérivable, et $F' = f \geq 0$. Donc F est croissante. Mais $F(a) = F(b) = 0$. Donc la fonction F est constante. Alors $F' = f = 0$. \square

7. Sommes de Riemann

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Alors, quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver un nombre $\alpha > 0$, pour lequel on a la propriété suivante : pour toute subdivision $\mathcal{X} = \{x_0, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$ de pas strictement inférieur à α , et tout ensemble $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ de nombres tels que, si $1 \leq i \leq n$, on a $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, alors

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| < \varepsilon.$$

La somme $\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ est appelée **somme de Riemann**.

D'une manière plus concise, mais incorrecte, on dit que les sommes de Riemann tendent vers $I(f)$, lorsque le pas de la subdivision tend vers 0.

En écrivant

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(\xi_k) dx ,$$

et

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx ,$$

on a donc

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| = \left| \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(\xi_k)) dx \right| ,$$

et donc,

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| \leq \sum_{k=1}^n \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(\xi_k)) dx \right| \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x) - f(\xi_k)| dx .$$

Par ailleurs, pour tout k compris entre 1 et n , et tout x de $[x_{k-1}, x_k]$, on a

$$|x - \xi_k| \leq |x_k - x_{k-1}| < \alpha .$$

Comme f est continue sur $[a, b]$, elle est uniformément continue. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$, tel que $|x - y| < \alpha$ implique

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{b - a} .$$

Alors, dans ces conditions

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| < \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{\varepsilon}{b - a} dx = \varepsilon .$$

□

On en déduit immédiatement, en prenant la subdivision telle que $x_k = a + k(b - a)/n$, et $\xi_k = x_k$ ou $\xi_k = x_{k-1}$, le résultat suivant :

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Alors les suites $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right)_{n \geq 1}$ et $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right)_{n \geq 1}$ convergent vers $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$. Cette limite est la **valeur moyenne** de la fonction f sur $[a, b]$.

On applique en général ces formules dans le cas où $[a, b] = [0, 1]$ ce qui donne dans ce cas

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx .$$

8. Inégalités de Schwarz et de Minkowski

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$. Alors on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \left(\int_a^b f(x)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b g(x)^2 dx \right)^{1/2}.$$

Et l'égalité a lieu si et seulement si les fonctions f et g sont colinéaires.

Considérons l'expression

$$P(\lambda) = I((\lambda f + g)^2).$$

C'est l'intégrale d'une fonction positive. Donc $P(\lambda) \geq 0$.

En développant, et en utilisant la linéarité de I

$$P(\lambda) = \lambda^2 I(f^2) + 2\lambda I(fg) + I(g^2).$$

Si $I(f^2) \neq 0$, le polynôme $P(\lambda)$ est un trinôme du second degré toujours positif. Donc son discriminant est négatif, et

$$I(fg)^2 - I(f^2)I(g^2) \geq 0,$$

on en déduit que

$$|I(fg)| \leq I(f^2)^{1/2} I(g^2)^{1/2},$$

ce qui donne l'inégalité voulue.

Si $I(f^2) = 0$, alors, quel que soit λ ,

$$2\lambda I(fg) + I(g^2) \geq 0,$$

ce qui implique $I(fg) = 0$, dans ce cas on a égalité.

Si les fonctions f et g sont colinéaires, et si f n'est pas nulle, il existe λ tel que $\lambda f + g = 0$. Dans ce cas $I((\lambda f + g)^2) = 0$. Le trinôme est toujours positif mais s'annule, ce qui signifie que son discriminant est nul. On a alors égalité dans l'inégalité de Schwarz.

Réciproquement, si l'on a égalité, distinguons deux cas :

1) Si $I(f^2)$ n'est pas nulle, l'égalité

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| = \left(\int_a^b f(x)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b g(x)^2 dx \right)^{1/2},$$

signifie que le trinôme

$$P(\lambda) = I((\lambda f + g)^2),$$

possède un discriminant nul, donc une racine double λ_0 . Alors

$$I((\lambda_0 f + g)^2) = 0,$$

et comme la fonction $(\lambda_0 f + g)^2$ est continue, on en déduit qu'elle est nulle donc que $g = -\lambda_0 f$, ce qui montre que f et g sont colinéaires.

2) Si $I(f^2) = 0$, alors f^2 est nulle donc f aussi. Là encore f et g sont colinéaires. □

De cette inégalité on déduit l'inégalité de Minkowski :

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$. Alors

$$\left(\int_a^b (f(x) + g(x))^2 dx \right)^{1/2} \leq \left(\int_a^b f(x)^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_a^b g(x)^2 dx \right)^{1/2} .$$

En prenant $\lambda = 1$ dans la démonstration précédente,

$$I((f + g)^2) = I(f^2) + 2I(fg) + I(g^2) .$$

Mais d'après l'inégalité de Schwarz

$$I(fg) \leq I(f^2)^{1/2} I(g^2)^{1/2} .$$

Donc

$$I((f + g)^2) \leq I(f^2) + 2I(f^2)^{1/2} I(g^2)^{1/2} + I(g^2) = (I(f^2)^{1/2} + I(g^2)^{1/2})^2 .$$

ce qui donne l'inégalité voulue. \square

9. Changement de variable pour les fonctions continues

Soit φ une fonction de $[\alpha, \beta]$ dans \mathbb{R} de classe C^1 .

Soit f une fonction continue sur $[a, b] = \varphi([\alpha, \beta])$.

Alors

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f \circ \varphi(t) \varphi'(t) dt .$$

Remarquons que $\varphi([\alpha, \beta])$ est un segment, puisque φ est continue sur un segment.

Soit F définie sur $[a, b]$ par

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt .$$

On a donc $F' = f$. Par ailleurs, comme $f \circ \varphi \varphi' = F' \circ \varphi \varphi'$ est la dérivée de $F \circ \varphi$, on a

$$\int_{\alpha}^{\beta} f \circ \varphi(t) \varphi'(t) dt = F \circ \varphi(\beta) - F \circ \varphi(\alpha) .$$

Mais

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) .$$

On a donc égalité. \square

Exemple : pour toute f fonction continue sur $[0, 1]$,

$$\int_0^{\pi} f(\sin t) \cos t dt = 0 .$$

En effet, en appliquant la formule, avec $\varphi(t) = \sin t$, on obtient

$$\int_0^{\pi} f(\sin t) \cos t \, dt = \int_{\sin 0}^{\sin \pi} f(x) \, dx = 0 .$$

En pratique : pour calculer une intégrale $\int_a^b f(x) dx$ en utilisant le changement de variable $x = \varphi(t)$ où φ

est une bijection de classe C^1 , il faut effectuer les trois changements suivants :

- 1) remplacer x par $\varphi(t)$
- 2) remplacer dx par $\varphi'(t) dt$
- 3) remplacer a et b par $\varphi^{-1}(a)$ et $\varphi^{-1}(b)$ respectivement, ce qui revient à dire que lorsque $x = a$ alors $t = \varphi^{-1}(a)$, et lorsque $x = b$ alors $t = \varphi^{-1}(b)$;

Exemple : Calculer $I = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$, avec le changement de variable $x = \tan t$.

On a $dx = (1 + \tan^2 t) dt$. Lorsque $x = 0$, alors $t = \arctan 0 = 0$ et lorsque $x = 1$, alors $t = \arctan 1 = \pi/4$.
Donc

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{(1 + \tan^2 t)^2} (1 + \tan^2 t) \, dt = \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{1 + \tan^2 t} = \int_0^{\pi/4} \cos^2 t \, dt = \int_0^{\pi/4} \frac{1 + \cos 2t}{2} \, dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} .$$

Applications :

Soit f une fonction continue sur $[-a, a]$.

Si f est impaire

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 0 .$$

Si f est paire

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx .$$

Calculons $\int_{-a}^0 f(x) \, dx$ en effectuant le changement de variable $\varphi(t) = -t$ qui est une bijection de classe C^1 de $[0, a]$ sur $[-a, 0]$. On a $\varphi'(t) = -1$, donc

$$\int_{-a}^0 f(t) \, dt = \int_a^0 f(-x)(-1) \, dx = \int_0^a f(-x) \, dx .$$

Si f est impaire $f(-x) = -f(x)$, donc

$$\int_{-a}^0 f(t) \, dt = - \int_0^a f(x) \, dx .$$

Alors

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = \int_{-a}^0 f(t) \, dt + \int_0^a f(x) \, dx = 0 .$$

Si f est paire $f(-x) = f(x)$, donc

$$\int_{-a}^0 f(t) dt = \int_0^a f(x) dx .$$

Alors

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(t) dt + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx .$$

□

Soit f une fonction continue périodique de période T , définie sur \mathbb{R} . Alors la fonction F définie sur \mathbb{R} par

$$F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) dx ,$$

est constante. De plus, pour tout entier n ,

$$\int_0^{nT} f(x) dx = n \int_0^T f(x) dx .$$

Si l'on écrit

$$F(\alpha) = \int_0^{\alpha+T} f(x) dx - \int_0^{\alpha} f(x) dx ,$$

on obtient en dérivant

$$F'(\alpha) = f(\alpha + T) - f(\alpha) = 0 .$$

Donc F est une fonction constante.

Alors, si $n > 0$,

$$\int_0^{nT} f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kT}^{(k+1)T} f(x) dx .$$

Mais

$$\int_{kT}^{(k+1)T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx ,$$

donc

$$\int_0^{nT} f(x) dx = n \int_0^T f(x) dx .$$

Si $n < 0$, posons $n' = -n$

$$\int_0^{nT} f(x) dx = - \int_{-n'T}^0 f(x) dx = - \sum_{k=0}^{n'-1} \int_{(k+1)(-T)}^{k(-T)} f(x) dx .$$

Mais

$$\int_{(k+1)(-T)}^{k(-T)} f(x) dx = \int_{(k+1)(-T)}^{(k+1)(-T)+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx ,$$

et

$$\int_0^{nT} f(x) dx = -n' \int_0^T f(x) dx ,$$

ce qui redonne la formule voulue. \square

10. Intégration par parties

Soit u et v deux fonctions de classe C^1 définies sur $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = \left[u(x)v(x) \right]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx .$$

En partant de la relation

$$(uv)'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x) ,$$

on obtient en intégrant

$$\int_a^b (uv)'(x) dx = \int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b v'(x)u(x) dx ,$$

mais le premier membre vaut

$$u(b)v(b) - u(a)v(a) = \left[u(x)v(x) \right]_a^b ,$$

d'où le résultat. \square

Exemple : Calculer $I = \int_0^1 \ln(1+x^2) dx$.

Si l'on pose $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln(1+x^2)$, on a $u(x) = x$ et $v'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, d'où

$$\begin{aligned} I &= \left[x \ln(1+x^2) \right]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx \\ &= \ln 2 - 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\ &= \ln 2 - 2 \left[x - \arctan x \right]_0^1 \\ &= \ln 2 - 2 + 2 \arctan 1 \\ &= \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2} . \end{aligned}$$

11. Première formule de la moyenne

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ telles que g soit positive. Alors, il existe c dans $[a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx .$$

Comme f est continue, on a $f([a, b]) = [m, M]$, avec

$$m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x) \quad \text{et} \quad M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x) .$$

On a donc, pour tout x de $[a, b]$

$$m \leq f(x) \leq M .$$

Notons également

$$I = \int_a^b f(x)g(x) dx \quad \text{et} \quad J = \int_a^b g(x) dx .$$

Comme $g(x)$ est positif, on en déduit, pour tout x de $[a, b]$,

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) ,$$

et en intégrant

$$mJ \leq I \leq MJ .$$

Si $J = 0$, alors $I = 0$ et on a l'égalité désirée avec n'importe quelle valeur de c .

Si $J \neq 0$, alors le nombre I/J appartient à l'intervalle $[m, M]$, et il existe c dans cet intervalle, tel que $f(c) = I/J$, ce qui donne le résultat voulu. \square

12. Intégration des fonctions à valeurs complexes

Extension d'une propriété des fonctions à valeurs réelles au cas complexe

On considère une fonction f définie sur $[a, b]$ et à valeurs complexes. On peut donc écrire

$$f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f ,$$

où $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont respectivement les parties réelles et imaginaires de f .

Si (P) désigne une propriété vérifiée par les fonctions à valeurs réelles, il est facile d'étendre la propriété aux fonctions à valeurs complexes, en disant que f vérifie (P) si et seulement si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ vérifient (P) .

Par exemple :

1) La fonction f possède une limite finie en un point c si et seulement si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ possèdent une limite en c , et l'on pose

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} \operatorname{Re} f(x) + i \lim_{x \rightarrow c} \operatorname{Im} f(x) .$$

On vérifie facilement que les propriétés des limites de sommes de produits et de quotients sont encore vraies.

(Il est d'ailleurs possible de définir directement les limites avec des epsilon comme dans le cas des fonctions à valeurs réelles en remplaçant la valeur absolue par le module).

2) La fonction f est continue en un point c si et seulement si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont continues en c .

3) La fonction f est dérivable en un point c si et seulement si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont dérivables en c , et l'on pose

$$f'(c) = (\operatorname{Re} f)'(c) + i(\operatorname{Im} f)'(c) .$$

(On peut d'ailleurs définir $f'(c)$ comme limite en c du taux de variation $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$).
Les formules de dérivation de somme de produit et de quotients sont encore vraies.

4) La fonction f est bornée sur $[a, b]$, si les fonctions $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont bornées.

En raison de l'égalité

$$|f| = \sqrt{(\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f)^2} ,$$

la fonction $|f|$ est alors bornée, et du fait des inégalités

$$|\operatorname{Re} f| \leq |f| \quad \text{et} \quad |\operatorname{Im} f| \leq |f| ,$$

si $|f|$ est bornée, les fonctions $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont aussi. On peut donc dire que f est bornée si et seulement si $|f|$ est bornée.

On peut donc définir de la même manière les fonctions Riemann-intégrables à valeurs complexes :

Si f est une fonction définie sur $[a, b]$ à valeurs complexes et bornée, on dira que f est **Riemann-intégrable**, si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont, et on posera

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \operatorname{Re} f(x) dx + i \int_a^b \operatorname{Im} f(x) dx .$$

On va passer en revue les propriétés obtenues pour les fonctions continues à valeurs réelles et voir celles qui sont encore vraies dans le cas des fonctions continues à valeurs complexes.

Propriétés de l'intégrale des fonctions à valeurs complexes

1) On voit facilement que si f et g sont continues et si λ est un nombre complexe, alors $f + g$ et λf sont continues, et

$$\int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad \text{et} \quad \int_a^b (\lambda f)(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx .$$

En effet

$$\operatorname{Re}(f + g) = \operatorname{Re} f + \operatorname{Re} g \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(f + g) = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g ,$$

et ces deux fonctions sont réelles et Riemann-intégrables, donc $f + g$ est Riemann-intégrable et

$$\begin{aligned} I(f + g) &= I(\operatorname{Re}(f + g)) + iI(\operatorname{Im}(f + g)) \\ &= I(\operatorname{Re} f + \operatorname{Re} g) + iI(\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g) \\ &= I(\operatorname{Re} f) + I(\operatorname{Re} g) + i(I(\operatorname{Im} f) + I(\operatorname{Im} g)) \\ &= I(\operatorname{Re} f) + iI(\operatorname{Im} f) + I(\operatorname{Re} g) + iI(\operatorname{Im} g) \\ &= I(f) + I(g) . \end{aligned}$$

De même si $\lambda = \alpha + i\beta$, avec α et β réels,

$$\operatorname{Re}(\lambda f) = \alpha \operatorname{Re} f - \beta \operatorname{Im} f \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(\lambda f) = \beta \operatorname{Re} f + \alpha \operatorname{Im} f .$$

Ces deux fonctions sont combinaisons linéaires de fonctions réelles continues donc le sont aussi, et

$$\begin{aligned} I(\lambda f) &= I(\alpha \operatorname{Re} f - \beta \operatorname{Im} f) + i I(\beta \operatorname{Re} f + \alpha \operatorname{Im} f) \\ &= \alpha I(\operatorname{Re} f) - \beta I(\operatorname{Im} f) + i\beta I(\operatorname{Re} f) + i\alpha I(\operatorname{Im} f) \\ &= (\alpha + i\beta) (I(\operatorname{Re} f) + i I(\operatorname{Im} f)) \\ &= \lambda I(f) . \end{aligned}$$

□

De manière générale, toutes les propriétés faisant appel à la linéarité de l'intégrale restent vraies. Il suffit d'appliquer les propriétés pour les fonctions réelles aux parties réelles et imaginaires :

- La relation de Chasles
- La formule de changement de variable
- La formule d'intégration par parties
- Les limites des sommes de Riemann
- La continuité de l'intégrale indéfinie
- La formule de Newton-Leibniz et l'existence de primitives de f .

2) On a la majoration du module d'une intégrale par l'intégrale du module de la fonction :

Si f est continue à valeurs complexes, alors

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx .$$

Soit $A = \operatorname{Re} f$ et $B = \operatorname{Im} f$, et posons

$$F(x) = \sqrt{\sqrt{A^2 + B^2} - |A|} \quad \text{et} \quad G(x) = \sqrt{\sqrt{A^2 + B^2} + |A|} .$$

Si l'on applique l'inégalité de Schwarz, on a

$$\left(\int_a^b F(x)G(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b F(x)^2 dx \right) \left(\int_a^b G(x)^2 dx \right) .$$

Mais

$$FG = \sqrt{\sqrt{A^2 + B^2} - |A|} \sqrt{\sqrt{A^2 + B^2} + |A|} = \sqrt{(\sqrt{A^2 + B^2} - |A|)(\sqrt{A^2 + B^2} + |A|)} = \sqrt{B^2} = |B| .$$

D'autre part

$$\int_a^b F(x)^2 dx = \int_a^b \sqrt{A(x)^2 + B(x)^2} dx - \int_a^b |A(x)| dx ,$$

et

$$\int_a^b G(x)^2 dx = \int_a^b \sqrt{A(x)^2 + B(x)^2} dx + \int_a^b |A(x)| dx ,$$

alors

$$\left(\int_a^b F(x)^2 dx \right) \left(\int_a^b G(x)^2 dx \right) = \left(\int_a^b \sqrt{A(x)^2 + B(x)^2} dx \right)^2 - \left(\int_a^b |A(x)| dx \right)^2.$$

L'inégalité de Schwarz donne alors

$$\left(\int_a^b |B(x)| dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b \sqrt{A(x)^2 + B(x)^2} dx \right)^2 - \left(\int_a^b |A(x)| dx \right)^2.$$

donc

$$\left(\int_a^b |A(x)| dx \right)^2 + \left(\int_a^b |B(x)| dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b \sqrt{A(x)^2 + B(x)^2} dx \right)^2 = \left(\int_a^b |f(x)| dx \right)^2.$$

D'autre part

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right|^2 = \left| \int_a^b (A(x) + iB(x)) dx \right|^2 = \left| \int_a^b A(x) dx + i \int_a^b B(x) dx \right|^2 = \left(\int_a^b A(x) dx \right)^2 + \left(\int_a^b B(x) dx \right)^2.$$

Mais, puisque A et B sont réelles

$$\left| \int_a^b A(x) dx \right| \leq \int_a^b |A(x)| dx \quad \text{et} \quad \left| \int_a^b B(x) dx \right| \leq \int_a^b |B(x)| dx,$$

donc

$$\left(\int_a^b A(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b |A(x)| dx \right)^2 \quad \text{et} \quad \left(\int_a^b B(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b |B(x)| dx \right)^2.$$

Alors

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right|^2 = \left(\int_a^b A(x) dx \right)^2 + \left(\int_a^b B(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b |A(x)| dx \right)^2 + \left(\int_a^b |B(x)| dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b |f(x)| dx \right)^2.$$

□

3) L'inégalité de la moyenne se déduit de nouveau de la précédente :

Si f est continue, et si M majore $|f|$, on a

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M(b-a).$$

4) On a toujours l'inégalité de Schwarz :

Si f et g sont continues

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

On a

$$|I(fg)| \leq I(|fg|) .$$

Il suffit d'appliquer la formule de Schwarz dans le cas réel à $|f|$ et $|g|$. □

5) On a également l'inégalité de Minkowski :

Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a, b]$, on a

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx \right)^{1/2} .$$

On a

$$|f + g|^2 = (f + g)(\bar{f} + i\bar{g}) = |f|^2 + (f\bar{g} + g\bar{f}) + |g|^2 = |f|^2 + 2\operatorname{Re}(f\bar{g}) + |g|^2 .$$

Mais

$$\operatorname{Re}(f\bar{g}) \leq |f\bar{g}| = |f| |g| ,$$

donc, en appliquant l'inégalité de Schwarz

$$I(\operatorname{Re}(f\bar{g})) \leq I(|f| |g|) \leq (I(|f|^2))^{1/2} (I(|g|^2))^{1/2} ,$$

Alors

$$I(|f + g|^2) = I(|f|^2) + 2I(\operatorname{Re}(f\bar{g})) + I(|g|^2) \leq I(|f|^2) + 2(I(|f|^2))^{1/2} (I(|g|^2))^{1/2} + I(|g|^2) ,$$

mais le membre de droite n'est autre que $[(I(|f|^2))^{1/2} + (I(|g|^2))^{1/2}]^2$, donc

$$I(|f + g|^2) \leq [(I(|f|^2))^{1/2} + (I(|g|^2))^{1/2}]^2 .$$

Ce qui donne l'inégalité voulue en prenant la racine carrée des deux membres. □

6) La formule de la moyenne ne peut plus être utilisée car sa démonstration fait appel au théorème des valeurs intermédiaires qui n'est plus vrai dans le cas complexe. Cependant on peut donner une inégalité remplaçant cette formule de la moyenne, qui elle est valable pour des fonctions complexes.

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ telle que g soit positive. Alors,

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)| \int_a^b g(x) dx .$$

Comme f est continue, elle est bornée. On pose,

$$M = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)| .$$

Alors, puisque g est positive,

$$|f(x)g(x)| \leq Mg(x) ,$$

et donc

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq M \int_a^b g(x) dx .$$

□

Dérivées et primitives de fonctions usuelles

Si λ est un nombre complexe non nul, et n un entier la fonction f définie par

$$f(x) = (x - \lambda)^n ,$$

est dérivable et admet comme dérivée

$$f'(x) = n(x - \lambda)^{n-1} .$$

On a

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h-\lambda)^n - (x-\lambda)^n}{h} = \sum_{k=0}^{n-1} (x+h-\lambda)^k (x-\lambda)^{n-1-k} ,$$

et donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum_{k=0}^{n-1} (x-\lambda)^k (x-\lambda)^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} (x-\lambda)^{n-1} = n(x-\lambda)^{n-1} .$$

Donc

$$f'(x) = n(x - \lambda)^{n-1} .$$

□

Il en résulte que si $n \neq -1$,

$$\int (x - \lambda)^n dx = \frac{(x - \lambda)^{n+1}}{n+1} .$$

Pour $n = -1$, on aurait envie de dire qu'une primitive de $1/(x - \lambda)$ est $\ln(x - \lambda)$, mais il faudrait donner un sens au logarithme d'un nombre complexe, ce qui ne peut pas se faire simplement. On peut obtenir une primitive en séparant les parties réelles et imaginaires. On écrit

$$\frac{1}{x - \lambda} = \frac{1}{(x - \alpha) + i\beta} = \frac{(x - \alpha) - i\beta}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} .$$

Mais

$$\int \frac{x - \alpha}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} dx = \frac{1}{2} \ln((x - \alpha)^2 + \beta^2) = \ln |x - \lambda| ,$$

et

$$\int \frac{\beta}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} dx = \arctan \frac{x - \alpha}{\beta} ,$$

donc

$$\int \frac{dx}{x - \lambda} = \ln |x - \lambda| - i \arctan \frac{x - \alpha}{\beta} .$$

Si λ est un nombre complexe, la fonction f définie par

$$f(x) = e^{\lambda x} ,$$

est dérivable et admet comme dérivée

$$f'(x) = \lambda e^{\lambda x} .$$

Si $\lambda = \alpha + i\beta$, on a

$$f(x) = e^{\alpha + i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) ,$$

donc

$$f(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x .$$

Alors

$$f'(x) = e^{\alpha x} (\alpha \cos \beta x - \beta \sin \beta x) + i e^{\alpha x} (\alpha \sin \beta x + \beta \cos \beta x) .$$

Or ceci n'est autre que

$$\lambda e^{\lambda x} = (\alpha + i\beta)(\cos \beta x + i \sin \beta x) e^{\alpha x} .$$

□

Il en résulte qu'une primitive de f , si $\lambda \neq 0$, est F définie par

$$F(x) = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} .$$

Remarquons que si μ est un nombre complexe, on obtient facilement une dérivée ou une primitive de $e^{\lambda x + \mu}$ en écrivant

$$e^{\lambda x + \mu} = e^{\mu} e^{\lambda x} ,$$

puisque e^{μ} est une constante. On obtient comme dérivée par exemple

$$\lambda e^{\lambda x + \mu} .$$

Alors, en appliquant ce qui précède à

$$\sin(\lambda x + \mu) = \frac{1}{2i} (e^{i(\lambda x + \mu)} - e^{-i(\lambda x + \mu)}) ,$$

et

$$\cos(\lambda x + \mu) = \frac{1}{2} (e^{i(\lambda x + \mu)} + e^{-i(\lambda x + \mu)}) ,$$

on en déduit facilement que

Si λ et μ sont des nombres complexes, les fonctions f et g définies par

$$f(x) = \sin(\lambda x + \mu) \quad \text{et} \quad g(x) = \cos(\lambda x + \mu)$$

sont dérivables et admettent comme dérivées respectives

$$f'(x) = \lambda \cos(\lambda x + \mu) \quad \text{et} \quad g'(x) = -\lambda \sin(\lambda x + \mu) .$$

Ceci permet d'avoir des primitives de f et g . On obtient également les résultats usuels pour la fonction tangente, et les fonctions sinus et cosinus hyperboliques.

Chapitre 5

INTEGRALES GENERALISEES

L'intégrale de Riemann est définie pour des fonctions bornées et sur des segments. On se propose de généraliser cette notion au cas des fonctions non bornées définies sur des intervalles qui ne sont pas nécessairement des segments.

1. Définition des intégrales convergentes

Définitions

Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle de bornes a et b , non nécessairement fermé et non nécessairement borné. On se propose d'étudier quand on peut donner un sens à l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$.

Lorsque cela sera possible on parlera alors d'**intégrale généralisée**.

Nous allons définir maintenant les notions d'intégrale convergente et d'intégrale divergente en envisageant différentes situations.

$$J = [a, b[$$

Soit f une fonction continue sur $J = [a, b[$. Si la fonction F définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

possède une limite finie lorsque x tend vers b par valeurs inférieures, on dit que « **l'intégrale** $\int_a^b f(x) dx$

converge ». Dans le cas contraire, on dit que « **l'intégrale** $\int_a^b f(x) dx$ **diverge** ».

Lorsque F a une limite (finie ou non) en a on note

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow b-} \int_a^x f(t) dt .$$

Remarque : Nous dirons que deux intégrales sont **de même nature**, si elles sont toutes deux divergentes ou toutes deux convergentes.

Avant d'étudier les autres cas faisons quelques remarques sur celui-ci qui seront valables pour tous.

1) L'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ diverge si F n'a pas de limite en a , ou a une limite infinie en a . Dans le premier cas il peut paraître absurde de parler d'intégrale puisqu'en fait cette intégrale n'existe pas. C'est un abus de langage commode et usuel. (On aurait sans doute pu dire « la fonction f n'est pas intégrable en un sens généralisé », mais on ne le fait pas). On veillera cependant à n'utiliser dans une formule ou un calcul une intégrale $\int_a^b f(x) dx$ que si celle-ci converge.

2) Si f est continue sur $[a, b]$, on a défini

$$I = \int_a^b f(x) dx ,$$

et l'on a alors

$$\lim_{x \rightarrow b-} \int_a^x f(t) dt = \int_a^b f(x) dx .$$

Mais on peut considérer aussi f comme une fonction définie sur $[a, b[$, et la formule précédente montre que l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ converge. Les deux notions coïncident dans ce cas.

3) La notion de convergence d'une intégrale généralisée ne dépend que de ce qui se passe près de la borne où l'intervalle est ouvert :

Soit f une fonction continue sur $J = [a, b[$ et c dans J , alors les intégrales

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{et} \quad \int_c^b f(x) dx ,$$

sont de même nature.

En effet, en raison de la relation de Chasles,

$$\int_a^x f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^x f(t) dt .$$

La limite du membre de droite existe si et seulement si celle du membre de gauche existe. Et l'on a, si les intégrales convergent :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx .$$

□

4) Si f est continue sur $[a, b[$ et si G est une primitive de f , on a

$$\int_a^x f(t) dt = G(x) - G(a) ,$$

il en résulte que l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ converge si et seulement si G possède une limite finie en b . On notera lorsqu'il en est ainsi

$$\int_a^b f(t) dt = [G(x)]_a^b .$$

5) Si f est à valeurs complexes, l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ converge si et seulement si les intégrales $\int_a^b \operatorname{Re} f(x) dx$ et $\int_a^b \operatorname{Im} f(x) dx$ convergent et l'on a

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \operatorname{Re} f(x) dx + i \int_a^b \operatorname{Im} f(x) dx .$$

On a des définitions et des remarques analogues, pour $J =]a, b]$:

$$\boxed{J =]a, b]}$$

Soit f une fonction continue sur $J =]a, b]$. Si la fonction F définie par

$$F(x) = \int_x^b f(t) dt$$

possède une limite finie lorsque x tend vers b par valeurs inférieures, on dit que « **l'intégrale** $\int_a^b f(x) dx$

converge ». Dans le cas contraire, on dit que « **l'intégrale** $\int_a^b f(x) dx$ **diverge** ».

Lorsque F a une limite (finie ou non) en a on note

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow a+} \int_x^b f(t) dt .$$

On pourra encore généraliser la notion d'intégrale dans d'autres situations, que l'on ramènera toujours aux deux cas précédents :

Exemple 1 : Soit f une fonction continue sur $J =]a, b[$. Soit c dans $]a, b[$. Si les intégrales $\int_a^c f(x) dx$

et $\int_c^b f(x) dx$ convergent, on dit que « **l'intégrale** $\int_a^b f(x) dx$ **converge** ». Dans le cas contraire, on dit

que « **l'intégrale** $\int_a^b f(x) dx$ **diverge** ».

On note

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx ,$$

lorsque cette somme existe dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Remarque : en raison de la relation de Chasles, ces définitions ne dépendent pas du choix de c .

Exemple 2 : Soit f une fonction continue sur $[a, b] \setminus \{c\}$. Si les intégrales $\int_a^c f(x) dx$ et $\int_c^b f(x) dx$

convergent, on dit que « **l'intégrale** $\int_a^b f(x) dx$ **converge** ». Dans le cas contraire, on dit que « **l'intégrale**

$\int_a^b f(x) dx$ **diverge** ».

On note

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx ,$$

lorsque cette somme existe dans $\overline{\mathbb{R}}$.

On peut bien sûr imaginer des situations où l'on se ramène à plus de deux intégrales. Par exemple pour

étudier $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{|x|}(1+x+x^2)}$, on étudierait les quatre intégrales

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{|x|}(1+x+x^2)} , \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{|x|}(1+x+x^2)} , \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}(1+x+x^2)} , \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{|x|}(1+x+x^2)} .$$

La convergence a lieu si et seulement si les quatre intégrales convergent.

De manière générale on a donc la relation de Chasles :

Soit $a < c < b$. Si les intégrales $\int_a^c f(x) dx$ et $\int_c^b f(x) dx$ convergent, alors $\int_a^b f(x) dx$ converge et

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx .$$

Si l'une des deux premières intégrales diverge, la dernière diverge.

Comme pour une intégrale de Riemann, nous poserons, si $a > b$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx ,$$

lorsque cette dernière intégrale converge.

Remarque : pour une intégrale de Riemann, il n'y avait pas d'inconvénient à poser

$$\int_a^a f(x) dx = 0 .$$

Par contre, si f n'est pas définie en a , cette égalité n'a de sens que si l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ converge pour un $b \neq a$, puisque dans ce cas

$$\lim_{t \rightarrow a} \left(\int_a^b f(x) dx - \int_t^b f(x) dx \right) = \lim_{t \rightarrow a} \int_a^t f(x) dx = 0 .$$

Nous allons nous préoccuper dans la suite de savoir si une intégrale généralisée donnée converge ou non. Comme ce problème revient à savoir si une fonction a une limite finie en un point, on pourra appliquer les théorèmes classiques sur les limites de fonctions.

Nous donnerons les démonstrations, et parfois les résultats, uniquement dans le cas des intervalles $[a, b[$. Ils se transcrivent sans problèmes dans le cas $]a, b]$.

Linéarité des intégrales convergentes

Soit f et g des fonctions continues sur J , et λ un nombre réel non nul. Si les intégrales de f et de g convergent, il en est de même de celle de $f + g$ et

$$\int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx .$$

Si une des deux intégrales diverge, l'intégrale de $f + g$ diverge.

L'intégrale de λf converge si et seulement l'intégrale de f converge et alors

$$\int_a^b (\lambda f)(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx .$$

En raison de la linéarité de l'intégrale de Riemann, on a

$$\int_a^x (f + g)(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_a^x g(t) dt ,$$

et

$$\int_a^x (\lambda f)(t) dt = \lambda \int_a^x f(t) dt ,$$

et les théorèmes sur les limites de sommes et produits donnent le résultat. \square

Remarque : on ne peut rien conclure si les deux intégrales divergent.

Intégration par parties

Rappelons que si G est définie sur $[a, b[$, et possède une limite en b , on note

$$\lim_{x \rightarrow b} G(x) - G(a) = \left[G(x) \right]_a^b .$$

Soit u et v deux fonctions de classe C^1 sur $[a, b[$. Alors, si l'intégrale $\int_a^b u(x)v'(x) dx$ converge, et si uv possède une limite en b , l'intégrale $\int_a^b u'(x)v(x) dx$ converge et

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = \left[u(x)v(x) \right]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx .$$

On a, par la formule d'intégration par parties sur un segment,

$$\int_a^t u'(x)v(x) dx = u(t)v(t) - u(a)v(a) - \int_a^t u(x)v'(x) dx .$$

Et donc, lorsque t tend vers b , le membre de droite a une limite qui vaut

$$\lim_{t \rightarrow b} u(t)v(t) - u(a)v(a) - \int_a^b u(x)v'(x) dx .$$

Cela signifie que l'intégrale $\int_a^b u'(x)v(x) dx$, converge, et on a l'égalité voulue. \square

Remarque : il se peut que l'intégrale $\int_a^b u'(x)v(x) dx$ converge mais que uv n'ai pas de limite finie et que

$\int_a^b u(x)v'(x) dx$ diverge. Donc là encore on n'écrit la formule d'intégration par parties pour des intégrales généralisées que lorsque cela aura un sens. On aura en général intérêt à écrire la formule dans un segment avant de passer à la limite.

Changement de variable

Soit f une fonction continue sur $[a, b[$.

Soit φ , une application strictement monotone de classe C^1 sur $[\alpha, \beta[$. Posons $b = \lim_{x \rightarrow \beta} \varphi(x)$, et $a = \varphi(\alpha)$.

Alors les intégrales $\int_a^b f(x) dx$ et $\int_\alpha^\beta f \circ \varphi(t) \varphi'(t) dt$ sont de même nature, et si elles convergent, ou si elles ont une limite infinie, on a

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f \circ \varphi(t) \varphi'(t) dt .$$

En effet d'après le théorème de changement de variable pour les intégrales de Riemann, on a, si $\alpha \leq v < \beta$,

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(v)} f(x) dx = \int_\alpha^v f \circ \varphi(t) \varphi'(t) dt .$$

Posons, si u appartient à $[a, b[$,

$$F(u) = \int_{\varphi(\alpha)}^u f(x) dx ,$$

et, si v appartient à $[\alpha, \beta[$,

$$G(v) = \int_\alpha^v f \circ \varphi(t) \varphi'(t) dt .$$

Alors, si v appartient à $[\alpha, \beta[$,

$$F \circ \varphi(v) = G(v) .$$

Si $\int_a^b f(x) dx$ converge, alors $F(u)$ possède une limite finie ℓ lorsque u tend vers b , et donc, en utilisant le théorème sur les limites de composées, G possède la même limite lorsque v tend vers β . Alors $\int_\alpha^\beta f \circ \varphi(t) \varphi'(t) dt$ converge et on a bien égalité. Cela reste vrai si les limites sont infinies.

La réciproque se démontre de la même manière en partant de la relation

$$F(u) = G \circ \varphi^{-1}(u) ,$$

qui est vraie si u appartient à $[a, b[$, puisque

$$\lim_{v \rightarrow \beta} \varphi^{-1}(v) = b .$$

□

Remarque 1 : en fait, lorsque la fonction f est continue, on peut se passer de l'hypothèse de bijectivité de φ , mais la démonstration est plus compliquée, et en pratique on utilise le plus souvent une application φ bijective.

Remarque 2 : un changement de variable peut transformer une intégrale généralisée en intégrale de Riemann. Cela montre dans ce cas que l'intégrale généralisée converge.

Exemple : en prenant $\varphi(x) = 1/x$, et $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$, on obtient

$$\int_0^1 \arctan \frac{1}{x} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^2} dt .$$

Mais la fonction qui à x associe $\arctan \frac{1}{x}$ se prolonge par continuité en 0 (par la valeur $\pi/2$). L'intégrale $\int_0^1 \arctan \frac{1}{x} dx$ est une intégrale de Riemann et converge donc. Il en résulte que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^2} dt$ converge également.

2. Intégrale généralisée d'une fonction positive

Soit f une fonction continue sur $[a, b[$ et positive. Si l'on pose

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt ,$$

La fonction F est croissante sur $[a, b[$, et l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ converge si et seulement si F est majorée. De plus, pour tout x de $[a, b[$

$$F(x) \leq \int_a^b f(t) dt .$$

Si f est positive, on a, si $a \leq u < v < b$,

$$F(v) - F(u) = \int_u^v f(t) dt \geq 0 ,$$

et la fonction F est donc croissante. Elle admet une limite finie ou non en b . Si la limite est finie l'intégrale converge, et l'on a, pour tout x de $[a, b[$,

$$F(x) \leq \int_a^b f(t) dt ,$$

sinon elle diverge. Dans ce cas, dire que l'intégrale converge revient à dire que la fonction F est bornée. \square

Critères de comparaison

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b[$, positives au voisinage de b et telles que, pour x voisin de b

$$f(x) \leq g(x) .$$

Alors si l'intégrale $\int_a^b g(x) dx$ converge, l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ converge.

si l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ diverge, l'intégrale $\int_a^b g(x) dx$ diverge.

Si l'on a $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pour $c \leq x < b$, posons

$$F(x) = \int_c^x f(t) dt \quad \text{et} \quad G(x) = \int_c^x g(t) dt .$$

On a alors, si $c \leq x < b$, l'inégalité $F(x) \leq G(x)$.

Si $\int_a^b g(x) dx$ converge, alors $\int_c^b g(x) dx$ converge également, et l'on a, si $c \leq x < b$,

$$F(x) \leq G(x) \leq \int_c^b g(x) dx .$$

La fonction F est croissante majorée. Alors l'intégrale $\int_c^b f(x) dx$ converge, donc $\int_a^b f(x) dx$ converge également.

Si $\int_a^b f(x) dx$ diverge, alors $\lim_{x \rightarrow b-} F(x) = +\infty$, et donc $\lim_{x \rightarrow b-} G(x) = +\infty$. Cela signifie que

$\int_c^b g(x) dx$ diverge, donc $\int_a^b g(x) dx$ diverge également. □

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b[$, telles que, au voisinage de b , la fonction g soit de signe constant et

$$f(x) \sim g(x) .$$

Alors les intégrales $\int_a^b g(x) dx$ et $\int_a^b f(x) dx$ sont de même nature.

Il suffit d'étudier le cas où les fonctions sont positives. (Sinon on applique le résultat à $-f$ et $-g$).

On a, au voisinage de b ,

$$f(x) = \varepsilon(x)g(x) ,$$

où ε tend vers 1 lorsque x tend vers b . Il existe un intervalle $[c, b[$ sur lequel g est positive et

$$\frac{1}{2} \leq \varepsilon(x) \leq 2 .$$

Alors

$$\frac{g(x)}{2} \leq f(x) \leq 2g(x) .$$

Si $\int_a^b g(x) dx$ converge, alors $\int_a^b 2g(x) dx$ converge, et d'après le critère précédent $\int_a^b f(x) dx$ converge.

Si $\int_a^b f(x) dx$ converge, alors d'après le critère précédent $\int_a^b \frac{g(x)}{2} dx$ converge, et $\int_a^b g(x) dx$ converge.

Les deux intégrales sont bien de même nature. \square

3. Intégrales de comparaison

Pour pouvoir utiliser les théorèmes précédents, il faut connaître la nature d'intégrales de fonctions simples, qui serviront d'intégrales de comparaison.

Dans les résultats qui suivent on n'a indiqué que la borne où le problème de convergence se pose.

Intégrales de Riemann

L'intégrale $\int_{+\infty}^{\frac{dx}{x^\alpha}}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Il suffit de calculer une primitive de la fonction et de regarder si cette primitive a une limite en $+\infty$. Or

$$\int \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln x & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Et l'on constate bien que l'on obtient une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$. \square

Remarquons que l'intégrale $\int_{+\infty}^{\frac{dx}{x}}$ diverge, et ceci bien que $1/x$ tende vers 0 à l'infini.

Les intégrales $\int_a^{\frac{dx}{(x-a)^\alpha}}$ et $\int_a^{\frac{dx}{(a-x)^\alpha}}$ convergent si et seulement si $\alpha < 1$.

Il suffit là encore de calculer une primitive de la fonction et de regarder si cette primitive a une limite en a . Or, si $x > a$,

$$\int \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \begin{cases} \frac{(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln(x-a) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Et l'on constate bien que l'on obtient une limite finie si et seulement si $\alpha < 1$. La méthode est la même pour l'autre intégrale. \square

Remarques : 1) si $\alpha \leq 0$, la fonction $1/(x-a)^\alpha$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$.

2) Sauf dans le cas $\alpha = 1$ où les intégrales $\int \frac{dx}{x}$ et $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x}$ divergent toutes les deux, on constate que $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge si et seulement si $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ diverge. Il faut donc faire attention à ne pas confondre les deux situations.

Intégrales de Bertrand

Ces intégrales de comparaisons sont utiles à retenir, non seulement pour le résultat mais aussi pour la méthode utilisée pour l'obtenir.

L'intégrale $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$ converge si et seulement si l'on a un des deux cas suivants :

- $\alpha > 1$
- $\alpha = 1$ et $\beta > 1$

En d'autres termes l'intégrale de Bertrand se comporte comme l'intégrale de Riemann $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ si $\alpha \neq 1$,

et comme $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^\beta}$ si $\alpha = 1$

Dans le cas $\alpha = 1$ on calcule facilement une primitive puisque $1/x$ est la dérivée de $\ln x$.

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} = \begin{cases} \frac{(\ln x)^{1-\beta}}{1-\beta} & \text{si } \beta \neq 1 \\ \ln \ln x & \text{si } \beta = 1 \end{cases}$$

Et l'on constate bien que l'on obtient une limite finie si et seulement si $\beta > 1$.

Si $\alpha < 1$, on écrit

$$\frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} = \frac{1}{x} \frac{x^{1-\alpha}}{(\ln x)^\beta}.$$

Mais $x^{1-\alpha}/(\ln x)^\beta$ tend vers l'infini quand x tend vers l'infini. Donc, pour x assez grand

$$\frac{x^{1-\alpha}}{(\ln x)^\beta} \geq 1,$$

et

$$\frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} \geq \frac{1}{x}.$$

Il résulte alors du critère de comparaison que l'intégrale diverge.

Si $\alpha > 1$, soit α' tel que $\alpha > \alpha' > 1$. On écrit

$$\frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} = \frac{1}{x^{\alpha'}} \frac{1}{x^{\alpha-\alpha'} (\ln x)^\beta}.$$

Mais $x^{\alpha-\alpha'}/(\ln x)^\beta$ tend vers l'infini quand x tend vers l'infini. Donc, pour x assez grand

$$\frac{1}{x^{\alpha-\alpha'} (\ln x)^\beta} \leq 1,$$

et

$$\frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} \leq \frac{1}{x^{\alpha'}} .$$

Il résulte alors du critère de comparaison que l'intégrale converge. \square

On peut donner un critère analogue en un point a fini. Donnons le pour $a = 0$.

L'intégrale $\int_0 \frac{dx}{x^\alpha |\ln x|^\beta}$ converge si et seulement si l'on a un des deux cas suivantes :

$\alpha < 1$
 $\alpha = 1$ et $\beta > 1$

On se ramène avec le changement de variable $\varphi(x) = 1/x$ au cas précédent. En effet

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha |\ln x|^\beta} = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2-\alpha} (\ln t)^\beta} .$$

\square

Intégrales de fonction exponentielle

L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}$ converge si et seulement $\alpha > 0$.

En effet

$$\int e^{-\alpha x} dx = \begin{cases} -\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha} & \text{si } \alpha \neq 0 \\ x & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$$

Et l'on constate bien que l'on obtient une limite finie si et seulement si $\alpha > 0$. \square

De manière générale, chaque fois que l'on peut comparer une fonction positive à une fonction positive dont on sait calculer une primitive on pourra essayer d'utiliser le critère de comparaison.

4. Le critère de Cauchy

Le critère de Cauchy est un critère qui permet de savoir si une fonction possède une limite en un point, sans connaître *a priori* cette limite. Nous rappelons sa formulation pour une fonction quelconque, ce qui permettra de l'appliquer au cas d'une intégrale convergente.

Critère de Cauchy pour une fonction F définie sur un intervalle $[a, b[$

si b est fini la fonction F admet une limite finie en b si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, quels que soient x et x' vérifiant $b - \alpha < x' < x < b$, on ait

$$|F(x') - F(x)| < \varepsilon .$$

si $b = +\infty$ la fonction F admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe A tel que, quels que soient x et x' dans D vérifiant $A < x' < x$, on ait

$$|F(x') - F(x)| < \varepsilon .$$

Démontrons la première assertion, la seconde étant laissée en exercice.

Supposons que F admette une limite ℓ en b . Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, si $0 < |x - b| < \alpha$, on ait $|F(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. Alors, si x et x' sont dans $]b - \alpha, b[$, on a

$$0 < |x - b| < \alpha \quad \text{et} \quad 0 < |x' - b| < \alpha ,$$

donc

$$|F(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad |F(x') - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} ,$$

et finalement

$$|F(x) - F(x')| \leq |F(x) - \ell| + |F(x') - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Réciproquement, supposons que F vérifie le critère de Cauchy. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, quels que soient x et x' dans $]b - \alpha, b[$ on ait

$$|F(x) - F(x')| < \varepsilon .$$

Soit (u_n) une suite de points de $[a, b[$ qui converge vers b . Il existe N , tel que $n \geq N$ implique

$$0 < |u_n - b| < \alpha .$$

Donc, quels que soient n et m vérifiant $N \leq n < m$, on a

$$|F(u_n) - F(u_m)| < \varepsilon .$$

Il en résulte que la suite $(F(u_n))$ est une suite de Cauchy. Elle est donc convergente. Soit ℓ sa limite. Il s'agit de voir que cette limite ne dépend pas de la suite (u_n) choisie.

Soit (v_n) une autre suite de points de $[a, b[$ qui converge vers b , alors $(F(v_n))$ converge vers une limite ℓ' . Soit alors w_n la suite telle que, pour tout entier $n \geq 0$, on ait $w_{2n} = u_n$ et $w_{2n+1} = v_n$. Alors la suite (w_n) converge aussi vers b , et donc $(F(w_n))$ possède une limite. Mais $(F(u_n))$ et $(F(v_n))$ sont deux suites extraites de $(F(w_n))$ et ont la même limite. Il en résulte que $\ell = \ell'$. Donc, il existe un nombre ℓ , tel que, pour toute suite (v_n) de points de $[a, b[$ qui converge vers b , la suite $(F(v_n))$ converge vers ℓ . D'après la caractérisation séquentielle de la limite, cela signifie que F admet pour limite ℓ en b .

Appliquons ce critère à la fonction F définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt .$$

Alors

$$F(x) - F(x') = \int_{x'}^x f(t) dt .$$

On a donc le critère de Cauchy pour une intégrale généralisée :

Soit f continue sur $[a, b[$.

si b est fini l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ converge si et seulement si il existe $\alpha > 0$ tel que, quels que soient x et x' vérifiant $b - \alpha < x' < x < b$, on ait

$$\left| \int_{x'}^x f(t) dt \right| < \varepsilon .$$

si $b = +\infty$ l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ converge si et seulement si il existe A tel que, quels que soient x et x' dans D vérifiant $A < x' < x$, on ait

$$\left| \int_{x'}^x f(t) dt \right| < \varepsilon .$$

5. Intégrales absolument convergentes

Soit f une fonction continue sur $J = [a, b[$ (à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C}). La fonction $|f|$ est également continue sur $J = [a, b[$. On peut donc se poser le problème de la convergence de l'intégrale $\int_a^b |f(x)| dx$.

On dira que l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ **converge absolument** si l'intégrale $\int_a^b |f(x)| dx$ est convergente.

Comme $|f|$ est une fonction positive, les critères de comparaison donnés dans le paragraphe 2 peuvent s'appliquer et donnent des critères de convergence absolue.

L'intérêt de la notion de convergence absolue résulte du résultat suivant :

Soit f une fonction continue sur $J = [a, b[$. Si l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ converge absolument, alors elle converge. De plus

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

C'est une conséquence immédiate du critère de Cauchy et de la majoration de la valeur absolue d'une intégrale.

Supposons par exemple b finie, si l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ converge absolument, cela signifie que

l'intégrale $\int_a^b |f(x)| dx$ converge, donc d'après le critère de Cauchy, il existe $\alpha > 0$ tel que, quels que soient x et x' vérifiant $b - \alpha < x < x' < b$, on ait

$$\left| \int_{x'}^x |f(t)| dt \right| < \varepsilon .$$

ou encore, puisque l'intégrale est positive,

$$\int_{x'}^x |f(t)| dt < \varepsilon .$$

Mais puisque, si $a \leq x < x' < b$, on a,

$$\left| \int_{x'}^x f(t) dt \right| \leq \int_{x'}^x |f(t)| dt ,$$

on en déduit

$$\left| \int_{x'}^x f(t) dt \right| < \varepsilon .$$

Et le critère de Cauchy permet de conclure que l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ converge. On a alors, si $u < b$

$$\left| \int_a^u f(x) dx \right| \leq \int_a^u |f(x)| dx ,$$

Et lorsque u tend vers b

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx .$$

On transpose facilement la démonstration lorsque $b = +\infty$. □

Ce théorème reste bien sûr vrai pour une intégrale généralisée quelconque. On retiendra donc que

la convergence absolue d'une intégrale entraîne sa convergence.

Exemple : soit a un nombre réel. Considérons la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par

$$f_a(x) = \frac{\sin ax}{x^2} ,$$

on a

$$|f_a(x)| \leq \frac{|\sin ax|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} .$$

Comme l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge, il résulte du critère de comparaison que l'intégrale

$\int_1^{+\infty} |f_a(x)| dx$ converge, donc que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f_a(x) dx$ converge absolument, et finalement que cette intégrale converge.

6. Intégrales semi-convergentes

Nous dirons qu'une intégrale est **semi-convergente** lorsqu'elle est convergente sans être absolument convergente. Pour de telles intégrales il faut donc utiliser d'autres moyens que les critères de comparaison. Nous allons commencer par donner un exemple d'une telle intégrale, qui sera une bonne illustration des méthodes utilisées pour montrer qu'une intégrale d'une fonction qui n'est pas de signe constant est convergente et pas absolument convergente.

Soit a un réel non nul, et g_a la fonction définie sur \mathbb{R}^* par

$$g_a(x) = \frac{\cos ax}{x}.$$

Une intégration par parties donne

$$\int_1^x g_a(t) dt = \left[\frac{\sin at}{a} \right]_1^x + \int_1^x \frac{\sin at}{at^2} dt,$$

c'est-à-dire

$$\int_1^x g_a(t) dt = \frac{\sin ax}{a} - \frac{\sin a}{a} + \int_1^x \frac{\sin at}{at^2} dt.$$

L'intégrale $\int_1^\infty \frac{\sin at}{at^2} dt$ converge d'après l'exemple du paragraphe précédent. Par ailleurs $\frac{\sin ax}{a}$ tend vers zéro, quand x tend vers l'infini, puisque c'est le produit d'une fonction bornée, par une fonction tendant vers zéro. Donc $\int_1^x g_a(t) dt$ possède une limite lorsque x tend vers l'infini, ce qui prouve que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} g_a(t) dt \text{ converge, et vaut } -\frac{\sin a}{a} + \int_1^{+\infty} \frac{\sin at}{at^2} dt.$$

Pour montrer que la convergence n'est pas absolue, utilisons la minoration

$$|\cos u| \geq \cos^2 u,$$

qui est vraie puisque $|\cos u| \leq 1$. Alors, en utilisant la formule

$$\cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2},$$

on obtient

$$\frac{|\cos ax|}{x} \geq \frac{1 + \cos 2ax}{2x},$$

et donc

$$\int_1^x |g_a(t)| dt \geq \int_1^x \frac{dt}{2t} + \frac{1}{2} \int_1^x g_{2a}(t) dt.$$

Mais l'intégrale $\int_1^{+\infty} g_{2a}(t) dt$ converge d'après le calcul précédent, et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{2t}$ diverge. Alors l'intégrale $\int_1^x |g_a(t)| dt$ diverge.

Donnons le critère d'Abel directement inspiré du calcul précédent.

Critère d'Abel

Soit f une fonction de classe C^1 décroissante sur $[a, +\infty[$ et de limite nulle en $+\infty$.

Soit g une fonction continue sur $[a, +\infty[$ vérifiant la propriété suivante : il existe une constante M

telle que, quels que soient x et x' dans $[a, +\infty[$ on ait $\left| \int_x^{x'} g(t) dt \right| \leq M$.

Alors $\int_a^\infty g(t) dt$ converge et, pour tout x de $[a, +\infty[$

$$\left| \int_x^\infty f(t)g(t) dt \right| \leq Mf(x) .$$

Posons $G_x(x') = \int_x^{x'} g(t)dt$. La fonction G_x est une primitive de g .

En intégrant par parties on a

$$\int_x^{x'} f(t)g(t) dt = f(x')G_x(x') + \int_x^{x'} (-f'(t))G_x(t) dt .$$

Mais $-f'(t)$ est positive et G_x est majorée par M , donc

$$\left| \int_x^{x'} f(t)g(t) dt \right| \leq f(x')M + \int_x^{x'} (-f'(t))M dt = f(x)M .$$

Alors, puisque $f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers l'infini, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe A , tel que $x > A$ implique

$$|f(x)| < \frac{\varepsilon}{M} .$$

Alors si $x' > x > A$,

$$\left| \int_x^{x'} f(t)g(t) dt \right| \leq f(x')M + \int_x^{x'} (-f'(t))M dt < \varepsilon$$

et il résulte du critère de Cauchy que l'intégrale $\int_x^{x'} g(t) dt$ converge. De plus si l'on fait tendre x' vers l'infini dans la relation

$$\left| \int_x^{x'} f(t)g(t) dt \right| \leq Mf(x) ,$$

on obtient

$$\left| \int_x^\infty f(t)g(t) dt \right| \leq Mf(x) .$$

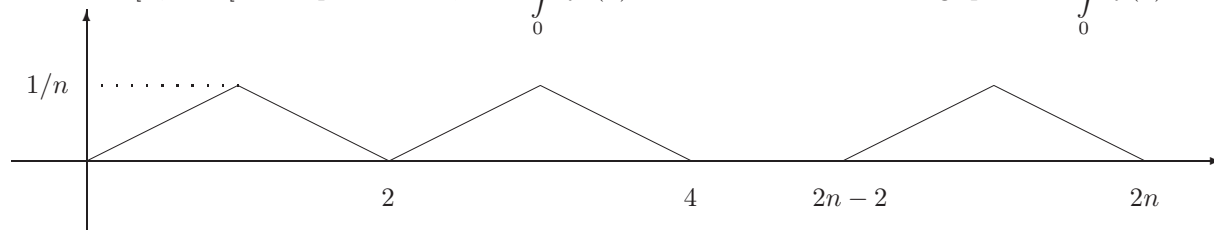
□

7. Suite d'intégrales généralisées

On a vu dans le chapitre 1 que la convergence uniforme permet de passer à la limite dans une suite d'intégrales de fonctions continues sur un segment.

Le problème est plus difficile pour des intégrales généralisées. La convergence uniforme ne suffit plus, comme on le voit en prenant une suite f_n de fonctions telles que le graphe de f_n soit constitué de n triangles de base 2, et de hauteur $1/n$. On a donc $\|f_n\|_\infty = 1/n$, et la suite (f_n) converge uniformément

vers 0 sur $[0, +\infty[$. Mais pour tout n , on a $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx = 1$. Cette suite ne converge pas vers $\int_0^{+\infty} f(x) dx = 0$.



On donne ci-dessous un théorème permettant de conclure.

Théorème de convergence dominée, avec condition de convergence uniforme locale

Soit (f_n) une suite de fonctions continues à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} définies sur un intervalle $J = [a, b[$, qui converge uniformément localement vers f .

On suppose qu'il existe une fonction g continue sur $J = [a, b[$ telle que l'intégrale $\int_a^b g(x) dx$ converge, et telle que, pour tout entier n

$$|f_n| \leq g .$$

alors l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ converge, la suite (I_n) définie par

$$I_n = \int_a^b f_n(x) dx ,$$

converge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_a^b f(x) dx .$$

Puisque, pour tout x de J , on a

$$|f_n(x)| \leq g(x) ,$$

on obtient, quand n tend vers l'infini,

$$|f(x)| \leq g(x) ,$$

et comme l'intégrale de g converge, il en est de même de celles de f_n et de f .

Soit $\varepsilon > 0$. il existe un intervalle J_ε dont une borne est b tel que, $u \in J_\varepsilon$, implique

$$0 \leq \int_a^b g(x) dx - \int_a^u g(x) dx = \int_u^b g(x) dx < \frac{\varepsilon}{3} .$$

Fixons un tel u . La suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[0, u]$. Donc il existe N , tel que $n \geq N$ et $x \in [a, u]$ implique

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3(u-a)} .$$

Evaluons la différence

$$\Delta_n = \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| .$$

On a

$$\Delta_n \leq \left| \int_a^u f_n(x) dx - \int_a^u f(x) dx \right| + \left| \int_u^b f_n(x) dx \right| + \left| \int_u^b f(x) dx \right| ,$$

mais

$$\left| \int_u^b f_n(x) dx \right| \leq \int_u^b |f_n(x)| dx \leq \int_u^b g(x) dx < \frac{\varepsilon}{3} ,$$

et de même

$$\left| \int_u^b f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3} .$$

Par ailleurs

$$\left| \int_a^u f_n(x) dx - \int_a^u f(x) dx \right| \leq \int_a^u |f_n(x) - f(x)| dx < (u-a) \frac{\varepsilon}{3(u-a)} = \frac{\varepsilon}{3} .$$

Donc

$$\Delta_n < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon .$$

Ceci montre que la suite (Δ_n) converge vers 0, et donc que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx .$$

□

En appliquant le théorème précédent à la suite des sommes partielles d'une série, on obtient alors le théorème suivant :

Soit (f_n) une suite de fonctions continues à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} définies sur un intervalle $J = [a, b[$. On suppose que la série de terme général f_n converge uniformément localement sur J . Soit f la somme de la série.

On suppose qu'il existe une fonction g continue sur $J = [a, b[$ telle que l'intégrale $\int_a^b g(x) dx$ converge, et telle que, pour tout entier n

$$\left| \sum_{k=1}^n f_k \right| \leq g .$$

alors l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ converge, la série de terme général $I_n = \int_a^b f_n(x) dx$, converge et

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_n = \int_a^b f(x) dx .$$

8. Remarque finale

L'exemple de la fonction $x \mapsto 1/x$ a montré qu'une fonction pouvait tendre vers zéro à l'infini sans que son intégrale converge. On peut se poser la question de la réciproque : est-ce qu'une fonction dont l'intégrale converge tend vers zéro à l'infini. La réponse est également non. Nous donnons ci-dessous une fonction continue positive non bornée dont l'intégrale converge.

Remarque : si par contre f a une limite (finie ou infinie) non nulle à l'infini, alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ diverge.

Il existe une fonction f continue sur $[0, +\infty[$ et vérifiant les conditions suivantes :

pour tout entier n strictement positif

$$f(n) = 2^n$$

$$f(n - 4^{-n}) = f(n + 4^{-n}) = 0$$

f est linéaire affine sur les intervalles $[n - 4^{-n}, n]$ et $[n, n + 4^{-n}]$

f est nulle partout ailleurs.

La fonction f est continue, positive, et puisque $f(n) = 2^n$ tend vers l'infini lorsque n tend vers l'infini, la fonction f n'est pas bornée.

Le graphe de cette fonction est constitué de triangles de base $2/4^n$ et de hauteur 2^n , donc d'aire $I_n = 1/2^n$. Posons

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt .$$

C'est une fonction croissante. Si x est un réel positif. Comme la suite $(n - 4^{-n})_{n \geq 1}$ tend vers l'infini, il existe n tel que

$$x \leq n + 1 - 4^{-(n+1)} ,$$

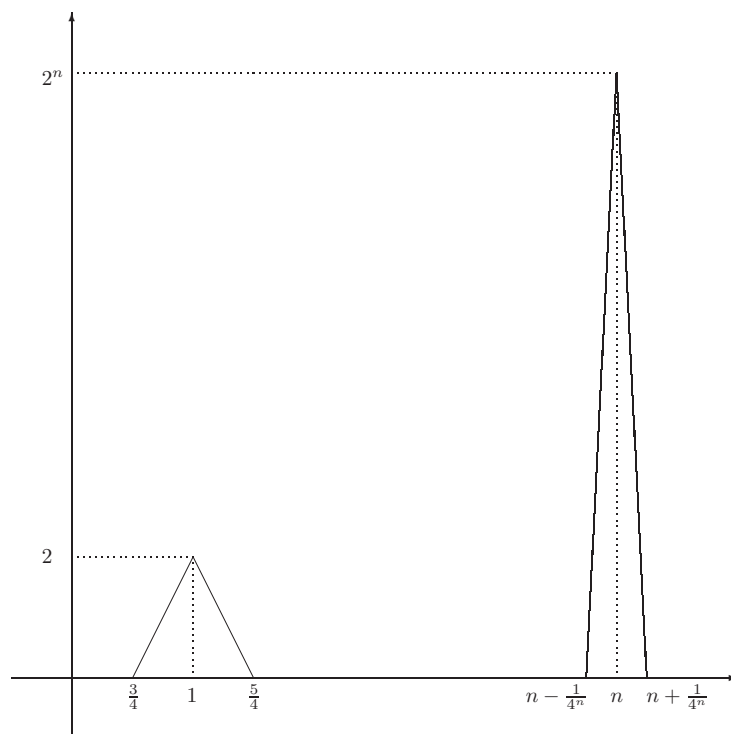
Alors

$$F(x) \leq F(n + 1 - 4^{-(n+1)}) = \sum_{k=1}^n I_k .$$

Mais la somme de droite est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $1/2$, et vaut $1 - 2^{-n}$. Il en résulte que $F(x) \leq 1$. La fonction F est donc majorée et possède une limite quand x tend vers

l'infini. Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge. On a alors

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} F(n + 1 - 4^{-(n+1)}) = 1 .$$



(le dessin ci-dessus n'est pas effectué à l'échelle).