I - Nombres Réels

Pour les mathématiciens grecs de l'école de Pythagore (VIème siècle av. J.C.), les seuls nombres étaient les nombres rationnels. Bien qu'ils aient su que $\sqrt{2}$ n'était pas rationnel, et que cette grandeur est la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1, l'existence de telles grandeurs "incommensurables“ était pour eux un secret bien gardé. Il a fallu attendre la fin du XIX^{e} siècle pour que les mathématiciens comme Peano, Dedekind et Cantor notamment aboutissent par une démarche rigoureuse à la première construction du corps des nombres réels. Dans la chaine d'inclusions suivante : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

C'est l'inclusion $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ qui est la plus mystérieuse et la plus délicate. L'importance des nombres réels, en Mathématique est évidente. La première construction rigoureuse des nombres réels, est dite « méthode des coupures de Dedekind ». Une autre approche possible des nombres réels, se fait par « l'écriture décimale ». Ce point de vue permet une autre construction des nombres réels, qui bien qu'intuitive et naturelle, est techniquement délicate. Ce paragraphe, est purement illustratif.

Voici quelques particularités des nombres données sous formes de remarques :

Remarque-1 : L'écriture décimale des nombres relatifs, qui est le quotient d'un entier relatif par une puissance de 10, se note facilement en base 10 : elle se caractérise par un nombre fini de chiffres après la virgule.

Remarque-2 : L'écriture décimale du quotient de 1 par 3 se note, *sans justification*, à l'aide de pointillés : $1/3 = 0{,}33333$ … Le reste de la division de 1 par 3 ne s'annulant jamais, l'opération ne s'arrête jamais.

Remarque-3 : Pour tout rationnel $r = p/q$ ($p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}^*$), la division de p par q conduit à 2 situations :

- Soit le reste finit par s'annuler, l'opération s'arrête et alors r est *un nombre décimal*.
- soit les restes ne s'annulent pas mais comme ils appartiennent à $\{1,2,\dots,q-1\}$, l'opération ne s'arrêtant jamais, les décimales finissent par réapparaitre périodiquement et la suite du calcul aussi. L'écriture de r est alors infinie mais *périodique* et r est *un nombre rationnel*.

Remarque-4 : un développement décimal infini, non-périodique ne correspond pas à un rationnel.

Exemple-01 : $0,1010010001000010000010000001$ …

Remarque-5 : En fait, tout nombre réel admet un développement décimal illimité, mais pas forcément unique! C'est ainsi que : $1 = 0,999999999$…

Exemples d'irrationnels : $\sqrt{2} = 1,414213562$ … ; $e = 2,718281828$… et $\pi = 3,141592654$…

B1. Le Corps des nombres rationnels

L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, est donné par : $\mathbb{Q} = \{p/q \,|(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*\}$. Muni des opérations d'addition «+» et de multiplication «×» ou «·» ·, et de l'ordre « ≤ », $\mathbb{Q}$ possède les propriétés suivantes :

D1. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Les opérations + et ×, ainsi que la relation d'ordre ≤ prolongent celles de $\mathbb{Z}$.

D2. L'addition + sur $\mathbb{Q}$ vérifie les propriétés suivantes :

Associativité ∧ Elément neutre 0 ∧ symétrie (opposé) ∧ Commutativité.

Ces 4 propriétés procurent à $\mathbb{Q}$ muni de la loi $+$, noté $(\mathbb{Q},+)$ une structure algébrique de **groupe abelien** (ou groupe commutatif).

D3. La multiplication $\times$ ou $\cdot$ sur $\mathbb{Q}$ vérifie les propriétés suivantes :

Associativité $\wedge$ élément neutre 1 ou élément unité $\wedge$ symétrique (inverse) $\wedge$ distributivité de la «$\times$» par rapport à «$+$» $\wedge$ commutativité.

Ces propriétés en D3 assurent à $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ une structure algébrique dite de ***corps commutatif***.

D4. La relation d'ordre $\leq$ vérifie sur $\mathbb{Q}$ les propriétés suivantes :

a. « $\leq$ » est une relation d'ordre total : $\forall x,y \in \mathbb{Q},\ x \leq y$ ou $y \leq x$,
b. Compatibilité de « $+$ » avec l'ordre : $\forall x,y,z \in \mathbb{Q},\ x \leq y \ \Rightarrow\ x+z \leq y+z$,
c. Compatibilité de « $\cdot$ » avec la relation d'ordre : $\forall x,y \in \mathbb{Q}, a \in \mathbb{Q}^+, x \leq y \ \Rightarrow\ a \cdot x \leq a \cdot y$,
d. Propriété d'Archimède : $\forall x,y \in \mathbb{Q}, \exists n \in \mathbb{N}, n > 1;\ n \cdot y > x$.

Les points (a. b. c. d.) en D4 assurent à $(\mathbb{Q},+,\ \cdot,\leq)$ une structure algébrique dite de ***corps commutatif totalement ordonné***.

1. remarque-07

Ces 4 propriétés ne *suffisent pas à caractériser entièrement* $\mathbb{Q}$. Mais $\mathbb{Q}$ est le plus petit corps qui possède ces 4 propriétés.

B2. L'Insuffisance des nombres rationnels

C1. Nombres irrationnels

Il existe des grandeurs *naturelles* qui ne sont pas rationnelles. Ainsi, le théorème de Pythagore, donne la longueur « x » de la diagonale d'un carré de côté 1 par l'équation en x : $x^2 = 1+1$. Mais cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$ car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Ainsi, les nombres rationnels ne pouvant pas *tout mesurer*. Nous devons considérer, donc un ensemble de nombres plus riches. C'est l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Les nombres non-rationnels sont, alors, dits **irrationnels**. Cependant $\mathbb{Q}$ contient des nombres très proches des nombres irrationnels. Dans la pratique, avoir affaire à un nombre irrationnel comme $\sqrt{2}$, nous amène plutôt à chercher des valeurs rationnelles approchées de ces irrationnels, mais avec une précision donnée.
L'écriture décimale, en donne une valeur approchée avec un certain nombre de chiffres *après la virgule*. Les nombres décimaux peuvent assurer ces approximations. Ainsi, par exemple, la méthode de *dichotomie*, en analyse numérique, fait partie de ces outils d'approche.

1. Définition-01 (nombre décimal)

Un rationnel $r \in \mathbb{Q}$ est dit décimal s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $10^n r \in \mathbb{Z}$.

C2. Borne supérieure ou inférieure

Certaines définitions seront données, ici, pour $(X,\leq)$ un ensemble ordonné. Elles seront utilisées notamment pour $X = \mathbb{R}$.

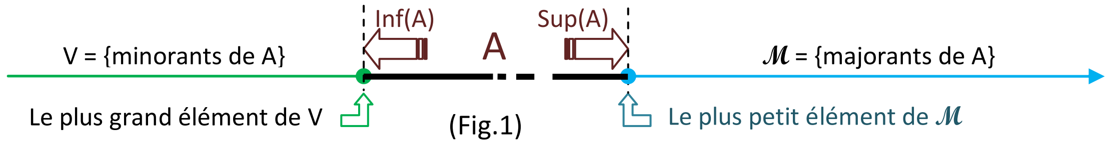
2. Définition-02 (*Majorant et minorant*)

Majorant : Soit $A \neq \emptyset, A \subset X$. A est dite *majorée par* $a \in X$ si par définition :
$\forall x \in A, x \leq a$. On dit encore que a *est un majorant* de A.
Minorant : Soit $A \neq \emptyset, A \subset X$. A est dite *minorée par* $m, m \in X$ si par définition :
$\forall x \in A, m \leq x$. On dit encore que m *est un minorant de* A.

3. Définition-03 (*Partie bornée*)

Soit une partie non vide $A \subset X$. A est dite *bornée* si A est à la fois *minorée et majorée* : $\exists a,b \in X \mid \forall x \in A,\ a \leq x \leq b$.

4. Définition-04 (*plus petit et plus grand élément*)
   Plus grand élément : On dit que $A \neq \emptyset, A \subset X$ admet un *plus grand élément* si par définition : $\exists a \in A \mid \forall x \in A, x \leq a$. On note alors : $a = max(A)$.
   Plus petit élément : De même $A \neq \emptyset, A \subset X$ admet un *plus petit élément* si par définition : $\exists a \in A \mid \forall x \in A, a \leq x$. On note alors : $a = min(A)$.
5. Définition-05 (*Bornes d'une partie*)
   Borne supérieure : Soit $A \neq \emptyset; A \subset X$ majorée, et $\mathcal{M}$ l'ensemble des majorants de A. Si $\mathcal{M}$ admet un plus petit élément, on l'appelle *borne supérieure de* A qu'on note $Sup(A)$. C'est le *plus petit des majorants de* A, c'est-à-dire : $Sup(A) = Min(\mathcal{M})$.
   Borne inférieure : Soit $A \neq \emptyset; A \subset X$, minorée, et V l'ensemble des minorants de A. Si V admet un plus grand élément, on appelle *borne inférieure de* A qu'on note $Inf(A)$. C'est le *plus grand des minorants de* A, c'est-à-dire : $Inf(A) = Max(V)$.



(Fig.1)

6. Remarque-08 (*passage $\mathbb{Z}$ de à $\mathbb{Q}$*)
   On peut affirmer qu'*un plus grand élément de A est un majorant de A qui est dans A*.
   Dans l'ensemble $\mathbb{Z}$, *toute partie A non vide et majorée, admet un plus grand élément*.
   De même que *toute partie A non vide et minorée, admet un plus petit élément*.
   Ce *résultat n'est plus vrai dans $\mathbb{Q}$!*
7. Exemple-02
   Soit $\mathbb{Q}_-^* = \{x \in \mathbb{Q}; x < 0\}$. $\mathbb{Q}_-^*$ est clairement une partie non-vide de $\mathbb{Q}$ majorée par 0. Mais aucun des éléments de $\mathbb{Q}_-^*$ n'est le plus grand. En effet si $x < 0$, on a aussi $x < x/2 < 0$ (en multipliant par $x < 0$ l'inégalité $1/2 < 1$). Donc à tout $x \in \mathbb{Q}_-^*$ on trouve $x' \in \mathbb{Q}_-^*$ et $x < x'$.
   Cet exemple, montre que 0 joue un rôle particulier : $0 \notin \mathbb{Q}_-^*$mais ***il est sur la frontière de*** $\mathbb{Q}_-^*$, en quelque sorte. La définition suivante précise cette notion de « frontière ».
8. Proposition-01 (*borne supérieure atteinte*)
   Si $A \subset X$ admet un plus grand élément alors il est aussi la borne supérieure et alors $Sup(A) = Max(A)$. On dit alors que la borne supérieure est *atteinte* : $Sup(A) \in A$.
9. Preuve
   Il suffit de noter que si M est un majorant de A, alors $M \geq Max(A) \in A$. Par ailleurs $Max(A)$ est par définition un majorant de A, donc clairement le plus petit majorant. ■
10. Remarque-09 (*Borne supérieure de $\mathbb{Q}_-^*$*)
    Des parties A qui n'ont pas de plus grand élément peuvent admettre une borne supérieure qui, dans ce cas, n'est pas dans A, on dit alors que $Sup(A)$ n'est pas atteint.
    La *notion de $Sup(A)$* vient élargir celle « *de plus grand élément de A » aux* parties A qui n'admettent pas de plus grand élément.
11. Exemple-03 (*plus grand élément de $\mathbb{Q}_-^*$*)
    $\mathbb{Q}_-^*$, n'a pas de plus grand élément mais admet une borne supérieure : $Sup(\mathbb{Q}_-^*) = 0$.

Très schématiquement, on peut dire que l'ensemble $\mathbb{Q}$ possède des « *trous* », *éparpillés, très rapprochés* les uns des autres, qu'il faut « combler » pour obtenir l'ensemble de tous les nombres réels.

B3. Le corps des nombres Réels

L'existence de $\mathbb{R}$ peut-être établi rigoureusement par une "construction", c'est à dire par un procédé qui décrit les nombres réels à partir des ensembles déjà connus (par exemple $\mathbb{Q}$) et par les opérations licites ou permises de la théorie des ensembles.
L'important étant que les propriétés décrites puissent définir de façon unique l'ensemble des nombres réels. Nous admettrons ici, qu'il existe un ensemble $\mathbb{R}$ contenant $\mathbb{Q}$ et que les propriétés de $\mathbb{R}$ sont les mêmes que celles de $\mathbb{Q}$, à l'exception de *la propriété de la borne supérieure,* qui peut être considérer comme un *« bonus »* propre à $\mathbb{R}$.

C1. Propriété des nombres réels

En reprenant la partie B1 avec les propriétés D1, D2, D3, D4 et D5 pour le compte de l'ensemble des nombres réels, on arrive à :
L'ensemble des nombres réels, muni des opérations additive $+$ et multiplicative $\times$ ainsi que de la relation d'ordre usuel $\leq$, noté symboliquement $(\mathbb{R},+,\times,\leq)$, possède une structure algébrique de *corps commutatif archimédien complet*.

C2. Propriété de la borne supérieure en pratique

D1. Propriété de la borne supérieure

Toute partie A non vide et majorée (respectivement minorée) de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure (respectivement borne inférieure).

La *propriété de la borne supérieure* (D1) *marque la différence majeure* entre l'ensemble des nombres *rationnels* $\mathbb{Q}$ et celui des nombre *réels* $\mathbb{R}$. La proposition suivante permet de vérifier qu'un réel donné représente bien la borne supérieure d'une partie réelle A, non vide, donnée.

1. Proposition-02 (*caractérisation de la borne supérieure*)
   Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, alors le nombre réel $\sup(A)$ est caractérisée par l'équivalence suivante :
   $$S = \sup(A) \iff \begin{cases} (1) & \forall x \in A, x \leq S, \\ (2) & \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \mid S - \varepsilon < a < S. \end{cases}$$
2. Remarque-10
   Les propriétés (1) et (2) assurent les deux exigences de la définition de la borne supérieure c'est-à-dire :
   (1) Exprime que S doit être un majorant de A.
   (2) Exprime que tout réel $S^{'} = S - \varepsilon$, inférieur au majorant S de A n'est pas un majorant de A car $\exists a \in A \mid S' < a$.

   Preuve :
   La propriété (1) traduit le fait que S est un majorant de A et la propriété (2) traduit le fait que tout nombre réel $S_0 (= S - \varepsilon) < S$ n'est pas un majorant de A autrement dit S est un majorant de A et tous les majorants de A sont $\geq S$, donc S est le plus petit des majorants de A. ■
3. Exercice-01 (*Passage : « Sup » vers « Inf »*)(*)
   Montrer que si $A \subset \mathbb{R}$ est une partie non-vide et minorée, alors l'ensemble $-A$ définit par $-A = \{x \in \mathbb{R}; -x \in A\}$ est majoré. En déduire que A admet une borne inférieure donnée par : $inf(A) = -sup(-A)$.
   On retiendra ici que *toute partie non-vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure*.
4. Exercice-02 (*la multiplication et l'ordre*)
   En utilisant (3) et les propriétés de $\mathbb{R}$ muni de «+» et «×» réécrire (3) avec : $a < 0$.
   (3) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}\ \ et\ a \in \mathbb{R}^{+};\quad x \leq y \Longrightarrow a \cdot x \leq a \cdot y$.

5. corollaire-01 (sup d'une partie majorée) : $\forall$ b $\in \mathbb{R}$, on a : $\sup(\,]-\infty, \mathrm{b}[\,) = \mathrm{b}$.
   Preuve (Indication)
   Vérifier les 2 points de la caractérisation d'une borne supérieure de $A \neq \emptyset, A \subset \mathbb{R}$.
   N'oubliez pas que $sup(A)$ n'appartient pas nécessairement à A.
6. proposition-03
   Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble qui a un plus grand élément et $M \in \mathbb{R}$. Alors
   $max(A) \leq M \Leftrightarrow \forall x \in A, x \leq M$,
   $max(A) < M \Leftrightarrow \forall x \in A, x < M$.
   On a des résultats analogues si A admet un plus petit élément $min(A)$.
   Preuve (indications)
   Pour $\boxed{\Rightarrow:}$ Utiliser $\forall x \in A, x < \max(A)$. Pour $\boxed{\Leftarrow:}$ Appliquer la propriété pour $x = max(A) \in A$.

Les bornes supérieures (ou inférieures) se manipulent presque de la même manière.

7. proposition-04
   Soient A une partie de $\mathbb{R}$ non-vide et majorée et $M \in \mathbb{R}$. Alors on a :
   $sup(A) \leq M \Leftrightarrow \forall x \in A, x \leq M$,
   $sup(A) < M \Longrightarrow \forall x \in A, x < M$,
   $sup(A) \leq M \Longleftarrow \forall x \in A, x < M$.
   On a des résultats analogues pour $\inf(A)$ lorsque A est non-vide et minoré.
   Preuve :
   Pour $\boxed{\Rightarrow:}$ Utiliser $\forall x \in A, x \leq \sup(A)$ car $\sup(A)$ majore A.
   Pour $\boxed{\Leftarrow:}$ si $\forall x \in A, x \leq \mathrm{M}$ alors M majore A, donc $M \geq sup(A)$ qui est le plus le petit majorant de A. La dernière implication est évidente : $x < M \Longrightarrow \mathrm{x} \leq \mathrm{M}$. ■
8. Remarque-11 (Attention)
   Les 2 derniers points de prop-04 ne sont pas des équivalences comme avec prop-03.
9. proposition-05
   Soit A partie de $\mathbb{R}$ non-vide et majorée et $M \in \mathbb{R}$. Alors on a :
   $sup(A) > M \Leftrightarrow \exists x \in A, x > M$,
   $sup(A) \geq M \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, x \geq M - \varepsilon$,
   On a des résultats analogues pour $\inf(A)$ lorsque A est non-vide et minoré.

C3. Les intervalles

Dans $\mathbb{R}$, il y a plusieurs types d'intervalles : finis, infinis, bornés, fermés ou ouverts …
Pour tout couple de nombres réels a, b, on définit un intervalle dit « intervalle a b » par :

D1. Les intervalles fermés bornés
   Intervalle « fermé $a\ b$ » : $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$.
   Cas particuliers : si $\mathrm{a} = \mathrm{b}$; $[a, b] = \{a\} = \{b\}$ et si $\mathrm{a} > \mathrm{b}$; $[a, b] = \emptyset$.

D2. Les intervalles ouverts bornés
   Intervalle « ouvert $a\ b$ » : $]a, b[= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$. Si $a \geq b$; $]a, b[= \emptyset$

D3. Les intervalles semi-ouverts bornés
   Intervalle « semi-ouvert $a\ b$ » à droite : $[\mathrm{a}, \mathrm{b}[= \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}; \mathrm{a} \leq \mathrm{x} < b\}$. Si $\mathrm{a} \geq \mathrm{b}$; $[\mathrm{a}, \mathrm{b}[= \emptyset$
   Intervalle « semi-ouvert $a\ b$ » à gauche : $]\mathrm{a}, \mathrm{b}] = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}; \mathrm{a} < x \leq b\}$. Si $\mathrm{a} \geq \mathrm{b}$; $]\mathrm{a}, \mathrm{b}] = \emptyset$

D4. Les demi-droites fermées
   C'est de la forme : $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x\}$ ou bien $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R};\ x \leq b\}$.

D5. Les demi-droites ouvertes

C'est de la forme : $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}; a < x\}$ ou bien $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R};\ x < b\}$.

Sans perdre de vue l'intervalle $\mathbb{R}$, appelé aussi, la *droite réelle achevée* : $\mathbb{R} = \ ]-\infty, +\infty[$.

En pratique une seule proposition peut décrire l'ensemble de tous les intervalles de $\mathbb{R}$.

10. proposition-06

    Une Partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si $\forall x, y \in I; [x, y] \subseteq I$.

11. Preuve (indications)

    Il est clair que tous les types d'intervalles déjà décrits vérifient la proposition. Mais il n'est pas évident que si I vérifie la proposition, I est un intervalle. Pour le voir, on se restreint au cas $I \neq \emptyset$. Il faut alors envisager toutes les possibilités pour I, majoré ou non, minoré ou non, majoré et minoré, puis voir si les bornes sont atteintes ou non.

12. Remarque-12

    Cette dernière proposition permet, par exemple, de voir immédiatement que :

    L'intersection de deux intervalles est un intervalle (éventuellement vide).

    La réunion de deux intervalles d'intersection non-vide, est un intervalle. (Pourquoi ?)

D6. La droite réelle et la *fonction valeur absolue*

L'ensemble ordonné $\mathbb{R}$ peut être *représenté géométriquement* par une *droite orientée* munie d'une *origine* O symbolisant le nombre *réel* 0. Chaque nombre *réel* x est alors représenté par un *point unique* M de la droite de telle sorte que si $x > 0$ (resp. $x < 0$) le segment OM soit orienté positivement (resp. négativement) et sa longueur soit égale à la valeur absolue de x notée $|x|$. Rappelons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit la valeur absolue de x comme étant le plus grand des deux nombres réels x et $-x$:

$$|x| = max\{x, -x\} = \begin{cases} x \ si\ x \geq 0, \\ -x\ si\ x < 0. \end{cases}$$

Quelques propriétés de la fonction valeur absolue :

i. $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$,
ii. $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x + y| \leq |x| + |y|$, (*inégalité triangulaire*)
iii. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
iv. $|x| \leq t \Leftrightarrow -t \leq x \leq t$,
v. $\forall \varepsilon > 0, |x| \leq \varepsilon \Longrightarrow x = 0$, (version subtile de (iii))

13. Définition-06 (voisinage de a à ε-près)

    Soit $a \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, l'intervalle fermé dit de centre a de rayon ε noté $\bar{I}(a, \varepsilon)$ est donné :

    $\bar{I}(a, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}, a - \varepsilon \leq x \leq a + \varepsilon\} = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$; L'intervalle noté $I(a, \varepsilon)$ est :

    $I(a, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}, a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\} = \ ]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$; il est dit ici ouvert.

    $\forall a, b \in \mathbb{R}$, on peut définir $\bar{I}(c, \varepsilon)$ ou bien $I(c, \varepsilon)$ avec $c = (a + b)/2\,, \varepsilon = (b - a)/2$.

D7. L'inclusion de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ et la fonction parties entières

Tout nombre réel est compris entre deux nombres entiers relatifs. C'est une conséquence immédiate de la propriété d'Archimède de $\mathbb{R}$.

1. proposition-07 ($partie\ enti\grave{e}re$)

   Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors il existe un entier relatif $n \in \mathbb{Z}$ unique vérifiant la propriété suivante :

   $$(E) \quad n \leq x < n + 1.$$

2. Preuve

   Si $x \in \mathbb{Z}$: Observons x est un nombre entier, alors en posant $n = x$ la propriété (E) est vérifiée puisque on a : $n = \lfloor x \rfloor = x \leq x < n + 1$

   Si $x \notin \mathbb{Z}$: la propriété d'Archimède, $\exists\ N \in \mathbb{N} \mid N > x$, deux cas sont à étudier :

   Si $x \geq 0$: Considérons $A = \{p \in \mathbb{N} \mid p \leq x\}$. $A \neq \emptyset$ car $0 \in A$, et N majore A, et A admet $\max(\mathrm{A}) = \sup(A) \in \mathbb{N}$. et bien sûr $n = \lfloor x \rfloor$ vérifie (E).

Si $x < 0$: alors $-x > 0, -x$ est un nombre réel non-entier. Si on pose $N = \lfloor -x \rfloor$ alors $N \in \mathbb{N}$ vérifie la propriété i.e. $N \leq -x < N + 1$. Alors $n = -N - 1$, vérifie les inégalités $n < x < n + 1$, ce qui prouve que : $\lfloor -x \rfloor = n = -\lfloor -x \rfloor - 1$. ■

D8. L'inclusion de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et la fonction densité des rationnels

Même si les nombres rationnels ne remplissent pas tout $\mathbb{R}$ ils se situent partout dans $\mathbb{R}$.

3. proposition-08 ($\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$)
   Soient a, b deux nombres réels tels que $a < b$. Alors dans l'intervalle $I =]\,a, b[$ il existe au moins un nombre $r \in \mathbb{Q}$ tel que , $r \in I$. On dit alors que $\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$.
4. Preuve
   On cherche $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $a < p/q < b$ i.e. $aq < p < bq$. Pour ce faire, grâce à la propriété d'Archimède, on commence par choisir un entier $q > 1$ tel que $q(b - a) > 1$. Alors l'entier $p = \lfloor qa \rfloor + 1$ vérifie $qa < \lfloor qa \rfloor + 1 \leq qa + 1 \leq qb$ et donc $qa < p < qb$ de sorte que le nombre rationnel p/q convient. Ce qui donne le résultat. ■
5. Remarque-13
   S'il existe un irrationnel $r \in I =]a, b[$ avec $a < b$ alors il existe une infinité d'irrationnels dans I. car si $\exists r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \mid r \in I$ il y en a un dans $]a, r[$ et un dans $]r, b[$ et en itérant le processus on en trouve autant que l'on veut.
   L'ensemble des irrationnels $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ possède la même propriété.
6. corollaire-02 (irrationnel dans $]a, b[$, $(a < b)$)
   Soient a, b deux nombres réels tels que $a < b$. Alors dans l'intervalle $I =]\,a, b[$ il existe au moins un nombre irrationnel $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (et donc une infinité) tel que $a < c < b$.
7. Preuve
   En effet, comme $a < b$, on $a/\sqrt{2} < b/\sqrt{2}$ et d'après la proposition précédente, il existe un nombre rationnel $r \in \mathbb{Q}$ tel que : $a/\sqrt{2} < r < b/\sqrt{2}$, autrement dit $a < r\sqrt{2} < b$. Comme $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, on en déduit que $r\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ce qui prouve la propriété voulue. ■
8. Remarque-14
   L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dénombrable c'est-à-dire qu'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. $\mathbb{R}$ est non-dénombrable ainsi que tout intervalle $]a, b[$ avec $a < b$. Il en résulte que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'est pas dénombrable ce qui, en quelque sorte, signifie qu'il y a plus de nombres irrationnels que de nombres rationnels. Ainsi dans $]a, b[\neq \emptyset$ il y a une infinité d'irrationnels : il y en a même « beaucoup plus » que de nombres rationnels.

B4. Plus de corps de nombres

C1. Exemples d'autres corps de nombres

Il y a bien d'autres corps archimédiens K, S plus riches que l'ensemble $\mathbb{Q}$ et moins riches que $\mathbb{R}$.

Voici deux exemples :

(1) $K = \{r + r'\sqrt{2}; r, r' \in \mathbb{Q}\}$.

(2) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \text{où } a_i \in \mathbb{N}, i = 0,1, \ldots, n\}$

S : est l'ensemble des racines réelles, d'un polynôme de degré n à coefficients entiers naturels.

Veuillez signaler aux chargé(e)s de TD, ou chargé de cours, toute erreur constatée dans ce document, merci.