B1. Introduction

Une suite de nombres réels peut être définie de deux principales façons, soit comme :

- Une application $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui associe à un entier n un nombre réel u_n.
- Une partie dénombrable $A \subseteq \mathbb{R}$ indexée sous la forme : $A = \{u_0, u_1, \cdots, u_n, \cdots\}$.

La *problématique* de la suite, consiste à déterminer la *nature de la suite* qui peut être : soit convergente, soit divergente, soit sans limite.

Définition-01 (suite réelle)

Une suite de nombres réels notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une succession de nombre réels indexés par des nombres entiers naturels croissants. L'indexation peut démarrer à partir de n'importe quel nombre entier naturel. L'étude de la nature d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, consiste à trouver sa *nature* qui est déterminée par l'une des trois situations suivantes :

1) Si $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n) = l\,; l \in \mathbb{R}$: la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *convergente* vers l, ou bien de *limite* l.
2) Si $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n) = \pm\infty$: la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *divergente* ou bien de *limite infinie* $\pm\infty$.
3) Si $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n)$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$: la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *divergente* ou bien *sans limite*.

On dira qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, vérifie une propriété $(\mathrm{P(n)})$ à partir d'un certain rang (N) si par définition :

$$\exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} \mid \mathrm{n} \geq \mathrm{N} \Longrightarrow \mathrm{P(n)} \text{ Vraie.}$$

Exemple-01 :

a) $u_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*;$ | b) $v_n = \sqrt{n-4}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2,3\};$ | c) $w_n = \frac{\ln(n-3)}{n(n-10)}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2,3,10\}.$

Convergence de suites

Définition-02 (suite convergente)

Une suite de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite convergente vers le nombre réel l si par définition l'une des deux propriétés suivantes est vérifiée :

1i) $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n) = l$.
2i) $\forall\varepsilon > 0; \exists N \in \mathbb{N}^* \mid \forall \mathrm{n} \geq \mathrm{N};\ |u_n - l| < \varepsilon$.

Remarque-01

Pour tout entier positif N, la modification des N premiers termes d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels, ne modifie pas sa nature. La suite $(\mathrm{w_n})$ de l'exemple-01 a la même nature que la suite $(\mathrm{t_n})$ définie par :

$$(t_n) = \begin{cases} \alpha_n\,, & si\ 0 \leq n \leq 10 \\ w_n\,, & si\ 11 \leq n \end{cases} \quad \text{avec} \quad \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ pour } 0 \leq n \leq 10.$$

Seul le comportement du terme général u_n au voisinage de $n \to +\infty$ détermine la nature de la suite réelle quelconque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Unicité de la limite

proposition-01 (unicité de la limite)

Lorsque la limite d'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe, elle est unique, autrement dit :

la $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n)$ existe signifie que : $\exists!\, l \in \mathbb{R} \mid \lim\limits_{n\to\infty} (u_n) = l$. (rappel : « ! » signifie UNIQUE)

Preuve :

Supposons que la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non-unique : alors (u_n) admet deux limites i.e. :
$\exists l, l' \in \mathbb{R}$ tels que $l \neq l'$ et on a $\left(\lim\limits_{n\to\infty} (u_n) = l\right)$ et $\left(\lim\limits_{n\to\infty} (u_n) = l'\right)$. Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}(l + l')$ alors :
$\exists N_1 \mid n \geq N_1 \ \mid u_n - l| < \varepsilon$, et de même $\exists N_2 \mid n \geq N_2 \ \mid u_n - l'| < \varepsilon$ pour $n \geq \max_{1\leq i\leq 2} N_i$ en sommant :
$|l - l'| \leq |l - u_n| + |\, u_n - l'| < 2\varepsilon = |l - l'|$ on a donc : $|l - l'| < |l - l'|$ ce qui est une contradiction !

Donc $l = l'$. La limite est donc bien unique ! ■

proposition-02 ((a_n) et (u_n) suites tq $|a_n - l| \leq u_n;\ u_n \to 0$)

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et $l \in \mathbb{R}$. S'il existe une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres positifs vérifiant : $|a_n - l| \leq u_n$ à partir d'un certain rang et $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n) = 0.$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n) = l.$

Preuve :

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque, puisque $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n) = 0 \Longrightarrow [\exists N_0 > 0 \mid n \geq N_0, |u_n - 0| < \varepsilon]$ par ailleurs d'un certain rang $N_1 > 0$ on a aussi $n \geq N_1, |u_n - l| \leq u_n$ finalement si $n \geq max\{N_0, N_1\}$ on arrive à :

$[|u_n - l| \leq u_n \leq |u_n| = |u_n - 0| < \varepsilon] \Longrightarrow \ |u_n - l| < \varepsilon$ ce qui montre bien que : $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n) = l.$ ■

proposition-03 (suites de la forme : $\left(a/n^k\right)_{n\geq 1}$; $(a.r^n)_{n\in\mathbb{N}}$)

Soit a un nombre positif, on a les résultats suivants :

1i) $\forall k \in \mathbb{N}^*, \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a}{n^k}\right) = 0.$
2i) $\forall r \in \mathbb{R} \mid 0 < r < 1, \lim\limits_{n\to\infty} (ar^n) = 0.$

Preuve :

Résultat-1i)

Si $k = 1$: Soit $\varepsilon > 0$ qcq, comme $\mathbb{R}$ est archimédien, $\exists N \in \mathbb{N} \mid N\varepsilon > a$. Si $n \geq N$ on a $\left|\frac{a}{n} - 0\right| = \frac{a}{n} < \varepsilon.$

Si $\boldsymbol{k \geq 2}$: si $n \geq 1$, on a $n^{k-1} \geq 1$ et donc $n^k = n \times n^{k-1} \geq n$. On a donc finalement :

$\left|\frac{a}{n^k} - 0\right| = \frac{a}{n^k} \leq \frac{a}{n}$ pour $n \geq 1$, et donc d'après ce qui précède ($k = 1$) on a bien : $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a}{n^k}\right) = 0.$ ■

Résultat-2i)

Si $\boldsymbol{r} < 1$, alors $\frac{1}{r} > 1$ et on a pour $n \geq 1$: (formule du binôme)

$$\left(\frac{1}{r}\right)^n = \left(1 + \left(\frac{1}{r} - 1\right)\right)^n = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{r} - 1\right)^i . 1^{n-i} = 1 + C_n^1 \left(\frac{1}{r} - 1\right) + \cdots + C_n^{n-1} \left(\frac{1}{r} - 1\right)^{n-1} + C_n^n \left(\frac{1}{r} - 1\right)^n$$

$\left(\frac{1}{r}\right)^n \geq n\left(\frac{1}{r} - 1\right)$ car les $(n+1)$ termes de la somme, ci-dessus, sont positifs. Donc pour $n \geq 1$ on a :

$|ar^n - 0| = ar^n \leq a\frac{r}{n(1-r)}$. D'après 1i) pour $k = 1$ et la proposition-02 on déduit que : $\lim\limits_{n\to\infty} (ar^n) = 0.$ ■

B2. Limites et inégalités

Définition-03 (Majorant, minorant, bornes, extremum)

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels et $M, M_0, m, m_0, S, P \in \mathbb{R}$, on définit les notions suivantes :

- La suite (a_n) admet un minorant m ou est minorée par m si : $\exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Longrightarrow m \leq a_n$.
- La suite (a_n) admet un majorant M ou est majorée par M si : $\exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Longrightarrow a_n \leq M$.
- La suite (a_n) admet une borne inférieure m_0 notée $m_0 = inf\{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}$ ou $m_0 = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}}(a_n)$ si m_0 est le plus grand minorant de la suite (a_n).
- La suite (a_n) admet une borne supérieure M_0 notée $M_0 = sup\{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}$ ou $M_0 = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}(a_n)$ si M_0 est le plus petit majorant de la suite (a_n).
- La suite (a_n) est dite bornée si elle admet un minorant et un majorant ou si elle est minorée et majorée.
- La suite (a_n) admet un minimum ou un plus petit élément α_p si : $\alpha_p \in (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_p \leq a_n$. On note alors : $\min\limits_{n\in\mathbb{N}}(a_n) = \alpha_p$ et bien sur $\exists p \in \mathbb{N} \mid a_p = \alpha_p$. (c'est-à-dire α_p est un élément de la suite)
- La suite (a_n) admet un maximum ou un plus grand élément α_g si : $\alpha_g \in (a_n)$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq \alpha_g$. On note alors : $\max\limits_{n\in\mathbb{N}}(a_n) = \alpha_g$ et bien sur encore $\exists g \in \mathbb{N} \mid a_g = \alpha_g$. (c'est-à-dire α_g est un élément de la suite).
  Le mot extremum désigne indifféremment un maximum ou un minimum.

Remarque-02 (Majorant, minorant, bornes, extremum)

Attention ! L'existence des bornes d'une partie réelle ne garantit pas l'existence d'extrémums pour cette partie.

Exemple-02 : Soit $A =]0,1[$.

On a : $inf(A) = 0$, $sup(A) = 1$ mais A n'admet pas d'extrémums c'est-à-dire : A n'admet ni minimum ni maximum. Autrement dit $\nexists m \in A \mid m = \inf(A)$ de même que $\nexists M \in A \mid M = \sup(A)$.

proposition-04 (suite convergente et suite bornée)

Toute suite réelle convergente est bornée. Formellement : $\exists l \in \mathbb{R} \mid \left[\lim_{n\to\infty} (u_n) = l\right] \Rightarrow [\exists A \in \mathbb{R}_+^* \mid |a_n| \leq A]$

Preuve :

On a $\lim_{n\to\infty} (u_n) = l$, on peut écrire $\exists N > 0 \mid n \geq N$ on a $|a_n - l| < 1 \Leftrightarrow -1 < a_n - l < 1 \Rightarrow |a_n| < 1 + |l|$.
Si on pose $A = \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{N-1}|, 1 + |l|\}$ on a bien $|a_n| \leq A, \forall n \in \mathbb{N}$. ■

proposition-05 (suite $a_n \longrightarrow l$ $(l < b) \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} | n \geq N \Rightarrow a_n < b$)

Soient une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui admet une limite l et b un nombre réel quelconque. Alors on a :

Si $b < l$ alors $\exists N > 0 \mid \forall n \geq N \Longrightarrow b < a_n$.
Si $l < b$ alors $\exists N > 0 \mid \forall n \geq N \Longrightarrow a_n < b$.

Preuve :

Cas $b < l$: soit $\varepsilon = l - b > 0$. $\exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}; n \geq N \Longrightarrow [|a_n - l| < \varepsilon]$ (1). Or $(1) \Longrightarrow -(l - b) < a_n - l$, c'est-à-dire : $b < a_n$. On procède de la même manière pour la cas $l < b$. ■

Théorème-01 (Passage à la limite dans une inégalité)

Soient une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente et b un nombre réel. Nous avons les résultats suivants :

- Si $[\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} \mid n \geq N \Longrightarrow a_n \leq b]$ alors on a nécessairement : $\lim_{n\to\infty} a_n \leq b$. En particulier si il existe un certain rang N tel que $a_n \leq b$ on a nécessairement : $\lim_{n\to\infty} a_n \leq b$.
- Si $[\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} \mid n \geq N \Longrightarrow a_n \geq b]$ alors on a nécessairement : $\lim_{n\to\infty} a_n \geq b$. En particulier si il existe un certain rang N tel que $a_n \geq b$ on a nécessairement : $\lim_{n\to\infty} a_n \geq b$.

Preuve :

C'est la contraposée de la proposition-05 qui s'écrit : $(\exists N \in \mathbb{N} | \forall n \geq N \Longrightarrow a_n > b)$ et dont la contraposée est : $(\forall N \in \mathbb{N} | \exists n \geq N \Longrightarrow a_n \leq b)$ qui est la formulation du théorème-01. ■

B3. Opérations sur les suites

Théorème-02 (Opérations sur les suites: $(\mathrm{a_n} + \mathrm{b_n}), (\mathrm{a_n} \times \mathrm{b_n}), (\lambda . \mathrm{a_n})$.)

Soient deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes. Alors Nous avons les résultats suivants :

1i) La suite $(\mathrm{a_n} + \mathrm{b_n})$ est convergente et on a $\lim_{n\to\infty} (\mathrm{a_n} + \mathrm{b_n}) = \lim_{n\to\infty} (\mathrm{a_n}) + \lim_{n\to\infty} (\mathrm{b_n})$. Ce qui se lit :
la limite d'une somme est la somme des limites.

2i) La suite $(a_n . b_n)$ est convergente et on a $\lim_{n\to\infty} (\mathrm{a_n} \cdot \mathrm{b_n}) = \lim_{n\to\infty} (\mathrm{a_n}) \cdot \lim_{n\to\infty} (\mathrm{b_n})$. Ce qui se lit :
la limite d'un produit est le produit des limites.

3i) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la suite (λa_n) converge et on a $\lim_{n\to\infty} (\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot \lim_{n\to\infty} (a_n)$.
la limite d'un produit d'un scalaire par une suite est le produit du scalaire par la limite de la suite.

Preuve :

On pose $a = \lim_{n\to\infty} (a_n)$ et $b = \lim_{n\to\infty} (b_n)$.

Montrons 1i)

Soit $\varepsilon > 0$, montrons que : $\exists N > 0 \mid \forall n \in \mathbb{N}; n \geq N \Longrightarrow |(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon$. On a :

D'une part $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, $a = \lim_{n\to\infty} (a_n)$, donc $\exists N_a > 0 \mid \forall n \in \mathbb{N}; n \geq N_a \Longrightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ (1).

D'autre part $\frac{\varepsilon}{2} > 0, b = lim_{n\to\infty}(b_n)$, donc $\exists N_b > 0 \mid \forall n \in \mathbb{N}; n \geq N_b \Longrightarrow |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ (2).

L'addition des expressions (1) et (2) donne $|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Ce qui montre bien que $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) + \lim_{n\to\infty}(b_n)$ et donc que 1i) Vraie. ■

Montrons 2i)

Supposons que $a = \lim_{n\to\infty}(a_n) = 0$.
On veut montrer que $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = 0 \times b = 0$. Puisque (b_n) est convergente elle est bornée (proposition-04) d'où $\exists B > 0 \mid \forall n \in \mathbb{N}, |b_n| \leq B$. On obtient $|a_n b_n| \leq B|a_n|$ comme $\lim_{n\to\infty}(a_n) = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$, donc $\lim_{n\to\infty}(B|a_n|) = 0$. La (proposition-02) permet de déduire enfin que $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = 0$.
Supposons que $a \neq 0$.
On a $a_n b_n = ab_n + (a_n - a)b_n$. Comme $\lim_{n\to\infty}(a_n - a) = 0$ on sait d'après le traité ci-dessus que $\lim_{n\to\infty}(a_n - a)b_n = 0$. D'après 2 ? on a $\lim_{n\to\infty}(ab_n) = ab$. En appliquant 1 on arrive à :
$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab + 0 = ab$. ■

3i) est laissé en exercice.

proposition-06 (théorème des deux gendarmes)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites de nombres réelles telles que : $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = l, l \in \mathbb{R}$ et à partir d'un certain rang on a $a_n \leq u_n \leq b_n$ alors : $\lim_{n\to\infty} u_n = l$.

Remarque-03 :

Les suites (a_n) et (b_n) représenteraient deux gendarmes encadrant, de part et d'autre, la suite (u_n) l'obligeant à les suivre vers le lieu l de leur destination.

Preuve :

La démonstration est en exercice. Utiliser l'inégalité $|u_n - a_n| \leq |b_n - a_n|$ vraie à partir d'un rang $N > 0$, puis le théorème-02 et la proposition-02 pour la résolution.

proposition-07 (Limite d'un quotient)

Soit une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers une limite non nulle l. Alors à partir d'un certain rang on a :
$a_n \neq 0$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{l}$.

Preuve :

On sait que $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |l| > 0$. A l'aide de la proposition-05 on a, à partir d'un certain rang, $|a_n| > \frac{|l|}{2}$ donc à fortiori $a_n \neq 0$.

Montrons que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{l}$: Soit $\varepsilon > 0$, montrons que $\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{l}\right| < \varepsilon$.

On a : $\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{l}\right| = \left|\frac{l-a_n}{a_n l}\right| < \frac{|l-a_n|}{|a_n l|} = \frac{|l-a_n|}{|a_n||l|}$. Or on sait que $|a_n| > \frac{|l|}{2} \Longrightarrow |a_n l| > \frac{|l^2|}{2} = \frac{l^2}{2}$. On sait encore que $|a_n - l| < \frac{\varepsilon l^2}{2}$ à partir d'un certain rang. Donc :

$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{l}\right| < \frac{(\varepsilon l^2)/2}{l^2/2} = \varepsilon$, à partir d'un certain rang. C'est ce qu'on voulait montrer. ■

En combinant le 3 du théorème-02 et la proposition-07 on arrive à, si $\lim_{n\to\infty} u_n = l$ et $\lim_{n\to\infty} v_n = m \neq 0$, alors $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{l}{m}$.

B4. Monotonie des Suites

Définition-04 (Suite croissante, décroissante, monotone)

Une suite croissante :

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite croissante sur $\mathbb{N}$ si par définition elle vérifie $\left(\forall p,q\in\mathbb{N}, p\le q\Longrightarrow u_p\le u_q\right)$. Elle sera dite strictement croissante sur $\mathbb{N}$ si : $\left(\forall p,q\in\mathbb{N}, p<q\Longrightarrow u_p<u_q\right)$.

Une suite décroissante :

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite décroissante sur $\mathbb{N}$ si par définition elle vérifie $\left(\forall p,q\in\mathbb{N}, p\le q\Longrightarrow u_p\ge u_q\right)$. Elle sera dite strictement décroissante sur $\mathbb{N}$ si elle vérifie : $\left(\forall p,q\in\mathbb{N}, p<q\Longrightarrow u_p>u_q\right)$.

Une suite monotone :

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante sur $\mathbb{N}$ ou exclusivement croissante sur $\mathbb{N}$ est dite suite monotone sur $\mathbb{N}$.

Proposition-08 (en exercice)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de nombre réels. Les deux propriétés (P1) et (P2) suivantes, sont équivalentes : $\left[(\mathrm{P1})\left(\forall p,q\in\mathbb{N},\ p\le q\Longrightarrow u_p\le u_q\right)\right]\Leftrightarrow\left[(\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\le u_{n+1})(\mathrm{P2})\right]$

Preuve : (en TD, série n°03)

remarque-04 (monotonie de suite)

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est croissante ou exclusivement décroissante sur $\mathbb{N}$ est dite monotone sur $\mathbb{N}$. Elle peut également être croissante, ou décroissante, et/ou monotone sur $\mathbb{N}$ à partir d'un certain rang $N\in\mathbb{N}$. c'est-à-dire dans ce cas elle est croissance, ou décroissante et /ou monotone sur $[N,+\infty[\,\cap\,\mathbb{N}$. Pour tout $N\in\mathbb{N}$ la nature d'une suite $(u_n)_{n\ge N}$ ne sera pas modifiée par cette restriction de $\mathbb{N}$ à $[N,+\infty[\,\cap\,\mathbb{N}$ de la validité des propriétés de (u_n). Formellement on peut avoir :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant la propriété $P_{(n)},\forall n\in\mathbb{N}$ de sorte que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l\in\mathbb{R}$.

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite $\begin{cases} v_n=u_n\ ,\forall n\in[N,+\infty[\,\cap\,\mathbb{N}\\ v_n\ne u_n\ ,\forall n\in[0,N[\,\cap\,\mathbb{N}\end{cases}$ alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l\in\mathbb{R},\forall N\in\mathbb{N}$

Théorème-03 (suite monotone majorée ou minorée)

Cas d'une suite croissante et majorée :

Toute suite de nombres réels croissante et majorée, est convergente. Ce qui formellement s'écrit :

$$\forall(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R},(u_n)\ \Big|\ \left.\begin{matrix}\text{croissante sur }\mathbb{N}\\ \text{et majorée sur }\mathbb{N}\end{matrix}\right\}\Longrightarrow(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{ est convergente.}$$

Cas d'une suite réelle décroissante minorée :

Toute suite de nombres réels décroissante et minorée, est convergente. Ce qui formellement s'écrit :

$$\forall(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R},(u_n)\ \Big|\ \left.\begin{matrix}\text{décroissante sur }\mathbb{N}\\ \text{et minorée sur }\mathbb{N}\end{matrix}\right\}\Longrightarrow(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{ est convergente.}$$

Preuve :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$, une suite croissante i.e. $(\forall n\in\mathbb{N},u_n\le u_{n+1})$ et (u_n) majorée i.e. $(\exists M\in\mathbb{R},u_n\le M)$. On pose $A=\{u_n,n\in\mathbb{N}\}$. La suite (u_n) étant majorée, A étant non vide, A est aussi majorée. Donc A admet une borne supérieure $l,l\in\mathbb{R}$. Montrons que $l=\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

Soit $\varepsilon>0;\ \exists n\in\mathbb{N}|\ l-\varepsilon<u_n<l$ car $l=\sup(A)$. Comme (u_n) est croissante $\forall m\in\mathbb{N},m\ge n\Rightarrow u_m\ge u_n$ et par définition $u_m\le l$. On a donc $(l-\varepsilon<u_n\le u_m\le l<l+\varepsilon)\Leftrightarrow|u_m-l|<\varepsilon$. Finalement on peut écrire : $\forall\varepsilon>0;\ \exists n\in\mathbb{N}|\ \forall m\in\mathbb{N},\quad m\ge n\Rightarrow|u_m-l|<\varepsilon$ ■

Corollaire-01 (suite croissante majorée)

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, est une suite de nombres réels croissante et majorée alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et de plus :

$$\lim_{n\to\infty}u_n=sup\{u_n,n\in\mathbb{N}\}=\sup_{n\in\mathbb{N}}(u_n)$$

Corollaire-02 (suite croissante minorée)

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, est une suite de nombres réels décroissante et minorée alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et de plus :

$$\lim_{n\to\infty}u_n=inf\{u_n,n\in\mathbb{N}\}=\inf_{n\in\mathbb{N}}(u_n)$$

Preuve : (la preuve des deux corollaires est en exercice)

Remarque-05 (suite rationnelle)

Attention ! Ce théorème n'est pas vrai, en général, en particulier si la suite est rationnelle.

B5. Suites adjacentes

Définition-05 (Suites adjacentes)

Deux suites (a_n) et (b_n) sont dites adjacentes si elles vérifient les propriétés suivantes :

1) $\forall n \in \mathbb{N},\ \ a_n \leq b_n$.
2) La suite (a_n) est croissante. C'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ a_n \leq a_{n+1}$.
3) La suite (b_n) est décroissante. C'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ b_{n+1} \leq b_n$.
4) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.

Remarque-06 (à propos de la propriété 1))

La propriété 1) découle des trois autres propriétés.

Exemple-03 (suites adjacentes)

Soient les suites de décimaux à 10^{-n} près par défaut, et celle par excès d'un nombres réels x, qui s'écrivent :

$a_n = E(10^n x)$ et $b_n = E(1 + 10^n x)$. Les suites (a_n)et (b_n) sont adjacentes et converge vers x.

Proposition-09 (convergence de suite adjacentes)

Soient deux suites réelles adjacentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors il existe un nombre réel c unique tel que :

$(a_n \leq c \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N})$ et $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c\right)$.

Preuve :

On a (b_n) décroissante $b_n \leq b_{n-1} \leq \cdots \leq b_1 \leq b_0$ et comme $a_n \leq b_n$ on déduit que $a_n \leq b_0$ finalement : (a_n) croissante et majorée $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq b_0$, le théorème-03 donne $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l, l \in \mathbb{R}$.

Puisque $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ on peut écrire : $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) + \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. ∎

Proposition-10 (racine carrée d'un nombre réel positif)

Tout nombre réel positif ou nul admet une racine carrée dans $\mathbb{R}$.

Preuve :

Soit $r \in \mathbb{R} \mid 0 \leq r$. A l'aide d'une suite d'intervalles emboités $[a_n, b_n]$ par la méthode de dichotonie, de sorte que : ${a_n}^2 \leq r \leq {b_n}^2, n \in \mathbb{N}$. Pour l'initialisation de cette suite on procède ainsi :

L'axiome d'Archimède permet de dire : $\exists p \in \mathbb{N}, r < p$ tel que $r < p \leq p^2$. Soit $b_0 \in \mathbb{N}$ le plus petit entier vérifiant : $r < (b_0)^2$ et $a_0 = b_0 - 1$. Comme $1 \leq b_0$ on a $0 \leq a_0$. La définition de b_0 permet d'écrire :

${a_n}^2 \leq r < {b_n}^2, n \in \mathbb{N}$. Alors les suites$(a_n)$ et b_n sont définies par récurrence sur n de la manière suivante :

$$\text{on pose : } \begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{(a_n + b_n)}{2} \text{ et } b_{n+1} = a_n, & si \dfrac{(a_n + b_n)}{2} \leq r, \quad \text{On garde la moitié gauche} \\ a_{n+1} = a_n \text{ et } b_{n+1} = \dfrac{(a_n + b_n)}{2}, & sinon, \quad \text{On garde la moitié droite} \end{cases}$$

Pour $n = 0$ on a $b_0 - a_0 = 1/2^0$; pour $n = 1$ on a $b_1 - a_1 = 1/2^1$; etc … pour n on a : $b_n - a_n = 1/2^n$. La longueur de $[a_n, b_n]$ est $b_n - a_n = 1/2^n$ donc $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ proposition-03, donc la proposition-09 assure que $\exists l \in \mathbb{R}$, vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq l \leq b_n$. On a $0 \leq a_0 \leq l$. Il faut montrer que $l^2 = r$. Comme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$ le théorème-02-(3) donne $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^2 = \lim\limits_{n\to\infty}(b_n)^2 = l^2$. Des inégalités ${a_n}^2 \leq r < {b_n}^2$, le passage à la limite théorème-01 permet de trouver : $l^2 = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^2 = r = \lim\limits_{n\to\infty}(b_n)^2 = l^2$ d'où $l^2 = r$. ∎

B6. limites infinies (2.4)

On peut étendre la définition de la limite pour englober les cas de limites infinies.

Définition-06 (limites infinies)

On dit qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels a pour limite $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si pour tout $A > 0$, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}, n > N$, on a $A < a_n$ (respectivement $a_n < A$). Formellement :

$\forall A \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n > N \implies A < a_n$. (respec. $\forall A \in \mathbb{R}_-^*, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n > N \implies a_n < A$)

Remarque-07 (limite infinie)

Attention ! Une suite dont la limite est $-\infty$ ou $+\infty$ n'est pas appelée suite convergente.

Proposition-11 (les types de limites)

Les résultats concernant les limites de sommes et de produits de suites de nombres réels s'étendent aux limites infinies. Nous avons les cas suivants :

1. Addition : $l + (+\infty) = +\infty$; $l + (-\infty) = -\infty$
   $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$; $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
2. multiplication : $l \times (+\infty) = \mathrm{sign}(l) \times (+\infty)$ $\quad l + (-\infty) = \mathrm{sign}(l) \times (-\infty)$
   $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$; $(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$; $(+\infty) \times (-\infty) = -\infty$.

Les principales formes d'indétermination sont les suivantes : $0 \times (\pm\infty)$; $(+\infty) + (-\infty)$; $(-\infty) + (+\infty)$.

Preuve : en exercice (cas d'indétermination)

Essayer de voir comment lever l'indétermination dans un ou deux cas.

Proposition-12 (les types de limites)

Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels absolument divergente vers $+\infty$ c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$, alors $a_n \neq 0$ à partir d'un certain rang et $\lim\limits_{n\to\infty} 1/a_n = 0$. Si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes strictement positif à partir d'un certain rang telle que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} 1/a_n = +\infty$.

Preuve : faire la démonstration en exercice.

B7. Suites extraites (2.5)

Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite sous-suite extraite de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si elle est formée d'éléments successifs de (s_n) choisis dans l'ordre naturel avec un pas quelconque et éventuellement variable.

Définition-07 (Sous-suite extraite)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On dit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ ($m < n \Longrightarrow \varphi(m) < \varphi(n)$) telle que : $v_n = u_{\varphi(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple-04

- Suite (v_n) des termes de rang pair extraite de la suite (u_n) : $v_k = u_{\varphi(k)}$ où $\varphi(k) = 2k, \forall k \in \mathbb{N}$, et la suite de rang impair extraite de(u_n) : $w_k = u_{\varphi(k)}$ où $\varphi(k) = 2k + 1, \forall k \in \mathbb{N}$. Ainsi la suite de terme général $v_k = 1/4n^4$ est extraite de la suite de terme général $u_n = 1/n^2$.
- La suite $t_n = \cos(1)/(4n + 1)$ est extraite de la suite $u_n = \frac{1}{n}\sin\left(1 + n\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

Lemme-01 (Application strictement croissante)

Soit une application φ strictement croissante définie par $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. Alors on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $n \leq \varphi(n)$.

Preuve :

à démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence sur n.

Proposition-13 (les types de limites)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels qui est convergente et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Alors : $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$.
Autrement dit : ***Toute sous-suite, d'une suite réelle convergente, est convergente vers la même limite.***

Preuve :

Supposons $v_n = u_{\varphi(n)}$ et $\lim_{n\to\infty} u_n = l$. Soit $\varepsilon > 0, \varepsilon$ quelconque, $\exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N, |u_n - l| < \varepsilon$.

φ étant strictement croissante le lemme-01 permet d'écrire que $\forall n \in \mathbb{N}, n \leq \varphi(n)$. On a ($n \geq N$ et $\varphi(n) \geq n$) donc $\varphi(n) \geq N \Rightarrow \left|u_{\varphi(n)} - l\right| < \varepsilon$ c'est-à-dire $|v_n - l| < \varepsilon$. Donc $\lim_{n\to\infty} v_n = l$.

B8. Développement décimal

Il s'agit ici d'un exemple important d'encadrement d'un nombre réel par deux suites adjacentes de nombres rationnels : *c'est le développement décimal.*
Soit l un nombre réel $l \geq 0$. et $E(l)$ sa partie entière, qui est l'entier naturel tel que : $E(l) \leq l < E(l) + 1$.
$\mathbb{R}$ étant archimédien l'existence de $E(l)$ est assurée. L'axiome entraine l'existence d'entiers dépassant l donc d'un plus petit noté p tel que $p > l$ et on pose alors $E(l) = p - 1$

Définition-08 (approximation d'un nombre réel par excès ou par défaut)

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n = 10^{-n}E(10^{-n}x)$. On a alors $0 \leq x - x_n < 10^{-n}$ à cause des inégalités : $10^n x_n = E(10^{-n}x) \leq 10^n x < 10^n x + 1$, par définition de la partie entière.

On dit que x_n est l'approximation décimale par défaut de x à 10^{-n} près.

Proposition-14 (approximation par défaut)

Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $x_n = 10^{-n}E(10^{-n}x)$, alors on a $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. vers.

Lemme-02 (Application strictement croissante)

En posant $a_n = E(10^n x) - 10E(10^{n-1}x) = 10^n(x_n - x_{n-1})$ on a : $a_n \in \{0, 1, 2, 3,4,5,6,7,8,9\}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Preuve :

a_n est la différence entre deux parties entières donc un entier relatif à priori. On a
$E(10^{n-1}x) \leq 10^{n-1}x < E(10^{n-1}x) + 1 \Longrightarrow 10E(10^{n-1}x) \leq 10^n x < 10E(10^{n-1}x) + 10$ et par définition de $E(10^n x)$ on a : $10E(10^{n-1}x) \leq E(10^n x) < E(10^n x) + 1 \leq 10E(10^{n-1}x) + 10$ on en déduit que :

$$0 \leq E(10^n x) - 10E(10^{n-1}x) < 10 \qquad \blacksquare$$

On a de plus :

$$\begin{array}{ccccccc}
a_n & = & 10^n \quad (x_n - x_{n-1}) & \Leftrightarrow & 10^{-n}a_n & = & x_n - x_{n-1} \\
a_{n-1} & = & 10^{n-1}(x_{n-1} - x_{n-2}) & \Leftrightarrow & 10^{-(n-1)}a_n & = & x_{n-1} - x_{n-2} \\
\dots & = & \dots & \Leftrightarrow & \dots & = & \dots \\
a_1 & = & 10^1 \quad (x_1 - x_0) & \Leftrightarrow & 10^{-1}a_1 & = & x_1 - x_0
\end{array}$$

En additionnant membre à membre la partie droite de l'équivalence on arrive à :

$$x_n = x_0 + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{a_i}{10^i} \quad où\, x_0 = E(x).$$

On note $x = x_0 + \sum_{i=1}^{\infty} 10^i a_i = x_0, a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7 \dots a_n$ …. Cette écriture s'appelle le développement décimal propre illimité de x.

On admettra la réciproque i.e. qu'un développement décimal illimité représente un nombre réel et que deux développements décimaux illimités peuvent représenter le même nombre réel. Ce résultat peu être démontrer au moment de l'étude de séries.

Exemple-05

1 = 0,999999999… et 0,356 = 0,35599999999 …

Attention si $x < 0$, on utilise le développement décimal illimité de $-x = x_0, a_1a_2 \dots a_n$ …. puis en déduit :

$x = -x_0, a_1a_2 \dots a_n$ …. dans ce cas, $E(x) = -x_0 - 1$.

Théorème-04 (développement d'un rationnel)

Un nombre rationnel admet toujours un développement décimal illimité qui devient périodique à partir d'un certain rang.

Preuve :

La preuve se fait au moyen de la division euclidienne et on admet la réciproque qui est que : tout réel admettant développement décimal illimité périodique à partir d'un certain rang est un nombre rationnel.

Exemple-06

1) $x = 3{,}46\ 53\ 53\ldots = 3 + \frac{46}{100} + \frac{53}{900} = \frac{3167}{900}$ | 2) $x = 1{,}714285\ 714285 = \frac{12}{7}$

Critère de Cauchy et théorème de Bolzano-Weierstrass

Définition-09 (Suite de Cauchy)

Une suite de nombre réel $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite suite de Cauchy quand elle vérifie la propriété suivante :
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N, tel pour tout $p \geq N$ et tout $q \geq N$ on a $|a_p - a_q| < \varepsilon$. Ce qui se quantifie formellement par : $\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N}, p \geq N, q \geq N, |u_p - u_q| < \varepsilon$.
Autrement dit pour toute tolérance $\varepsilon > 0$ on peut trouver un rang N à partir duquel l'écart entre deux termes quelconques de la suite est inférieur à ε. Attention il faut bien retenir qu'il ne s'agit pas seulement de l'écart entre deux termes successifs !
Prenons l'exemple : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.

Remarquons que $\forall\varepsilon > 0$, $\overbrace{|u_p - u_{p+1}| < \varepsilon}^{(I_0)} \Leftrightarrow \frac{1}{p+1} < \varepsilon \Leftrightarrow p > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ en posant $N = \frac{1}{\varepsilon}$, l'inégalité (I_0) est vraie. Si on prend $\varepsilon = 1/2$ on doit pouvoir trouver N tel que $n \geq N, p \geq N, |u_p - u_n| < \frac{1}{2}$, soit $p = N$ et $n = 2N$ on a : $|u_n - u_p| = u_{2N} - u_N = \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \cdots + \frac{1}{2N} > N \times \frac{1}{2N} = \frac{1}{2}$.

Conclusion : cette suite réelle n'est pas de Cauchy.

Théorème-05 (critère de Cauchy)

Une suite de nombres réels est convergente si c'est une suite de Cauchy.

Preuve : à faire

Théorème-06 (Bolzano-Weierstrass)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels bornée. Alors on peut en extraire une sous suite convergente.

Preuve : à faire

Définition-10 (ensemble dénombrable)

Un ensemble infini A est dit dénombrable s'il existe une surjection de $\mathbb{N}$ sur A.
Autrement dit, on peut énumérer les éléments de A c'est-à-dire en faire une liste avec éventuellement une répétition de certains éléments.

Exemple-07 :

L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ est dénombrable. En voici un début d'énumération :

$$\left\{0, \frac{1}{1}, -\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{1}, -\frac{2}{1}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{2}, -\frac{2}{2}, \frac{3}{1}, -\frac{3}{1}, \frac{4}{1}, -\frac{4}{1}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \ldots\right\}$$

Exercice : décrire formellement l'énumération de l'ensemble des rationnels donnée ci-dessus.

Proposition-15 (puissance du continue)

L'ensemble des nombres réels n'est pas dénombrable.

Preuve :

Essayer de le démontrer en démarrant avec l'idée suivante : si $\mathbb{R}$ admet une énumération alors l'intervalle $[0,1[$ en admettrait une, également.

Veuillez signaler aux chargé(e)s de TD ou chargé de Cours, toute erreur constatée dans ce document, merci.