1. Limites et continuité

Les fonctions réelles, d'une variable réelle, partagent un grand nombre de notions, vues ou à voire dans la partie du cours réservé aux suites de nombres réels. De la notion de parties discrètes ou dénombrables on passe ici aux parties réelles ayant la puissance du continu, qui peuvent des images directes ou indirectes de fonctions continues, comme nous le verrons.

Définition-01 (Majorants, minorants, bornes, extremums)

Soient $A \subseteq \mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On appelle A le domaine de définition de f. On dit que f :

- Est minorée ou admet un minorant $m$si par définition : $\exists m \in \mathbb{R} \mid \forall x \in A,\ \ m \leq f(x)$.
- Est majorée ou admet un majorant Msi par définition : $\exists M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in A,\ \ f(x) \leq M$.
- Est bornée si par définition, f est minorée et majorée : $\exists m, M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in A,\ \ m \leq f(x) \leq M$.
  Si f est une fonction majorée, on appelle borne supérieure de f le nombre réel S défini par : $S = sup_A\, f = sup_{x\in A}\, f(x) = sup\{f(x) \mid x \in A\}$ (*Ces notations sont équivalentes*). Et si f est une fonction minorée, on appelle borne inférieure de f le nombre réel p défini par : $p = inf_A\, f = inf_{x\in A}\, f(x) = inf\{f(x) \mid x \in A\}$ (*Ces notations sont également équivalentes*).
- Admet un maximum en $a \in A$, si $f(a)$ est le maximum de la partie $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$. Ce maximum est dit local en $a \in A$ si $\exists \varepsilon > 0 \mid f(a)$ est un maximum pour $f(A \cap]a - \varepsilon, a + \varepsilon[)$.
- Admet un minimum en $b \in A$ si $f(b)$ est le minimum de la partie $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$. Ce minimum est dit local en $b \in A$ si $\exists \varepsilon > 0 \mid f(b)$ est le minimum pour$f(A \cap]b - \varepsilon, b + \varepsilon[)$.

Remarque-01 (lien borne-extrémum)

Toute fonction bornée possède toujours une borne supérieure et une borne inférieure mais n'admet pas nécessairement un maximum et un minimum.

Exemple-01 (identité, sinus)

1. Soit $f :\ ]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$. Alors f est bornée. Et on a :
   $\inf_{x\in]0,1[} f(x) = 0, \sup_{x\in]0,1[} f(x) = 1$, mais $\min_{x\in]0,1[} f(x)$ et $\max_{x\in]0,1[} f(x)$ n'existent pas.
2. Une fonction peut admettre un maximum en plusieurs points. Ainsi $f(x) = sin(x)$ admet un maximum en tout point de la forme :$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$.

Définition-02 (Adhérence d'une partie réelle)

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, on appelle adhérence de A notée $\bar{A}$ (*lu A barre*) le plus petit fermé de $\mathbb{R}$ contenant A.

Exemple-02(adhérence d'un intervalle bornée)

Si A est un intervalle borné de $\mathbb{R}$, alors $\bar{A} = [\inf(A), \sup(A)]$.

Remarque-02 (Domaine de définition)

Dans la suite on prendra comme domaine de définition A des intervalles de la forme :

- A intervalle borné ouvert, semi-ouvert ou fermé. Exemples : $A =]a, b[, [a, b[,]a, b]ou[a, b]$avec $a < b$. On notera alors l'adhérence de A, notée $\bar{A}$ la partie définie par $\bar{A} = [a, b]$.
- $A =]-\infty, b]$ ou bien $A =]-\infty, b[$. On notera alors $\bar{A} =]-\infty, b]$.
- $A = [b, +\infty[$ ou bien $A =]b, +\infty[$. On notera alors $\bar{A} = [b, +\infty[$.
- $A =]-\infty, +\infty[$ alors$\bar{A} = \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ (*c'est la compactification de* $\mathbb{R}$!).

Définition-03 (limites d'une fonction)

Soient A un intervalle et $\bar{A}$ son adhérence. Soient $f: A \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \bar{A}$ et $l \in \mathbb{R}$.

1. On dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a , et on note : $\lim_{x\to a} f(x) = l$, si par définition :
   $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x \in A, |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.
2. On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a et on note : $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, si par définition :
   $\forall K \in \mathbb{R}_+^*, \exists \delta > 0 \mid \forall x \in A, |x - a| < \delta \Longrightarrow K < f(x)$.
3. On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers a et on note : $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, si par définition :
   $\forall m \in \mathbb{R}_-^*, \exists \delta > 0 \mid \forall x \in A, |x - a| < \delta \Longrightarrow f(x) < m$.
4. On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$ et on note : $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$, par définition :
   $\forall m_a \in \mathbb{R}_-^*, \exists m_d \in \mathbb{R}_-^* \mid \forall x \in A, x < m_d \Rightarrow f(x) < m_a$.

5. On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$ et on note : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, par définition :
   $\forall M \in \mathbb{R}_+^*, \exists m \in \mathbb{R}_-^* \mid \forall x \in A, x < m \Rightarrow M < f(x)$.
6. On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et on note : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, par définition :
   $\forall m \in \mathbb{R}_-^*, \exists M \in \mathbb{R}_+^* \mid \forall x \in A, M < x \Rightarrow f(x) < m$.
7. On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$ et on note : $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, si par définition :
   $\forall K \in \mathbb{R}_+^*, \exists M \in \mathbb{R}_+^* \mid \forall x \in A, M < x \Rightarrow K < f(x)$.

Exemple-03 (limites)
1. Si $A =]0,1[$, $a = 1 \in \bar{A}$ et $f(x) = x$, alors $\lim_{x\to1} f(x) = 1$.
2. Si $A =]0,1[$, $a = 0 \in \bar{A}$ et $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, alors $\lim_{x\to0} f(x) = 1$.
3. Si $A =]0,1[$, $a = 1 \in \bar{A}$ et $f(x) = 1/x$, alors $\lim_{x\to0} f(x) = +\infty$.
4. Si $A =]-\infty,+\infty[$ et $f(x) = e^{-x}$, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
5. Si $A =]-\infty,+\infty[$ et $f(x) = x$, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Proposition-01 (Unicité de la limite)
Si la fonction f admet une limite finie l en a, alors cette limite l est unique.

Preuve : (*voir la démonstration donnée pour une suite*)

Définition-04 (continuité en un point, sur un intervalle)
Soient $f: A \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in A$, où A est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.
1. Continuité de f en un point a de A :
   La fonction f est dite continue en a si f admet $f(a)$ comme limite en a. Formellement on écrit :
   $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \mid \forall x \in A, \quad |x - a| \leq \alpha \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.
2. Continuité de f sur un intervalle non vide I de A :
   La fonction f est dite continue sur I si elle est continue en tout point de I.

Exemple-04 (fonctions)
1. Les fonctions exponentielles et trigonométriques sont continues sur leurs domaines de définition.
2. La fonction $E : x \longmapsto E(x)$ « partie entière de x » qui à $x$associe le plus grand entier inférieur ou égal à x. La fonction $E : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Définition-05 (prolongement par continuité)
Soient $f: A \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $g: B \to \mathbb{R}$ avec $B \subseteq A$. On dit que f est un prolongement par continuité de $f$si :
1. La fonction g est le prolongement de la fonction f, c'est-à-dire : $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$.
2. La fonction g est continue en tout point de B.

Exemple-05 (prolongement par continuité)
On choisit par exemple $A =]0,1]$, $B = [0,1]$ et $f(x) = sin(x)/x$. Alors la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} sin(x)/x, & si\ x \neq 0 \\ 1, & sinon \end{cases}$$

La fonction g, ainsi définie, est un prolongement par continuité de f au point $x_0 = 0$.

2. Propriétés de la limite d'une fonction.

Proposition-02 (propriétés des limites de fonctions)

Soient $f : A \to \mathbb{R}$ et $g : B \to \mathbb{R}$ deux fonctions.
1. Si $\mathrm{l} = \lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{a}} \mathrm{f(x)}$; $\mathrm{a} \in \mathrm{A}$, alors il existe un ouvert $\mathrm{I} =]\alpha, \beta[\ni \mathrm{a}$ tel que f soit bornée sur$\mathrm{A} \cap \mathrm{I}$.
   - Si $l = \lim_{x\to+\infty} f(x)$, il existe un ouvert $I =]\alpha, +\infty[$ et $f$est bornée sur$A \cap I$.
   - Si $l = \lim_{x\to-\infty} f(x)$, il existe un ouvert $I =]-\infty, \beta[$ et f est bornée sur$A \cap I$.

- Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ et g est bornée sur l'ouvert $I(a,\varepsilon)$ alors : $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.

2. Si f et g admettent chacune une limite dans $\mathbb{R}$ quand x tend vers a alors :
$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x),$$
$lim_{x\to a}(f(x)\times g(x)) = lim_{x\to a} f(x)\times lim_{x\to a} g(x)$.
3. Si f ne s'annule pas sur A et si $\lim_{x\to a} f(x) = l, l \in \mathbb{R}^*$ alors :$\lim_{x\to a} 1/f(x) = 1/l$.
Si f ne s'annule pas sur A et si $\lim_{x\to a}|f(x)| = +\infty$ alors : $\lim_{x\to a} 1/f(x) = 0$.
Si f ne s'annule pas sur A, si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ et si $f(x) \geq 0$ sur un intervalle ouvert contenant a, alors : $\lim_{x\to a} 1/f(x) = +\infty$.
4. Si $f(x) \leq g(x)$ sur un intervalle ouvert contenant a alors $\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$.
5. Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ sur un intervalle ouvert contenant a et si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = l$, alors $\lim_{x\to a} g(x) = l$ (*théorème des deux gendarmes*).

Preuve :
Démontrons 5. (Les autres résultats sont identiques aux cas des suites de nombres réels).

Soit $\varepsilon > 0, \exists\alpha > 0 \mid |x-a| < \alpha \Longrightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$ d'où $l-\varepsilon < f(x)$. De même $\exists\alpha' > 0 \mid |x-a| < \alpha'$ implique $|h(x)-l| < \varepsilon$ en particulier $h(x) < l+\varepsilon$. Donc si $|x-a| < min\{\alpha,\alpha'\}$ alors on aurait :

$$\left.\begin{array}{c} f(x) \leq g(x) \leq h(x) \\ l-\varepsilon < f(x) \text{et } h(x) < l+\varepsilon \end{array}\right\} \Longrightarrow l-\varepsilon \leq g(x) \leq l+\varepsilon \Leftrightarrow |g(x)-l| < \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

Proposition-03 (Composition de fonctions continues)
Soient $f : A \to \mathbb{R}$ et $g : B \to \mathbb{R}$ deux fonctions avec $f(A) \subseteq B$. Si f est continue en a et g est continue en $b = f(a) \in B$, alors la composée $g \circ f$ est continue en a.

Preuve :
Soit $\varepsilon > 0$ quelconque montrons $\exists\delta > 0 \mid |x-a| < \delta \Longrightarrow |g\circ f(x) - g\circ f(a)| < \varepsilon$. Comme g est continue en $f(a), \exists\alpha > 0$ tq $|f(x)-f(a)| < \alpha \Longrightarrow |g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$. Mais comme f est continue en a $\exists\beta > 0$ tq $|x-a| < \beta \Longrightarrow |f(x)-f(a)| < \alpha$. En prenant $\delta = \beta$ on arrive à :

$$\left[|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \alpha \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon\right]$$

ce qui signifie que : $\exists\delta = \beta > 0$ tq $|x-a| < \delta \Rightarrow |g\circ f(x) - g\circ f(a)| < \varepsilon$. ■

Proposition-04 (critère séquentiel de continuité)
Soit $f : A \to \mathbb{R}$ et $a \in A$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes.
1. f est continue en a.
2. Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$c'est-à-dire à valeurs dans A telle que $lim_{n\to+\infty} u_n = a$ on a : $lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)$.

Preuve :
Supposons f continue en a. Soit $\varepsilon > 0, \exists\alpha > 0 \mid |x-a| < \alpha \Longrightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon$.
Comme (u_n) tend vers $a, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N,\ |u_n - a| < \alpha$. Mais alors $|f(u_n) - f(a)| < \varepsilon$. Donc la suite $(f(u_n))$a pour limite $f(a)$.
Prouvons la contraposée de la réciproque : en supposons f non-continue en a, il s'agit de trouver une suite (u_n) qui converge vers a et telle que $lim_{n\to+\infty} f(u_n) \neq f(a)$. F non-continue en a est la négation de $lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)$ c'est-à-dire : non($\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha > 0, \forall x \in A \cap]a-\alpha, a+\alpha[|f(x)-f(a)| < \varepsilon$) est équivalent à (*) $\exists\varepsilon > 0, \forall\alpha > 0, \exists x \in A \cap]a-\alpha, a+\alpha[|f(x)-f(a)| \geq \varepsilon$.
Choisissons $\alpha = 1/2^n$ avec $n \in \mathbb{N}$. La relation (*) implique alors $\exists u_n \in A \cap]a-\alpha, a+\alpha[$ tel que $|f(u_n) - f(a)| \geq \varepsilon$. Alors $|u_n - a| < 1/2^n$ donc (u_n) tend vers a comme $|f(u_n) - f(a)| \geq \varepsilon$ la suite $(f(u_n))$ ne tends pas vers $f(a)$. ■

3. Propriétés des fonctions continues.

Théorème-01 (théorème des valeurs intermédiaires)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ telle que $f(a) \leq f(b)$. Alors pour tout $y \in [f(a), f(b)]$ il existe $x \in [a,b]$ tel que : $f(x) = y$.

Preuve :

Soient deux suites (a_n) et (b_n), définies par récurrence, de premiers termes : $\begin{cases} a_0 = a \\ b_0 = b \end{cases}$

Supposons les deux suites construites jusqu'à l'ordre n. A l'ordre suivant $(n+1)$ on pose :

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n & et & b_{n+1} = (a_n + b_n)/2 & si & f((a_n + b_n)/2) \geq y \\ a_{n+1} = (a_n + b_n)/2 & et & b_{n+1} = b_n & si & f((a_n + b_n)/2) < y \end{cases}$$

Remarque-03

Tout intervalle I de $\mathbb{R}$, non-vide, *fermé* et *borné* est dit *segment* I. On note : $I = [a,b]$ avec $a, b \in \mathbb{R} \mid a < b$.

Théorème-02 (image d'une fonction continue sur un segment)

Toute application f définie sur un segment $I = [a,b]$ et continue sur I telle que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ admet un maximum et un minimum sur $[a,b]$.

On dit aussi que la fonction continue f est bornée et atteint ses bornes.

On peut dire encore que l'image d'une partie non vide fermée et bornée de $\mathbb{R}$ par une application continue est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}$.

Preuve :

La preuve se déroule en étapes :

1. montrer que f admet un maximum (pour le minimum, on prend $-f$ à la place de f).
   1. Montrer par l'absurde que f admet un majorant en utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass pour montrer qu'il existe alors une suite u_n telle que $f(u_n) \to +\infty$. Si on note : $l = \lim_{n\to+\infty} f(u_n)$, comme f est continue $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(l)$, ce qui contredit le fait que : $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = +\infty$. Donc f est bien majorée et $\sup_{x\in I} f(x)$ existe, soit $M = \sup_{x\in I} f(x)$.

   2. Il faut montrer que : $\exists x \in [a,b] \mid f(x) = M$. Soit n un entier, par définition de la borne supérieure $M - 1/2^n$ n'est pas un majorant de f donc $\exists x_n \in [a,b] \mid M - \frac{1}{2^n} < f(x_n) \leq M$.
   Le théorème de Bolzano-Weierstrass affirme qu'il existe une sous-suite $y_n = x_{\varphi(n)}$, extraite de la suite (x_n), telle que (y_n) convergente. Soit x sa limite. On rappelle que $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.
   $$M - \frac{1}{2^n} \leq M - \frac{1}{2^{\varphi(n)}} < f(x_n) \leq M$$
   A l'aide du théorème des gendarmes on conclut que $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = M$. Et comme f est continue,$\exists x \in I \mid lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$. Finalement on obtient :
   $$f(x) = \sup_{t\in I} f(t)$$
2. montrer que f admet un minimum (même procédé, en prenant$-f$ à la place de f). ■

4. Fonctions dérivables.

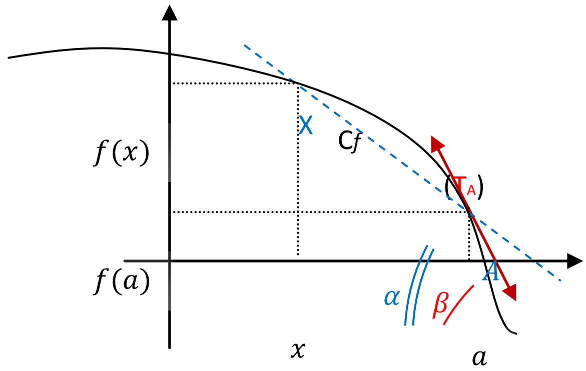
Définition-06 (dérivabilité en un point)

Soient une fonction f définie de $A \longrightarrow \mathbb{R}$et $a \in A$, on dit que f est dérivable en a si la limite suivante existe dans $\mathbb{R}$. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ .On note alors : $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$

Exemple-06

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x| = \max\{-x, x\}$. On vérifie facilement que f est continue sur $\mathbb{R}$. Mais on a :
   $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$, et $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$. Ce qui signifie que f n'est pas dérivable en 0. Par contre f est dérivable en tout point $a \in \mathbb{R}^*$.

2. Les fonctions classiques suivantes sont dérivables sur leurs domaines de définition :
   - Trigonométriques : $x \to \sin x$; $x \to \cos x$; $x \to \tan x$; …
   - Polynomiales : $x \to a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$.
   - Exponentielles : $x \to e^x$.
   - Fractions rationnelles : $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$.



- Interprétation géométrique.

On a : $tg(\alpha) = [f(x) - f(a)]/(x - a)$.
Et à la limite : $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = tg(\beta) = f'(a)$.
La droite (AX) devient, quand $x \to a$, la tangente (T_A) en A à la courbe C_f de la fonction f au point A.
L'équation de la tangente (T_A) à la courbe C_f en X: $\binom{x}{f(x)}$ s'écrit alors : $(T_A) : y = xf'(a) + f(a) - af'(a)$

Interprétation :
$f'(a)$, est la *pente de la tangente* à la courbe C_f de la *fonction* f au point A de coordonnées : $(a, f(a))$.

Proposition-05 (dérivabilité-continuité)
Soient $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et un point $a, a \in A$. Si f est dérivable en a alors f est continue en a. Ce qui se formalise par : $\left[\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)\right] \Longrightarrow \left[\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\right]$

Preuve :
Soit $l = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, comme la fonction $x \longrightarrow x$ est continue en a on a $\lim_{x\to a}(x - a) = 0$. Sachant que la limite d'un produit est le produit des limites on a :

$$\lim_{x\to a}(f(x) - f(a)) = \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times (x - a)\right] = \lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\lim_{x\to a}(x - a) = l.0 = 0$$

Ce qui montre bien que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ donc que la fonction f est bien continue en a. ■

Remarque-04
- La réciproque de ce théorème est en général fausse. Exemple : $f(x) = |x|$ au point 0.
- Existerait-il une fonction continue g qui ne soit dérivable en aucun point de son domaine $\mathcal{D}_g$?
  Pourrait-on construire une telle fonction g ?

Proposition-06 (extrémum local et dérivée)
Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui admet un extremum local (minimum ou maximum local) au point $a, a \in A$.
Si f est dérivable en a, alors $f'(a) = 0$.

Preuve :
Supposons que l'extremum est un maximum (le cas du minimum se traite en remplaçant f par $-f$). Alors par définition il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que : $\forall x \in I \cap A$ on a $f(x) \leq f(a)$.
- Si $x > a$, on a $x - a > 0$ et comme $f(x) - f(a) \leq 0$ on a $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$ et par passage à la limiteon obtient $f'(a) \leq 0$.
- Si $x < a$, on a $x - a < 0$ et comme $f(x) - f(a) \leq 0$ on a $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$ et par passage à la limite à l'aide du même argument, on obtient $f'(a) \geq 0$.
  En combinant les deux conditions on arrive à : $f'(a) = 0$. ■

Remarque-05
La réciproque est en générale fausse. Ainsi pour $x \mapsto f(x) = x^3$ sur $\mathbb{R}$ avec $a = 0$ on a : $f'(0) = 0$ et 0 n'est pas un extremum local. En effet on a : $f(-1) = -1 < 0 < f(1) = 1$. Donc $f(0) = 0$ n'est ni un minimum, ni un maximum pour f.

Le point Mde coordonnées $\big(0, f(0)\big)$ est dit *point d'inflexion* : la dérivée s'y annule sans changer de signe.

Définition-07 (fonction dérivée)
Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en tout point $a$de A, on dit *par définition* que f *est dérivable sur*A.
On note f' la fonction dérivée de f définie par $f^{'}: A \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que : $x \longmapsto f'(x)$.

Proposition-07 (somme, produit et inverse de fonctions dérivables)
Soient $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur A, alors nous avons les résultats suivants :

- La somme $(f+g)$ est dérivable sur A et on a :
  $(f+g)^{'} = f^{'} + g'$. ***Et on lit la dérivée d'une somme est la somme des dérivées.***
- Le produit $(f \cdot g)$ est dérivable sur A et on a :
  $(f \cdot g)^{'} = f^{'} \cdot g + f \cdot g'$.***Et on lit la dérivée d'un produit est la somme des produits de la dérivée de la première par la deuxième et de la première par la dérivée de la seconde***.
- Si f ne s'annule pas sur A alors $1/f$est dérivable sur A et on a :
  $\left(\frac{1}{f}\right)^{'} = -\frac{f'}{f^2}$. ***Et on lit la dérivée de l'inverse de la fonction f est le produit de l'opposé de la dérivée de f par le carré de l'inverse de f.*** *(ce qui traduit l'écriture :*$(1/f)' = -f' \times 1/f^2$).

Preuve :
Le cas de la somme est évident : la limite d'une somme est la somme des limites.
Pour le produit : écrire $f(x)g(x) - f(a)g(a) = (f(x) - f(a))g(x) + f(a)(g(x) - g(a))$. Et en divisant par $(x-a)$ et par passage à la limite quand $x \to a$ on arrive au résultat.

Pour l'inverse : écrire $\left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)}\right)\frac{1}{x-a} = -\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\frac{1}{f(x)}\frac{1}{f(a)}$ qui a un sens pour $|x-a|$ assez petit.
Quand $x \to a$, comme f continue, $f(x) \to f(a)$, on obtient la formule souhaitée. ■

Proposition-08 (dérivée de la composée de deux fonctions)
Soient $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que$f(A) \subseteq B (\forall x \in A,\ f(x) \in B)$. Si f est dérivable en $a \in A$ et g dérivable en $f(a) \in B$, alors la fonction composée $g \circ f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en a et on a : $(g \circ f)^{'}(a) = g^{'}\big(f(a)\big) \cdot f^{'}(a)$

Preuve :

Par définition f est dérivable en a si on a : $(g \circ f)^{'}(a) = \lim_{x \to a} \frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(a)\big)}{x-a}$.
On suppose pour simplifier qu'il existe un intervalle $I \ni a$ tel que $f(x) \neq f(a)$ pour tout $x \in I \cap A \setminus \{a\}$. On peut écrire alors :

$$\lim_{x \to a} \frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(a)\big)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(a)\big)}{f(x)-f(a)} \cdot \frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

$$\lim_{x \to a} \frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(a)\big)}{x-a} = \underbrace{\lim_{x \to a} \frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(a)\big)}{f(x)-f(a)}}_{facteur\ -1} \cdot \underbrace{\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{facteur\ -2},$$

Le facteur-1 est la composée des fonctions : $x \longmapsto f(x)$ et $y \longmapsto \frac{g(y) - g(f(a))}{y - f(a)}$, comme f est continue en a, $f(x) \to f(a)$. Comme g est dérivable en $f(a)$ on a $\lim_{y \to f(a)} \frac{g(y)-g(f(a))}{y-f(a)} = g^{'}(f(a))$ en composant on trouve : $\lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x)-f(a)} = g^{'}(f(a))$. D'où la formule cherchée. ■

Proposition-09 (dérivée de la fonction réciproque)
Soient $f : A \longrightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ une fonction continue sur A. On suppose qu'il existe une fonction réciproque de f notée g telle que $g : B \longrightarrow A \subseteq \mathbb{R}$, c'est-à-dire on a :
$g\big(f(x)\big) = x, \forall x \in A$ et $f\big(g(y)\big) = y, \forall y \in B$. Autrement dit : $g = f^{-1}$
Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$, alors g est dérivable en $f(a)$ et on a : $g'(f(a)) = 1/f'(a)$

Preuve :

Sachant que si $g = f^{-1}$ on a $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x) = x$, il suffit de dériver les trois membres pour obtenir le résultat recherché.

5. Propriétés des fonctions dérivables.

Théorème-03(théorème de Rolle)
Soient $I = [a, b]$ un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Preuve :

Comme f est continue sur un segment ou intervalle fermé borné, alors f est bornée et atteint ses bornes : f admet un maximum et un minimum, théorème vu. Soient $M = \max\limits_{x\in I} f(x)$ et $m = \min\limits_{x\in I} f(x)$.
Si $m \neq f(a)$ ou $M \neq f(a)$ il existe un $c \in]a, b[$ tel que f possède un extremum en c. On sait alors que $f'(c) = 0$ d'après une proposition vue.

Sinon on a $m = f(a) = f(b)$et $M = f(a) = f(b)$. Donc f est constante sur $[a, b]$ c'est-à-dire $\forall x \in [a, b], f(x) = m$ par suite , $\forall c \in]a, b[, f^{'}(c) = (m)^{'} = 0$. ■

Théorème-04 (théorème des accroissements finis)
Soient $I = [a, b]$ un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Preuve :
On introduit une fonction auxiliaire définie par vérifiant les hypothèses du théorème de Rolle :
$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - (x - a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \text{ on a bien } \varphi(a) = \varphi(b) = 0.$$
La fonction φ étant continue sur $[a, b]$ et dérivable sur$]a, b[$, admet $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$ c'est-à-dire on a : $\varphi'(c) = 0 \Leftrightarrow f^{'}(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Leftrightarrow f^{'}(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ■

Proposition-11 (caractérisation de la monotonie d'une fonction)
Soient$A$ un intervalle de $\mathbb{R}$et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur A. Alors on a les résultats suivants :

1. La fonction f est constante sur A si et seulement si $f'(x) = 0, \forall x \in A$.
2. f est croissante (resp. décroissante) sur A si et seulement si $f'(x) \geq 0$(resp.$f'(x) \leq 0$), $\forall x \in A$.
3. Si $f'(x) > 0$ (resp.$f'(x) < 0$), $\forall x \in A$ alors $f$est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur A.

Preuve :
Résultat 1 : si f est constante sur A, f' est nulle sur A. Réciproquement soient $a, b \in A$ avec $a < b$. On applique le théorème des accroissements finis à la fonction f sur le segment $]a, b[: \exists c \in]a, b[$ tel que :
$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ mais comme f' est nulle sur A on a, $f'(c) = 0$ et par suite :
$f(b) - f(a) = 0$ i. e. $f(b) = f(a)$, donc f est constante.

Résultat 2 : Si f est croissante le signe de $(x - a)$ est égal au signe de $\big(f(x) - f(a)\big)$ donc le signe de $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est positif en passant à la limite on arrive à : $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$ i. e. $f^{'}(a) \geq 0$.

Réciproquement, en procédant comme pour le résultat-1 $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. Si $f'(c) \geq 0$, le signe de $(f(b) - f(a))$ est égal à celui de $(b - a)$, ce qui signifie que f est croissante. On traite le cas décroissant en remplaçant f par $-f$.

Résultat 3 : remettre résultat 2 en remplaçant les inégalités larges ($\leq$) par des inégalités strictes ($<$).

Remarque-07
Attention ! La réciproque de 3 n'est pas vraie. En effet la fonction $x \longmapsto f(x) = x^3$ est strictement croissante sur$\mathbb{R}$, mais $f'(x) = 3x^2$ s'annule en $x = 0$.

6. Application aux suites réelles

Définition-08 (point fixe)
Soient la fonction $f\,:\,A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $l \in A$. l'élément l est dit point fixe de la fonction f s'il vérifie : $f(l) = l$.

Théorème-04 (théorème du point fixe)
Soit $f\,:\,A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur A. Supposons que :

- f admet un point fixe en $l \in A$ c'est-à-dire l vérifie l'équation, $f(l) = l$.
- et il existe un intervalle $I = [l-a, l+a]$ et un réel positif $\lambda < 1$ tel que $\forall x \in I, |f'(x)| \leq \lambda$.

Alors la suite récurrence $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n), \ \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$, converge vers l.

(Voire figure Pf)

Preuve : (indications)
Poser $v_n = u_n - l$, il suffit de montrer que (v_n) converge vers 0. Montrer d'abord que $u_n \in I$.
Appliquer le théorème des accroissements finis à f sur l'intervalle $[u_n, l]$ si $u_n \leq l$ (ou bien sur $[l, u_n]$ si $u_n \geq l$) on obtient alors qu'il existe $c \in [u_n, l]$ tel que :

$f'(c) = \frac{f(u_n)-f(l)}{u_n - l} = \frac{u_{n+1}-l}{u_n - l}$.car $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(l) = l$. Comme $]u_n, l[\subset I$ on sait que :

$|f'(c)| \leq \lambda < 1$. D'où $\frac{|v_{n+1}|}{|v_n|} \leq \lambda$ $(*)$. Comme $\lambda < 1$ on a $|v_{n+1}| \leq |v_n|$ ce qui implique $u_{n+1} \in I$.

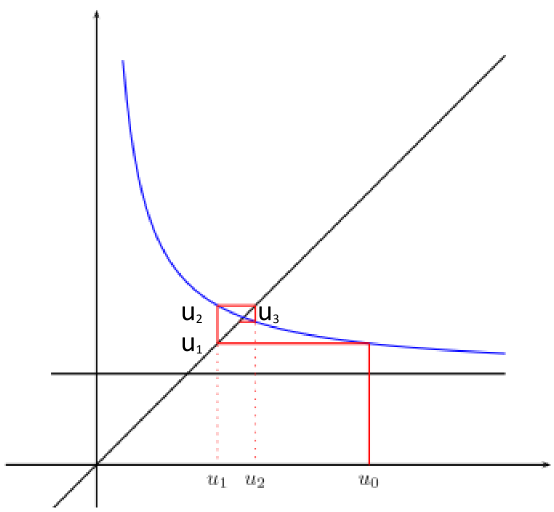
En itérant $(*)$ on arrive à : $|v_{n+1}| \leq \lambda |v_n| \leq \lambda^2 |v_{n-1}| \leq \cdots \leq \lambda^{n+1} |v_0|$.

Comme $0 \leq \lambda < 1$, la suite (λ^n) tend vers 0. Par conséquent (v_n) tend aussi vers 0. ■

Remarque-08
Si de plus la fonction dérivée de f' est continue, alors la condition $|f'(l)| < 1$ implique l'existence d'un intervalle $I = [l-a, l+a]$ tel que pour tout $x \in I$ on a $|f'(x)| \leq \lambda < 1$.On a $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ donc on a $|f'(x)| < 1$ pour tout $x > 1$. Ainsi on peut prendre d'intervalle $I = [l - 1/2, l + 1/2]$. Le théorème du point fixe implique alors que la suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = 1 + 1/u_n$ converge vers l.

Exemple-07
Prenons $f(x) = 1 + 1/x$. Soit $l = (1+\sqrt{2})/2$ le nombre d'or, ou le réel positif satisfaisant à l'équation: $l^2 = l + 1$, qui est équivalente à $l = f(l)$. Donc l est un point fixe de f.

Figure : Pf



Veuillez signaler aux chargé(e)s des Travaux dirigés ou chargé de cours toute erreur constatée, merci.