1. Comparaison entre fonctions et polynômes

On définit une notions qui permet de comparait des fonctions au voisinage d'un point ou même au voisinage de l'infini. Ces notions se matérialisent par ce qui est désigné par « les notations de Landau ».

Théorème-01 (limites particulières)

Pour tout $x \in]-1,1[$ on a :

$$\frac{1}{1-x} = \lim_{n\to+\infty} (1 + x + x^2 + \cdots + x^n). \qquad (1)$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$e^x = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) \qquad (2)$$

Remarque-01 (les fonctions $x \to \frac{1}{1-x}$ et $x \to e^x$)

Le résultat (1) s'obtient à partir de la suite $S_n = \sum_{i=0}^{i=n} u_i$ des sommes partielles de la suite géométrique (u_k) de 1ier terme $u_0 = 1$ et de terme général$u_k = x^k$. Et on sait que :

$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, ou bien $1 - x^{n+1} = (1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^n)$.

Puisque $x \in]-1,1[$, on a $\lim_{n\to+\infty} x^{n+1} = 0$ d'où l'égalité (1).

Le résultat (2) s'obtient à l'aide de la formule du binôme de Newton.

Par ailleurs considérons l'égalité (1) et posons :

$f(x) = \frac{1}{1-x}$, et $P_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \left(= \frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)$ on a donc : $f(x) - P_n(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x}$ qui est l'erreur commise en remplaçant $f(x)$ par $P_n(x)$. L'erreur est donc de l'ordre de x^{n+1}.

Prenons $x = 0.1 \in \mathcal{V}(0)$ alors $x^{n+1} = 10^{-1(n+1)}$ $P_n(0.1) = 1,\underbrace{11\ldots1}_{n\times 1}$. L'erreur est de$\frac{10^{-1(n+1)}}{9.10^{-1)}} = \frac{10^{-n)}}{9}$.

Si $n = 5$, en remplaçant $(f(0.1) = 1/0.9)$ par $(P_5(0.1) = 1.\underbrace{11111}_{5\times 1})$ on commet une erreur de l'ordre du millionième 10^{-6}.

Définition-01 (équivalente, négligeable, dominée)

Soient $f, g : A \to \mathbb{R}$ deux fonctions, a un nombre réel et I un intervalle ouvert tel que $a \in I \subseteq A$. On suppose que $g(x) \neq 0$ si $x \in I \setminus \{a\}$. On dit que

- f est dominée par g au $\mathcal{V}(a)$ si $\frac{f(x)}{g(x)}$, est bornée au $\mathcal{V}(a)$. On note alors :
  $f \underset{a}{=} O(g)$, et on lit, « f est un grand O de g au voisinage du point a ».
- f est négligeable devant g au $\mathcal{V}(a)$ si on a : $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. On note alors :
  $f \underset{a}{=} o(g)$, et on lit, « f est un petit o de g au voisinage du point a ».
- f est équivalente à g au $\mathcal{V}(a)$ si on a : $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. On note alors :
  $f \underset{a}{\sim} g$, *et on lit, « f est équivalent à g au voisinage du point a ».*

Définition-02 (classes de fonctions)

Soit $A \subset \mathbb{R}$ un intervalle ou une réunion d'intervalles. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on définit l'ensemble noté $C^n(A)$ comme l'ensemble des fonctions $f : A \to \mathbb{R}$ tel que f peut être dérivée n fois et sa dérivée $n$ième, notée $f^{(n)}$, est continue sur A.

On dit alors que la fonction $f : A \to \mathbb{R}$ est de classe C^n si par définition $f \in C^n(A)$.

Remarque-02 (Relation entre Classes)

1. Remarquer que $C^0(A)$ n'est autre que l'ensemble des fonctions continues sur A.
2. On a une suite d'inclusions strictes : $C^{n+1}(A) \subset C^n(A) \subset \cdots \subset C^1(A) \subset C^0(A)$.
3. Dire que f est de classe C^n revient à dire que $f \in C^n(A)$.
4. On note $C^\infty(A)$ l'intersection de toutes les classes $C^n(A)$ quand n décrit $\mathbb{N}$. Il s'agit de l'ensemble de toutes les fonctions $f: A \to \mathbb{R}$ qui admettent des dérivées de tout ordre $n \in \mathbb{N}$.

Définition-03 (polynôme et reste dits de Taylor)

Soit n un entier. Soit une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle ouvert I contenant un point a, et f $(n-1)$ fois dérivable sur I et dont la dérivée $n^{\text{ième}}$existe en a. On appelle polynôme de Taylor d'ordre n en a de f, le polynôme en défini par :

$$\boldsymbol{P_n(x)} = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a)^1 + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

On appelle reste de Taylor d'ordre n en a de f, la fonction $\boldsymbol{R_n}$ qui à $\boldsymbol{x \in I}$ associe :

$$\boldsymbol{R_n(x) = f(x) - P_n(x)}.$$

Remarque-03

L'idée est de remplacer une fonction f que l'on ne sait pas calculer (ou difficilement) par un polynôme, qui est facilement calculable. Mais si $f(x)$ n'est pas calculable, alors bien sûr le reste $R_n(x)$ ne l'est pas non plus. On doit donc chercher des moyens d'estimer ou de majorer ce reste. Le moins que l'on puisse demander quand on approche une fonction par un polynôme de degré n, est que le reste soit négligeabledevant $(x-a)^n$.

Définition-4 (développements limités)

Soient $f : A \to \mathbb{R}$ et $a \in A$. on dit que la fonction f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de a s'il existe $n+1$ nombres réels $b_0, b_1, \dots, b_n$ tels que pour tout $x \in A$ on a :

$$\begin{cases} \boldsymbol{f(x)} = b_0 + b_1(x-a)^1 + b_2(x-a)^2 + \cdots + b_n(x-a)^n + \boldsymbol{r_n(x)} \\ \boldsymbol{r_n(x)} = \boldsymbol{o}((x-a)^n) \end{cases}$$

Remarque-04 (cas particuliers)

1. Admettre un développement limité d'ordre 0 en a est équivalent à avoir une limite finie en a.
2. Un développement limité d'ordre n au voisinage de a, s'il existe, *est unique*.

Proposition-01 (unicité des développements limités)

Soient$I$ un intervalle ouvert, $0 \in I$ et$n$ un entier. Soit $f : I \to \mathbb{R}$définie sur I.On suppose qu'il existe deux polynômes de degré $n$qui vérifient au voisinage de 0 :

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{f(x) = P_n(x) + o((x-a)^n)} \\ \boldsymbol{f(x) = Q_n(x) + o((x-a)^n)} \end{array}\right\} \quad \text{Alors on a : } \boldsymbol{P_n = Q_n}$$

Preuve :

Le polynôme $\boldsymbol{P_n - Q_n}$ est de degré au plus égal à n, et il est négligeable devant x^n au voisinage de 0. Ce qui n'est possible que s'il est nul.■

2. Formules de Taylor

Le résultat de base, le seul que vous ayez vraiment besoin de retenir, dit que sous les hypothèses de la définition-03, le reste de Taylor $\boldsymbol{R_n(x)}$ est négligeable devant x^n au voisinage de 0, donc la fonction admet un développement limité, dont la partie polynomiale est son polynôme de Taylor d'ordre n. C'est le théorème de Taylor-Young.

Théorème-2 (formule de Taylor-Lagrange)

Soient I un intervalle ouvert, $0 \in I$ et n un entier. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ $(n-1)$ fois dérivable sur I, et dont la $n^{\text{ième}}$ dérivée existe en 0. Soit $\boldsymbol{R_n(x)}$ le reste de Taylor d'ordre $\boldsymbol{n}$ de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{0}$ alors :

$$\boldsymbol{R_n(x)} = \boldsymbol{f(x)} - \left(f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x^1 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \right)$$

Au voisinage de 0, $\boldsymbol{R_n(x)}$ est négligeable devantx^n, i.e. on a $\boldsymbol{R_n(x)} = \boldsymbol{o}(x^n)$.

Preuve :

On définit le nombre réel $\boldsymbol{A}$ par l'égalité suivante **:**

$$\boldsymbol{f(b)} - \left(f(a) + \frac{(b-a)^1}{1!} f^{(1)}(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f^{(2)}(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \right) = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} A.$$

Comme dans la démonstration du théorème des A.F. on introduit la fonction auxiliaire $\boldsymbol{\varphi}$ définie par :

$$\boldsymbol{\varphi(x)} = \boldsymbol{f(b)} - f(x) - \frac{(b-x)^1}{1!} f^{(1)}(x) - \frac{(b-x)^2}{2!} f^{(2)}(x) - \cdots - \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n)}(x) - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} A.$$

Comme $\boldsymbol{f} \in C^{n+1}(I)$ on a$\boldsymbol{f^{(n)}} \in C^1(I)$ et donc $\boldsymbol{\varphi} \in C^1(I)$**.** Le choix de A donne $\boldsymbol{\varphi(a)} = \boldsymbol{\varphi(b)} = \boldsymbol{0}$

On peut donc appliquer le théorème de Rolle à $\boldsymbol{\varphi}$ et on conclue que $\exists \boldsymbol{c} \in]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[$ telle que $\boldsymbol{\varphi'(c)} = \boldsymbol{0}$

Termes de la fonction : $\boldsymbol{\varphi(x)} =$	Termes de la fonction : $\boldsymbol{\varphi'(x)} =$
$\boldsymbol{f(b)} - f(x)$	$\boldsymbol{0} - f^{(1)}(x)$
$-\frac{(b-x)^1}{1!} f^{(1)}(x)$	$+f^{(1)}(x) - \frac{(b-x)^1}{1!} f^{(2)}(x)$
$-\frac{(b-x)^2}{2!} f^{(2)}(x)$	$+\frac{(b-x)^1}{1!} f^{(2)}(x) - \frac{(b-x)^2}{2!} f^{(3)}(x)$
…	…
$-\frac{(b-x)^p}{p!} f^{(p)}(x)$	$+\frac{(b-x)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p)}(x) - \frac{(b-x)^p}{p!} f^{(p+1)}(x)$
$-\frac{(b-x)^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+1)}(x)$	$+\frac{(b-x)^p}{p!} f^{(p+1)}(x) - \frac{(b-x)^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+2)}(x)$
…	…
$-\frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n)}(x)$	$+\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) - \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)$
$-\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} A$	$+\frac{(b-x)^n}{n!} A$
$\boldsymbol{\varphi'(x)} =$	$-\frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) + \frac{(b-x)^n}{n!} A$

Dans la colonne de droite il ne reste que deux termes, les autres s'annulant deux à deux. On obtient alors $\boldsymbol{\varphi'(x)} = \frac{(b-x)^n}{n!}\left(A - f^{(n+1)}(x)\right)$.

Sachant que $\boldsymbol{c} \in]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[$ on a nécessairement $\frac{(b-x)^n}{n!} > 0$, ce qui donne $\boldsymbol{\varphi'(c)} = \boldsymbol{0}$ et donc $f^{(n+1)}(c) = A$.

On a obtenu ainsi la formule de Taylor. ■

Remarque-05

Si $\boldsymbol{n = 0}$ la formule de Taylor-Lagrange coïncide avec le théorème des accroissements finis (TAF).

exemple-01 (application)

Soit $f(x) = cos\ x$. On a $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ donc $f \in C^{7}(\mathbb{R})$. La formule de Taylor au point $a = 0$ pour $n = 6$ et $b = x$, est applicable. Les dérivées de f jusqu'à l'ordre $n = 7$ s'écrivent comme suit :

$\boldsymbol{f^{(1)}(x) = -\sin x}$ $\boldsymbol{f^{(5)}(x) = -\sin x}$	$\boldsymbol{f^{(2)}(x) = -\cos x}$ $\boldsymbol{f^{(6)}(x) = -\cos x}$	$\boldsymbol{f^{(3)}(x) = \sin x}$ $\boldsymbol{f^{(7)}(x) = \sin x}$	$\boldsymbol{f^{(4)}(x) = \cos x}$ //

Pour tout

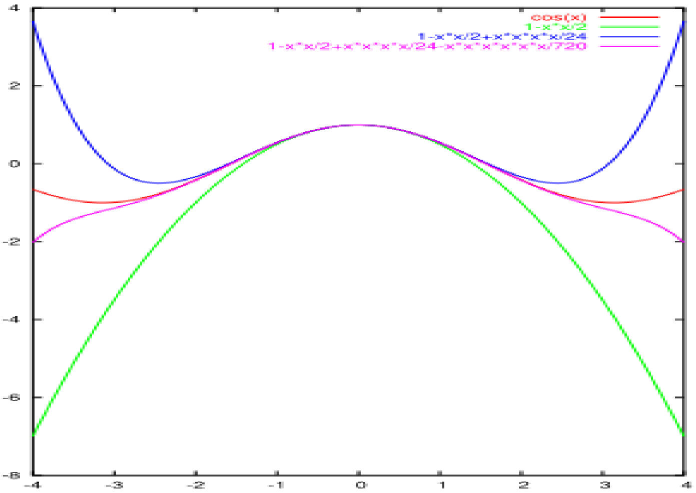
Pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$, il existe $\boldsymbol{c} \in]\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}[$ tel que :

$f(x) = cos\ x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!}\boldsymbol{f^{(7)}(c)}$ c'est-à-dire : $cos\ x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!}\boldsymbol{\sin(c)}$

Si on suppose que $\boldsymbol{x} \in]\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\pi}[$ on a $\boldsymbol{f^{(7)}(t) = \sin t \geq 0}, \forall \boldsymbol{t} \in]\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\pi}[$. On en déduit que :

Si $\boldsymbol{x} \in]\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\pi}[$ alors $cos\ x \geq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$

Les courbes des fonctions « $\boldsymbol{x \to \cos(x)}$ » et de leurs développements limités en 0 d'ordre 3, 5 et 7 se présentent ainsi :



Théorème-3 (formule de Taylor-Young)

Soient $\boldsymbol{f} \in C^{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{A})eta \in A$. Alors $\boldsymbol{f}$ admet un développement limité d'ordre n en a qui est donné par :

$$\begin{cases} \boldsymbol{f(x)} = f(a) + \frac{(x-a)^1}{1!}f^{(1)}(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f^{(2)}(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \boldsymbol{r_n(x)} \\ \boldsymbol{r_n(x)} = \boldsymbol{o}((x-a)^n) \end{cases}$$

Preuve :

On a$\boldsymbol{f} \in C^{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{A}) = C^{(\boldsymbol{n-1})+\boldsymbol{1}}(\boldsymbol{A})$. On peut donc appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $(\boldsymbol{n-1})$ à la fonction$\boldsymbol{f}$ avec $\boldsymbol{b = x} > a$ on trouve qu'il existe $\boldsymbol{c} \in]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}[$ tel que :

$\boldsymbol{f(x)} = f(a) + \frac{(x-a)^1}{1!}f^{(1)}(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(c)$. Ce dernier terme s'écrit : $\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(c) = \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!}(f^{(n)}(c) - f^{(n)}(a))$. Il suffit par conséquence de montrer que$\frac{(x-a)^n}{n!}\left(f^{(n)}(c) - f^{(n)}(a)\right) = \boldsymbol{o}((x-a)^n)$, autrement dit que$\lim\limits_{\boldsymbol{x \to a}}\left(f^{(n)}(c) - f^{(n)}(a)\right) = 0$. Ce qui est vrai puisque, par hypothèse,$f^{(n)}$ est continue en a. ■

3. Opérations sur les développements limités

A l'aide de développements limités de fonctions courantes ou usuelles et à l'aide de théorèmes généraux sur la sommation, la multiplication, l'inversion ou la composition de développements limités, il peut être déduit des développements limités de fonction plus complexe.

Théorème-4 ($+$, $\times$ de développements limités)

Soient deux fonctions f et g admettant des développements limités d'ordre n au voisinage d'un point a. Alors les fonctions $f+g$ et $f.g$ admettent des développements limités d'ordre n au point a. Plus précisément on a :

Si $f(x)=\sum_{k=0}^{k=n} a_k(x-a)^k+o((x-a)^n)$ et $g(x)=\sum_{k=0}^{k=n} b_k(x-a)^k+o((x-a)^n)$.

Alors on a :

$(f+g)(x)=\sum_{k=0}^{k=n}(a_k+b_k)(x-a)^k+o((x-a)^n)$,

$$(f.g)(x)=\sum_{k=0}^{k=n}\left(\sum_{i=0}^{i=k} a_i.b_{k-i}\right)(x-a)^k+o((x-a)^n).$$

Preuve :

Le cas de l'addition est évident. Pour le produit on multiplie les polynômes en $(x-a)$ issus de f et de g en négligeant les termes résultants dont le degré est $>\ n$ qui sont tous des $0((x-a)^n)$, donc négligeables.

Proposition-02 (composition de développements limités)

Soient deux fonctions f et g admettant des développements limités d'ordre n au voisinage de 0. On suppose que $g(0)=0$. Alors la fonction $(f\circ g)$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 obtenu en remplaçant dans f la variable x par le développement limité de d'ordre n en 0 et en négligeant les termes en x^k de degré$>\ n$.

Exemple :

Calculer le développement limité de $e^{\cos(x)}$ à l'ordre 3 en 0. On a $\cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)$.

On a $cos(0)=1\neq 0$. Mais on peut écrire$cos(x)=1+u(x)$ et $u(0)=0$.

Alors $e^{\cos(x)}=e^{1+\mathrm{u}(x)}=ee^{\mathrm{u}(x)}$ et on a :

$$\boldsymbol{e^{u}}=\mathbf{1}+\boldsymbol{u}+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}+o(u^3).$$

Comme $u(x)=-\frac{x^2}{2}+o(x^3)$, $u^2(x)$ commencant à x^4 peut être négligé ainsi que toute puissance $u^k(x)$ telle que $k\geq 2$. Finalement on obtient$e^{\cos(x)}=e\left(1-\frac{x^2}{2}\right)+o(x^3)$.

Proposition-03 (passage d'un développement limité en a vers 0)

Soit I un intervalle ouvert contenant 0 et n un entier. Soit f définie sur I. Soit g la fonction qui à yassocie $g(y)=f(a+y)$. La fonction f admet un développement limité d'ordre n en a si et seulement si g admet un développement limité d'ordre n en 0.

$f(x)=P_n(x)+o((x-a)^n)\Leftrightarrow g(y)=f(a+y)=P_n(a+y)+o(y^n)$, avec $x\in\mathcal{V}(a); y\in\mathcal{V}(0)$

Preuve : en exercice

Proposition-04 (développement limité de l'inverse)

Soit la fonction g admettant un développement limité d'ordre n au voisinage de 0. Si $g(0)\neq 0$ la fonction $1/g$ admet un développement limité d'ordre n en 0.

Preuve :

Ecrivons le développement limité de gà l'ordre $n$en 0. $g(x) = b_0 + \sum_{k=1}^{k=n} b_k x^k + o(x^n)$.
Comme $g(0) \neq 0 \Longrightarrow b_0 \neq 0$, on peut donc écrire :
$\frac{g(x)}{b_0} = 1 - \sum_{k=1}^{k=n} \left(-\frac{b_k}{b_0}\right) x^k + o(x^n)$.
En inversant les deux membres, on arrive à :

$$\frac{b_0}{g(x)} = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{k=n} \left(-\frac{b_k}{b_0}\right) x^k + o(x^n)} \Leftrightarrow \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b_0} \times \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{k=n} \left(-\frac{b_k}{b_0}\right) x^k + o(x^n)} \quad (1)$$

En posant $u(x) = \sum_{k=1}^{k=n} \left(-\frac{b_k}{b_0}\right) x^k + o(x^n)$, on a $u(x) \in \mathcal{V}(0)$ et $\frac{1}{1-u(x)}$ admet un développement limité d'ordre n en 0 à savoir :
$\frac{1}{1-u(x)} = 1 + u^1(x) + u^2(x) + \cdots + u^n(x) + o(u^n(x))$.
Par composition on a un développement limité d'ordre n en 0 de la fonction de $\frac{1}{1-u(x)}$ donc de :
$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b_0} \times \frac{1}{1-u(x)}$.
La proposition et ainsi montrer. ■

Exemple-03 (application)

Sachant que : $cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n!}x^{2n} + o(x^n)$.
Soit la fonction$f(x) = cos(x) - 1$. Trouver s'il existe le développement limité, d'ordre 6 en 0 de la fonction définie par $g(x) = x^2/f(x)$.
On a : $f(x) = cos(x) - 1 = -\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n!}x^{2n} + o(x^n)$. Ce qui donne pour g :

$$g(x) = \frac{x^2}{f(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{x^2(-\frac{1}{2!} + \frac{1}{4!}x^2 - \frac{1}{6!}x^4 + \frac{1}{8!}x^6 + o(x^6))} = \frac{1}{(-\frac{1}{2!} + \frac{1}{4!}x^2 - \frac{1}{6!}x^4 + \frac{1}{8!}x^6 + o(x^6))}.$$

En multipliant par (-2) le numérateur et dénominateur, on trouve :
$g(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{-2}{\left(1 - \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{5!3}x^4 - \frac{1}{7!4}x^6 + o(x^6)\right)} = -2 \times \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{5!3}x^4 - \frac{1}{7!4}x^6 + o(x^6)\right)} = -2 \times \frac{1}{1-u(x)}$.
En posant $u(x) = \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{5!3}x^4 + \frac{1}{7!4}x^6 + o(x^6)$ qui donne bien$\lim_{x\to 0} u(x) = 0$. Ecrivons le développement limité de $\frac{1}{1-u(x)} \underset{u(x)\to 0}{=} 1 + u^1(x) + u^2(x) + u^3(x) + o(x^6)(K)$.
Posons$u(x) = a_2x^2 + a_4x^4 + a_6x^6 + o(x^6)$. On a :
$u^2(x) = {a_2}^2x^4 + a_2a_4x^6$; $u^3(x) = \frac{1}{12^3}x^6$.
Il suffit de remplacer les puissances de $u(x)$ par leurs valeurs respectives dans (K).

Théorème-5 (développements limités d'intégrales et dérivées)

Soit n un entier, et I un intervalle ouvert contenant 0. Soit f une fonction $n-1$ fois dérivable sur I et dont la n 1ième dérivée existe en 0. Soit P_n son polynôme de Taylor d'ordre n et R_n son le reste de f.
$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$,avec$R_n(x) = o(x^n)$

1. Dérivation : la dérivée admet un développement limité d'ordre $n-1$ en 0, dont le polynôme de Taylorest la dérivée de celui de f en 0, c'est dire :
$$f'(x) = P'_n(x) + o(x^{n-1}).$$
2. Intégration : toute primitive de f admet un développement limité d'ordre $n-1$ en 0 dont le polynôme de Taylor est une primitive de celui de f.
$$\int f(x)\,dx = \int P_n(x)\,dx + o(x^{n+1}).$$

Preuve : découle du théorème de Taylor-Young.

4. développements limités des fonctions usuelles

Les développements limités de fonctions donnés ici sont calculés au voisinage de 0. Pour les obtenir on calcul les dérivées d'ordre n au point 0 afin de déduire le polynôme de Taylor de f. On donne ci-après les développements limités principaux qu'il faut connaitre.

Théorème-6 (développements limités usuels)

Soit n un entier et α un nombre réel. Alors on a les développements limités d'ordre n en 0 des fonctions :

1. $e^x = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$.
2. $\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^n)$.
3. $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n!}x^{2n} + o(x^n)$.
4. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$.
5. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + o(x^n)$.

Preuve : Utiliser les formules de Taylor, dérivée successives en 0.

Développements limités usuels

Les développements limités ci-dessous sont valables quand **x tend vers 0** et uniquement dans ce cas.

Formule de Taylor-Young en 0. $f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n)$.

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$\operatorname{ch} x \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \quad \text{(et même } o(x^{2n+1}) \text{ et même } O(x^{2n+2})\text{)}$$

$$\operatorname{sh} x \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \quad \text{(et même } o(x^{2n+2}) \text{ ou } O(x^{2n+3})\text{)}$$

$$\cos x \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \quad \text{(et même } o(x^{2n+1}) \text{ ou } O(x^{2n+2})\text{)}$$

$$\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \quad \text{(et même } o(x^{2n+2}) \text{ ou } O(x^{2n+3})\text{)}$$

$$\tan x \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^7)$$

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

$$\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} + \dots - \frac{x^n}{n} + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

$$\operatorname{Arctan} x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}) \quad \text{(et même } o(x^{2n+2}) \text{ ou } O(x^{2n+3})\text{)}$$

$$\operatorname{Argth} x \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}) \quad \text{(et même } o(x^{2n+2}) \text{ ou } O(x^{2n+3})\text{)}$$

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &\underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + o(x^n) \quad (\alpha \text{ réel donné}) \\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n)\end{aligned}$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} \underset{x\to 0}{=} 1 + 2x + 3x^2 + \dots (n+1)x^n + o(x^n)$$

On obtient un développement de $\operatorname{Arcsin} x$ (resp. $\operatorname{argsh} x$) en intégrant un développement de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$ (resp. $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-1/2}$).

Développements limités usuels

(au voisinage de 0)

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n.\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n.\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}.\frac{1.1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n n!}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + \cdots + (-1)^n.\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}.\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\operatorname{argth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n.\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{argsh} x = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{3}{8}\frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n.\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{3}{8}\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$