Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to E$ trois applications.

Montrer que si, parmi les trois applications $h \circ g \circ f$, $g \circ f \circ h$ et $f \circ h \circ g$, deux sont surjectives et la troisième injective (ou deux sont injectives et la troisième surjective) alors les trois applications f, g, et h sont bijectives.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soit f une application de E dans F.

Montrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

(a) f est surjective

(b) Pour tout ensemble G et toutes applications $g, h : F \to G$, $g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ trois applications.

Montrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives, alors f, g et h sont bijectives.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

Montrer les implications suivantes :

1. Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective
2. Si $g \circ f$ est injective alors f est injective
3. Si $g \circ f$ est surjective et g est injective, alors f est surjective
4. Si $g \circ f$ est injective et f est surjective, alors g est injective

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soit E un ensemble. Montrer qu'il n'existe pas de surjection de E sur $\mathcal{P}(E)$.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Pour simplifier, on pose $a = h \circ g \circ f$, $b = g \circ f \circ h$ et $c = f \circ h \circ g$.

Supposer par exemple que a et b sont surjectives et que c est injective.

En déduire successivement que g puis h puis f sont bijectives.

Procéder de même pour la deuxième question.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

– Si f est surjective et si $g \circ f = h \circ f$, montrer que $g(y) = h(y)$ pour tout y de F.
– Pour la réciproque, on suppose que f n'est pas surjective.
  Soit y un élément de F ne possédant aucun antécédent par f.
  Définir alors g, h sur $G = \{0, 1\}$, distinctes, telles que pourtant $g \circ f = h \circ f$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Montrer que g est surjective, puis qu'elle est injective.

En déduire que f puis h sont bijectives.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

1. Si $z \in G$, il a un antécédent x dans E par $g \circ f$. Donc $z = g(\ldots)$
2. Si $f(a) = f(b)$ alors $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(b)$ donc ...
3. Soit y dans F, et $z = g(y)$. Il existe x dans E tel que $z = (g \circ f)(x)$. Or g est injective...
4. Supposer $g(y) = g(y')$. Les deux éléments y, y' ont des antécédants par f.
   Utiliser finalement l'injectivité de $g \circ f$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

Par l'absurde, soit f une surjection de E sur $\mathcal{P}(E)$.

Introduire le sous ensemble A formé des x de E tels que $x \notin f(X)$.

Soit a dans E tel que $f(a) = A$. Se demander si a est ou n'est pas dans A.

Corrigés des exercices

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Rappelons que si u et v sont deux applications et si $w = v \circ u$, alors l'injectivité de w implique celle de u et la surjectivité de w implique celle de v. On sait bien sûr que si u et v sont toutes deux injectives (resp. toutes deux surjectives) alors il en est de même de w.

– On ne perd rien à supposer que $a = h \circ g \circ f$ et $b = g \circ f \circ h$ sont surjectives et que $c = f \circ h \circ g$ est injective.
  La surjectivité de b implique celle de g.
  L'injectivité de c implique celle de g. Ainsi g est bijective.
  On en déduit que $f \circ h = c \circ g^{-1}$ est injective, ainsi donc que h.
  Mais la surjectivité de a implique celle de h. L'application h est donc bijective.
  On en déduit que $f = (h \circ g)^{-1} \circ a$ est surjective et que $f = c \circ (h \circ g)^{-1}$ est injective.
  Ainsi les trois applications f, g, h sont bijectives.
– Pour la deuxième question, on peut supposer par exemple que a et b sont injectives et que c est surjective. On en déduit alors (passons les détails) que f est injective et surjective donc bijective, puis qu'il en est de même de h, avant de terminer par g.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

– Supposons que f soit surjective.
  Soient g, h deux applications de F dans un ensemble G telle que $g \circ f = h \circ f$.
  Soit y un élément quelconque de F, et soit x un antécédent de y par f.
  On a $g(y) = (g \circ f)(x) = (h \circ f)(x) = h(y)$.
  Puisque cette égalité est vraie pour tout y de F, il en résulte $g = h$.
– Réciproquement, on suppose que f n'est pas surjective.
  Il faut trouver G et $g, h : F \to G$ telles que $g \circ f = h \circ f$ mais $g \neq h$.
  Soit y un élément de F ne possédant aucun antécédent par f.
  Posons $G = \{0, 1\}$ et définissons g et h par : $\begin{cases} \forall\, z \neq y, g(z) = h(z) = 1 \\ g(y) = 1, h(y) = 0 \end{cases}$
  Les applications g et h ne diffèrent qu'en y. Ainsi $g \circ f = h \circ f$ car pour tout x de E, on a $f(x) \neq y$ et donc $g(f(x)) = h(f(x))$. Pourtant $g \neq h$.

On a donc prouvé l'équivalence demandée.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

La bijectivité (donc la surjectivité) de $g \circ f$ implique la surjectivité de g.
La bijectivité (donc l'injectivité) de $h \circ g$ implique l'injectivité de g.
Ainsi g est bijective. On en déduit que $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ est bijective.
De même, l'application $h = (h \circ g) \circ g^{-1}$ est bijective.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

1. On suppose que $g \circ f$ est surjective.
   Soit z un élément de G : z possède un antécédent x dans E par $g \circ f$.
   On a alors $z = (g \circ f)(x) = g(y)$ avec $y = f(x)$.
   Ainsi z possède un antécédent y dans F par g : l'application g est surjective.
2. On suppose que $g \circ f$ est injective. Soient a et b deux éléments de E.
   Si $f(a) = f(b)$ alors $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(b)$ puis $a = b$ de par l'hypothèse sur $g \circ f$.
   Ainsi $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$: l'application f est injective.
3. On suppose $g \circ f$ surjective et g injective.
   Soit y un élément de F. Soit z son image par g.
   Puisque $g \circ f$ est surjective, il existe x dans E tel que $z = (g \circ f)(x)$.
   On peut donc écrire $z = g(y)$ et $z = g(f(x))$. L'injectivité de g donne alors $y = f(x)$.
   Ainsi tout y dans F possède un antécédent x par f : l'application f est surjective.
4. On suppose $g \circ f$ injective et f surjective.
   Soient y et y' deux éléments de F tels que $g(y) = g(y')$.
   Puisque f est surjective, il existe x, x' dans E tels que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$.
   On en déduit $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$, puis $x = x'$ car $g \circ f$ est injective.
   Il en découle $y = y'$, ce qui prouve l'injectivité de g.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

On raisonne par l'absurde. Soit f une surjection de E sur $\mathcal{P}(E)$.
Pour toute partie X de E, il existe donc x dans E tel que $f(x) = X$.
Il est alors légitime de se demander si x appartient ou non à l'ensemble X.
Plus précisément, on définit le sous ensemble A formé des x de E tels que $x \notin f(X)$.
L'application f étant surjective, il existe a dans E tel que $f(a) = A$.
De deux choses l'une :

- Soit a appartient à A, ce qui signifie que a n'appartient pas à $f(a)$ c'est-à-dire à A...
- Soit a n'appartient pas à A, ce qui signifie que a appartient à $f(a)$ c'est-à-dire à A...

Dans les deux cas la contradiction est manifeste ! L'hypothèse de départ est donc absurde.
Autrement dit, il n'existe pas de surjection de E sur $\mathcal{P}(E)$.