Programme pour le module M03 divisé en 2 parties parallèles

Calcul Intégral & annexes			Equation Différentielles & ..
Intégration dans R			***Equation différentielles linéaire du 1er ordre***
Primitives ; intégrations (changement de variable)			Eq. linéaire à variables séparables ; éq. linéaire type homogène
Intégration par partie ; Intégrales indéfinies (convergence, Fonctions Gamma et Beta)			Eq linéaire à coefficients variables (facteur d'intégration)
Séries numériques			***Eq diff. Lin. 2nd ordre à coéf. constants***
Séries (fonctions en escaliers dans les intégrales) ; convergence, divergence grossière.			Equation caractéristique et résolution d'éq. sans second membre ; (exples d'ordre supérieur)
Séries usuelles (critère intégral) ; critères de conv. (de D'Alembert ; de comparaison)			Equation avec second membre
Séries entières et séries de Laurent			Séries entières et solutions approchées
Définition ; convergence ; approximations.			***Eq diff. par la Transformée de Laplace***
Séries de Laurent ; résidu			Transformation de Laplace
Calcul de résidus ; calcul d'intégrale par les résidus.			Transformation de Laplace (suite)
Série et transformé de Fourier			Eq. diff. avec cond. Initiales.
Définitions (coefficients) ; convergence ;…(suite).			Impulsions ; Eq. diff. avec impulsions
Transformation de Fourier ; ….			***Transformée de Fourier***
Application au calcul intégrale			Eq diff. à deux variables (t,x)
Intégration multiple			Eq diff. à deux variables (suite)
Intégrale double ; coordonnées polaires			***EDP***
Intégrale triple ; coordonnées cylindriques ; coordonnées sphériques.			Modèles d'équations (ondes)
Applications			Modèles d'équations (diffusions)
			Résolution par les séries de Fourier

Séance 1

1. INTÉGRATIONS DANS $\mathbb{R}$

1.1. PRIMITIVES ET INTÉGRATIONS

Théorème : *Soient a et b sont deux réels donnés (a < b), et f une fonction définie sur [a, b].*
Si *f est continue sur [a, b]* ***alors*** *f admet* ***une*** *primitive sur [a, b], notée F (i.e., une fonction telle que $F' = f$ sur (a, b)) et on a :*

$$\int_a^b f(u).du = F(b) - F(a).$$

NB : **La** primitive de f qui s'annule en a est

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

Tableau de primitives

Condition	$n \in \mathbb{Q}$ $n \neq -1$	$u(x) \neq 0$		$u(x) > 0$			$\lvert u \rvert < 1$
Fonction f	$u'.u^n$	$\frac{u'}{u}$	$u'.e^u$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$u'.\cos u$	$u'.\sin u$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
Primitive F	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	$\ln u$	e^u	$2\sqrt{u}$	$\sin u$	$-\cos u$	$\arcsin u$

Propriétés : Soient f, g :[a, b] → R deux fonctions intégrables. Alors,

1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx+\beta \int_a^b g(x)dx$

2) Si $\forall x \in [a,b]$: $f(x) \leq g(x)$ *alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$

3) on a toujours $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$

4) Pour tout $c \in]a,b[$: $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

En particulier, $\displaystyle\int_b^a f(t)\,\mathrm{dt} = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}.$

1.2. CHANGEMENT DE VARIABLE DANS $\mathbb{R}$

Théorème : *Soit φ, un C^1-difféomorphisme (bijection continue avec réciproque continue), alors (en posant $\phi(t) := u$):*

$$\int_a^b f[\phi(t)]\,\phi'(t)\,dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f[u]\,du$$

Exemples:

1) Primitives de $f : x \longmapsto \dfrac{x}{1+x^2}$. ?

Solution : f est continue sur $\mathbb{R}$ comme composition et quotient de fonctions continues, donc f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

Pour $u = 1 + x^2$ on a $f(x) = \frac{1}{2}\frac{u'}{u}$.

Par conséquent (***tableau des primitives***), les primitives de f sont les fonctions

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C \end{array} \qquad \text{où} \quad C \in \mathbb{R}$$

2) Primitives de $f : x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. ?

Solution : f est continue sur $\mathbb{R}$ comme composition et quotient de fonctions continues, donc f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

Pour $u = 1 + x^2$ on a $f(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Par conséquent (***tableau des primitives***), les primitives de f sont les fonctions

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{1+x^2} + C \end{array} \qquad \text{où} \quad C \in \mathbb{R}$$

3) Calculer $\displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{1}{t^2+2t-3}\,dt$

Solution : au dénominateur $\Delta = 16$, les racines : $t_1 = 1$ et $t_2 = -3$.

La fonction $t \rightarrow \frac{1}{t^2+2t-3}$ est continue sur $[-2, 0]$;

$$\frac{1}{t^2+2t-3}=\frac{1}{(t-1)(t+3)}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+3}$$

On multiplie par $(t-1)$ alors : $\quad A=\left.\frac{1}{(t+3)}\right|_{t=1}=\frac{1}{4}$

On multiplie par $(t+3)$ alors : $\quad B=\left.\frac{1}{(t-1)}\right|_{t=-3}=-\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{0}\frac{1}{t^2+2t-3}\,dt&=\frac{1}{4}\int_{-2}^{0}\frac{1}{t-1}\,dt-\frac{1}{4}\int_{-2}^{0}\frac{1}{t+3}\,dt\\&=\frac{1}{4}\ln|t-1|\,\Big|_{-2}^{0}-\frac{1}{4}\ln|t+3|\,\Big|_{-2}^{0}\\&=\ldots\end{aligned}$$

4) *Calculer* $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^2+x+1}\,dx$

Solution : $\Delta<0$, la fonction $x\to\frac{1}{x^2+x+1}$ est continue sur $[0,1]$, donc intégrable. On met le trinôme sous forme canonique :

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\left[\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right].$$

On effectue le changement de variable : $\begin{cases}t=\frac{2x+1}{\sqrt{3}},\\ \mathrm{d}t=\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{d}x.\end{cases}$

$$I=\frac{4}{3}\int_0^1\frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left[\arctan t\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

5) *Calculer les primitives de* $f:x\longmapsto\dfrac{x^2+x-1}{x^4-1}.$

Solution : f est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$, donc elle admet des primitives sur $I_1=]-\infty,-1[$, $I_2=]-1,1[$ et $I_3=]1,+\infty[$.

Comme $x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$ on cherche des réels a,b,c,d tels que pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,+1\}$:

$$f(x)=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}+\frac{cx+d}{x^2+1}.$$

$[f(x)(x-1)]_{x=1}$, $[f(x)(x+1)]_{x=-1}$ et $[f(x)(x^2+1)]_{x=i}$ donnent $a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{1}{4}$ et $c\,i+d=1-\frac{i}{2}$ ($i^2=-1$). Or c et d sont réels, donc $c=-\frac{1}{2}$ et $d=1$; d'où:

$$f(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)+\frac{-\frac{x}{2}+1}{x^2+1}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)+\frac{1}{x^2+1}.$$

On en déduit les primitives de f :

$$F(x)=\frac{1}{4}\Big(\ln|x-1|+\ln|x+1|\Big)-\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+\arctan x+C$$

6) Calculer la primitive de $f: x\to f(x)=e^x\cos e^x$.

Solution : la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (produit de fonctions continues) donc admet une primitive $F(x)=\int^x e^t\cos e^t dt$ sur $\mathbb{R}$.

Posons $u(t)=e^t$ alors $du=u'(t)\,dt=e^t\,dt$ d'où:

$$F(x)=\int^x e^t\cos e^t dt=\int^{t=x}\cos u\,du=\sin u\Big|^{t=x}=\sin e^t\Big|^{t=x}=\sin e^x+C$$

EXO TD :

TD 1) Primitives de $x\longmapsto\dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}$. :

Solution : f est continue sur $\mathbb{R}$ (***pourquoi ?***), donc f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

Pour $u=\cos x$ on a $f(x)=\frac{u'}{1+u^2}$.

D'où les primitives de f (***tableau des primitives en annexe***) sont les fonctions

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & -\arctan(\cos x)+C \end{array} \qquad \text{où}\quad C\in\mathbb{R}$$

TD 2) Calculer la primitive de $f: x\to f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

Solution : f est continue sur le domaine de définition $D_f=\{x\in\mathbb{R}\ /\ 1-\ln^2 x\geq 0\}$. Posons $u=\ln x$. On a

$$1-u^2\geq 0\iff -1\leq u\leq +1\iff e^{-1}\leq x\leq e^{+1}.$$

Donc f admet une primitive $F=\int^x\frac{1}{t\sqrt{1-\ln^2 t}}dt$ sur $D_f=[\frac{1}{e},e]$;

$u=\ln t\implies du=\frac{1}{t}\,dt$:

$$F(x)=\int^{t=x}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\arcsin u\Big|^{t=x}=\arcsin(\ln t)\Big|^{t=x}=\arcsin(\ln x)+C$$

TD 3) trouver les primitives de $\dfrac{x-2}{x^2+2x-3}$

Solution :

$$\begin{aligned}\frac{x-2}{x^2+2x-3} &= \frac{x+1}{x^2+2x-3} + \frac{-3}{x^2+2x-3}\\ &= \frac{1}{2}\frac{2x+2}{x^2+2x-3} + \frac{-3}{x^2+2x-3}\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\int \frac{x-2}{x^2+2x-3}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x-3}\,dx + \int \frac{-3}{x^2+2x-3}\,dx\\ &= I_1 + I_2\end{aligned}$$

Calcule de I_1 ***:***

$$I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x-3}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+2x-3| + C_1$$

Calcule de I_2 ***:***

Au dénominateur $\Delta = 16$, les racines : $x_1 = 1$ et $x_2 = -3$.

$$\frac{-3}{x^2+2x-3} = \frac{-3}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3}$$

On multiplie par $(x-1)$ alors : $\quad A = \left.\dfrac{-3}{(x+3)}\right|_{x=1} = -\dfrac{3}{4}$

On multiplie par $(x+3)$ alors : $\quad B = \left.\dfrac{-3}{(x-1)}\right|_{x=-3} = \dfrac{3}{4}$

$$\begin{aligned}I_2 &= \int \frac{-3}{x^2+2x-3}\,dt\\ &= -\frac{3}{4}\int \frac{1}{t-1}\,dt + \frac{3}{4}\int \frac{1}{x+3}\,dt\\ &= -\frac{3}{4}\ln|t-1| + \frac{3}{4}\ln|t+3| + C_2\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\int \frac{x-2}{x^2+2x-3}\,dx &= I_1 + I_2\\ &= \frac{1}{2}\ln|x^2+2x-3| - \frac{3}{4}\ln|t-1| + \frac{3}{4}\ln|t+3| + C_3\end{aligned}$$

TD 4) *Calculer* $\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$

Solution : $\Delta < 0$, la fonction $x \to \frac{1}{x^2+x+1}$ est continue sur $[0,1]$, donc intégrable. On met le trinôme sous forme canonique :

$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right].$$

On effectue le changement de variable : $\begin{cases} t = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}, \\ \mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}x. \end{cases}$

$$I = \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left[\arctan t\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

TD 5) *Calculer* $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\,\mathrm{d}x.$

Solution : f est intégrable sur $\mathbb{R}$. On linéarise $\cos^4 x$:

$$\cos^4 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4,$$

$$\cos^4 x = \frac{1}{2^4}\left(e^{4ix} + 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} + 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix}\right),$$

$$\cos^4 x = \frac{1}{2^4}\left[e^{4ix} + e^{-4ix} + 4(e^{2ix}+e^{-2ix}) + 6\right],$$

$$\cos^4 x = \frac{1}{2^4}(2\cos 4x + 8\cos 2x + 6),$$

$$\cos^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 3).$$

En intégrant on obtient $I = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\sin 4x + 2\sin 2x + 3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{16}$

Séance 2

1.3. INTÉGRATION PAR PARTIES

__Théorème :__ Soient u et v, deux fonction dérivables sur un intervalle I, dont les dérivées sont continues sur I, et a et b, deux réels de I. Alors

$$\int_a^b u(x)v'(x).dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x).dx.$$

Exemples:

1) Produit de polynômes et fonction trigonométriques (cos , sin)

1) Calcul de la primitive $x \sin x$ *qui s'annule en 0.*

Solution : On cherche la fonction $\phi(x) = \int_0^x x \sin x.dx$. $\boxed{x \longmapsto x \sin x}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc intégrable. Utilisons un calcul par parties :
Posons $u(x) = x$ et $v'(x) = \sin x$, alors $u'(x) = 1$ et $v(x) = ?\cos x$.
Pour tout réel x, on a :

$$\phi(x) = \int_0^x t \sin t dt = \int_0^x u(t)v'(t).dx = [-t \cos t]_0^x + \int_0^x \cos t.dx$$

$$= x \cos x + [\sin t]_0^x = x \cos x + \sin x.$$

2) Produit de polynômes et fonction exponentielle.

Calculer : $\int^x t\, e^{-t}\, dt$?

Solution : $x \to te^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc intégrable.
Intégrons par parties. Pour tout réel t, on a :

$$\begin{aligned}\int^x te^{-t}\, dt &= \int^x t(-e^{-t})'\, dt \\ &= -te^{-t}\Big|^x - \int^x (t)'(-e^{-t})\, dt \\ &= -xe^{-x} - \int^x 1 \cdot (-e^{-t})\, dt \\ &= -xe^{-x} - e^{-x}\end{aligned}$$

NB :

1/ Cette technique s'applique également aux fonctions hyperboliques

2/ De la même manière, on calcule les intégrales $\int^x \cos t\, e^{\lambda t}\, dt$ et $\int^x \sin t\, e^{\lambda t}\, dt$ par deux intégrations par partie.

Exemples:

$\boxed{\text{1) Calculer : } I := \int^x \sin t\ e^t\, dt}$

Solution : la fonction $t \to \sin t\ e^t$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc intégrable. Intégrons par parties. Pour tout réel t, on a :

$$I := \int^x \sin t\ e^t\, dt = \int^x \sin t\ (e^t)'\, dt$$
$$= \sin x\ e^x - \int^x \cos t\ e^t\, dt = \sin x\ e^x - \int^x \cos t\ (e^t)'\, dt$$
$$= \sin x\ e^x - \cos x\ e^x + \int^x - \sin t\ e^t\, dt = \sin x\ e^x - \cos x\ e^x - I$$

donc $2\, I = \sin x\ e^x - \cos x\ e^x$ et $I = \frac{1}{2}\big(\sin x - \cos x\big)\, e^x$

EXO :

$\boxed{\text{Exo1) Calculer } I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n}\, \mathrm{d}t \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*.}$

Solution : la fonction $t \to \frac{1}{(1+t^2)^n}$, étant continue sur $[0, 1]$, est intégrable.

On intègre par parties: on pose $\begin{cases} u(t) = \frac{1}{(1+t^2)^n}, \\ v'(t) = 1, \end{cases}$ alors

$\begin{cases} u'(t) = -\frac{2nt}{(1+t^2)^{n+1}}, \\ v(t) = t. \end{cases}$. on déduit:

$$I_n = \left[\frac{t}{(1+t^2)^n}\right]_0^1 + 2n \int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\, \mathrm{d}t,$$
$$I_n = \frac{1}{2^n} + 2n \int_0^1 \frac{t^2+1-1}{(1+t^2)^{n+1}}\, \mathrm{d}t,$$
$$I_n = \frac{1}{2^n} + 2n \int_0^1 \left(\frac{1}{(1+t^2)^n} - \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}\right) \mathrm{d}t,$$
$$I_n = \frac{1}{2^n} + 2n(I_n - I_{n+1}).$$

On en déduit une relation entre I_n et I_{n+1}.

De plus $I_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, \mathrm{d}t = [\arctan t]_0^1 = \frac{\pi}{4},$, donc la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie la relation de récurrence :

$$\boxed{\begin{cases} I_1 = \dfrac{\pi}{4}, \\ I_{n+1} = \dfrac{1}{n2^{n+1}} + \dfrac{2n-1}{2n} I_n. \end{cases}}$$

Exo2) *Soit* $f \in C^{n+1}(I, \mathbb{R})$ *où* $n \in \mathbb{N}$ *. Calculer* $I_n = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$ *pour* $n = \in \{0, 1, 2\}$ *et déduire dans chaque cas f(x). Trouver une relation entre* I_n *et* I_{n+1}*. Ecrire f(x) dans le cas général.*

Solution :

$\underline{n = 0:}$ $\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a)$ d'où $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$

$\underline{n = 1:}$

$$\int_a^x \frac{(x-t)}{1} f''(t)dt = (x-t)f'(t)\Big|_a^x - \int_a^x (-1)f'(t)dt$$
$$= -(x-a)f'(a) + f(x) - f(a)$$

d'où $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)}{1} f''(t)dt$

$\underline{n = 2:}$

$$\int_a^x \frac{(x-t)^2}{2!} f^{(3)}(t)dt = \frac{(x-t)^2}{2!} f^{(2)}(t)\Big|_a^x - \int_a^x \frac{(-1)(x-t)}{1!} f^{(2)}(t)dt$$
$$= -\frac{(x-a)^2}{2!} f^{(2)}(a) + \frac{(x-t)}{1!} f'(t)\Big|_a^x - \int_a^x (-1)f'(t)dt$$
$$= -\frac{(x-a)^2}{2!} f^{(2)}(a) - \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + f(x) - f(a)$$

d'où $f(x) = f(a) + \dfrac{(x-a)}{1!} f'(a) + \dfrac{(x-a)^2}{2!} f^{(2)}(a) + \displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^2}{2!} f^{(3)}(t)dt$

Pour n quelconque:

en posant $u'(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}$, $v(t) = f^{(n+1)}(t)$, $u(t) = -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ et $v'(t) = f^{(n+2)}(t)$.

$$I_n = \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t$$

$$I_n = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} + I_{n+1}$$

On déduit (récurrence) :

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt.}$$

qui représente la ***Formule de Taylor avec reste intégral***.

NB : Comme application du résultat précédent on trouve:

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(\exp)^{(k)} = \exp$ et $(\exp)^{(k)}(0) = 1$, donc pour tout réel x,

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \, \mathrm{d}t,$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \, \mathrm{d}t.$$

2. Pour $x < 1$, soit $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ et $f^{(k)}(0) = k!$,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + (n+1) \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+2}} \, \mathrm{d}t,$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + (n+1) \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+2}} \, \mathrm{d}t.$$

EXO TD :

TD 1) *Calculer :* $\int^x t \cos t \; dt$ *?*

Solution : la fonction $t \to t \cos t$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc intégrable. Intégrons par parties.

Pour tout réel t, on a :

$$\begin{aligned} \int^x t \cos t \, dt &= \int^x t(\sin t)' \, dt \\ &= t \sin t \Big|^x - \int^x \sin t \, dt \\ &= t \sin t + \cos t \Big|^x \end{aligned}$$

TD 2) *Calculer* $I = \displaystyle\int_0^1 (x^2 - x + 2) e^{-x} \, \mathrm{d}x.$

Solution : la fonction $x \to (x^2 - x + 2)\, e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc intégrable.

On intègre par parties: en posant $\begin{cases} u(x) = x^2 - x + 2, \\ v'(x) = e^{-x}, \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x) = 2x - 1, \\ v(x) = -e^{-x}. \end{cases}$.

d'où:

$$I = \left[-(x^2 - x + 2)e^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 (2x-1)e^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

On effectue une seconde intégration par parties:

en posant $\begin{cases} u(x) = 2x - 1, \\ v'(x) = e^{-x}, \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x) = 2, \\ v(x) = -e^{-x}. \end{cases}$ on déduit:

$$I = \left[-(x^2 - x + 2)e^{-x}\right]_0^1 + \left[-(2x-1)e^{-x}\right]_0^1 + 2\int_0^1 e^{-x}\,\mathrm{d}x,$$

$$I = \left[-(x^2 - x + 2)e^{-x} - (2x-1)e^{-x} - 2e^{-x}\right]_0^1.$$

$$\boxed{I = 3 - 5e^{-1}}.$$

TD 3) Trouver les primitives de ln.:

Solution : la fonction $\ln$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc admet des primitives sur $\mathbb{R}_+^*$.Intégrons par parties.

En posant $\begin{cases} u(t) = \ln t, \\ v'(t) = 1, \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(t) = \frac{1}{t}, \\ v(t) = t. \end{cases}$.

D'où pour tout x > 0, on a :

$$I = [t\ln t]_1^x - \int_1^x \mathrm{d}t, = [t\ln t - t]_1^x.$$

Par conséquent, les primitives de ln sont

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\ln x - x + C \end{array}} \qquad \text{où } C \in \mathbb{R}$$

1.4. INTÉGRALES IMPROPRES

Peut-on étendre cette définition de l'intégrale sur $[a, b]$ aux intervalles non-bornés à des fonctions non-bornées sur un intervalle ouvert ? Les exemples suivants vont illustrer le problème :

Exemples:

1. Existe-t-il $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$? La fonction $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0,1[$ mais non-bornée. Pour tout $x \in]0,1]$ la fonction f est intégrable sur $[x, 1]$ et

$$I(x) := \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = 2\sqrt{t}\Big|_x^1 = 2 - 2\sqrt{x}$$

Notons que la limite $\lim_{x\to 0+} I(x)$ existe. On appelle cette limite l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$ et on pose

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \lim_{x\to 0+} I(x) = 2$$

2. Existe-t-il $\int_0^1 \frac{1}{t}\,dt$? Comme avant on calcule l'intégrale sur $[x,1]$ pour un $x \in]0,1]$:

$$I(x) := \int_x^1 \frac{1}{t}\,dt = \ln t\Big|_x^1 = -\ln x$$

Dans ce cas, $\lim_{x\to 0+} I(x)$ n'existe pas et on dit que l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{1}{t}\,dt$ diverge ou encore n'existe pas.

3. Existe-t-il $\int_0^\infty e^{-t}\,dt$? On a

$$F(x) = \int_0^x e^{-t}\,dt = -e^{-t}\Big|_0^x = 1 - e^{-x}$$

De nouveau on peut définir l'intégrale généralisée

$$\int_0^\infty e^{-t}\,dt = \lim_{x\to\infty} F(x) = 1.$$

4. Existe-t-il $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+t^2}\,dt$? Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit

$$I_1(x) = \int_x^a \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan a - \arctan x$$

et

$$I_2(x) = \int_a^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan x - \arctan a$$

Evidemment on a

$$\lim_{x\to-\infty} I_1(x) = \arctan a + \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to+\infty} I_2(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan a$$

et on définit l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+t^2}\,dt = \lim_{x\to-\infty} I_1(x) + \lim_{x\to+\infty} I_2(x) = \pi.$$

5. On considère $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2t}{1+t^2}\, dt$. L'intégrant est une fonction impaire, donc

$$\int_{-x}^{x} \frac{2t}{1+t^2}\, dt = 0 \quad \text{pour tout } x > 0$$

Par contre, pour tout $a > 0$ on a

$$\int_{a}^{x} \frac{2t}{1+t^2}\, dt = \ln(1+x^2) - \ln(1+a^2) \to +\infty \quad \text{lorsque } x \to +\infty.$$

Donc l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2t}{1+t^2}\, dt$ diverge.

Définition. Soit I un intervalle et $a = \inf I < b = \sup I$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et intégrable sur tout intervalle $[c, d] \subset I$ où $a < c < d < b$. On dit que f est intégrable sur I si et seulement si pour un point $p \in]a, b[$ les limites

$$\lim_{x \to a+} \int_{x}^{p} f(t)\, dt \quad \text{et} \quad \lim_{x \to b-} \int_{p}^{x} f(t)\, dt$$

existent. Dans ce cas, on définit l'intégrale généralisée de f sur I par

$$\int_{a}^{b} f(t)\, dt = \lim_{x \to a+} \int_{x}^{p} f(t)\, dt + \lim_{x \to b-} \int_{p}^{x} f(t)\, dt$$

On dit que l'intégrale généralisée de f sur I est absolument convergente si l'intégrale généralisée de $|f|$ sur I existe.

1.5. LES FONCTIONS D'EULER

LA FONCTION GAMMA

Définition. Pour $x > 0$ nous posons

$$\Gamma(x) := \int_{0}^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

Cette intégrale généralisée est bien définie car

$$\int_{0}^{1} t^{x-1} e^{-t}\, dt \le \int_{0}^{1} t^{x-1}\, dt = \frac{1}{x}$$

et en utilisant $t^{x-1} \le t^x$ pour $t \ge 1$ et $\max_{t \ge 1} t^x e^{-t/2} = (2x)^x e^{-x}$

$$\int_{1}^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt \le (2x)^x e^{-x} \int_{1}^{\infty} e^{-t/2}\, dt \le 2(2x)^x e^{-x}$$

Propriétés :

1. *Pour tout $n \in \mathbb{Z}_+$*

$$\Gamma(n+1) = n!$$

et pour tout $x > 0$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

3.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

4. ***Formule de Stirling:*** $n! \sim \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n}.$

Remarque: la formule $\Gamma(n+1) = n!$ montre que la fonction gamma est le prolongement de la notion de "factoriel".

Exo :

Intégrale de Gauss. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

En probabilité la fonction ϕ est appelée densité normale centrée. Montrer que ϕ est une fonction paire et par le changement de variable $t = x^2/2$ montrer que $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\, dx = 1.$

Solution:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\, dx = 2\int_{0}^{\infty} \phi(x)\, dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{0}^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t}\, dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

LA FONCTION BETA

$$B(p,q) := \int_0^1 (1-u)^{p-1} u^{q-1} du = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = B(q,p), \qquad \text{where } p, q \in \mathbb{R}_+$$