Lien vers e-Learning	http://elearn.univ-sba.dz		
Programme pour le module M03 divisé en 2 parties parallèles			
Calcul Intégral & annexes			**Equation Différentielles & ..**
Intégration dans R			***Equation différentielles linéaire du 1er ordre***
Primitives ; intégrations (changement de variable)			Eq. linéaire à variables séparables ; éq. linéaire type homogène
Intégration par partie ; Intégrales indéfinies (convergence, Fonctions Gamma et Beta)			Eq linéaire à coefficients variables (facteur d'intégration)
Séries numériques			***Eq diff. Lin. 2nd ordre à coéf. constants***
Séries (fonctions en escaliers dans les intégrales) ; convergence, divergence grossière.			Equation caractéristique et résolution d'éq. sans second membre ; (exples d'ordre supérieur)
Séries usuelles (critère intégral) ; critères de conv. (de D'Alembert ; de comparaison)			Equation avec second membre
Séries entières et séries de Laurent			Séries entières et solutions approchées
Définition ; convergence ; approximations.			***Eq diff. par la Transformée de Laplace***
Séries de Laurent ; résidu			Transformation de Laplace
Calcul de résidus ; calcul d'intégrale par les résidus.			Transformation de Laplace (suite)
Série et transformé de Fourier			Eq. diff. avec cond. Initiales.
Définitions (coefficients) ; convergence ;...(suite).			Impulsions ; Eq. diff. avec impulsions
Transformation de Fourier ; ….			***Transformée de Fourier***
Application au calcul intégrale			Eq diff. à deux variables (t,x)
Intégration multiple			Eq diff. à deux variables (suite)
Intégrale double ; coordonnées polaires			***EDP***
Intégrale triple ; coordonnées cylindriques ; coordonnées sphériques.			Modèles d'équations (ondes)
Applications			Modèles d'équations (diffusions)
			Résolution par les séries de Fourier

Séries Entières

Nous faisons ici l'étude des séries entières réelles ou complexes sans référence aux séries de fonctions. Rappelons que les formules de Taylor-Lagrange permettent de donner un développement limité d'une fonction de classe $f \in C^{(n)}$ [***i.e.*** f admet (n)-dérivée continues], à savoir :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

où $o(x)$ est la notation de Landau [$\lim_{x \to 0} \frac{o(x^n)}{x^n} = 0$]. Nous nous intéressons maintenant à un développement du type $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

1. Définitions et notations:

On appelle série entière toute série numérique de la forme

$$\sum a_n z^n \quad \text{ou} \quad \sum a_n x^n$$

où $(a_n)_{n \geq n_0}$ est une suite donnée de nombres complexes ou réels. On supposera, a priori, que $n_0 = 0$.

1. *une série entière converge pour $z = 0$.*
2. *l'ensemble D des nombres complexes z pour lesquels la série est convergente, est appelé **domaine de convergence** de la séries entière.*
3. *Si on note par $f(z)$ la somme de la série lorsqu'elle existe on a :*

$$\forall z \in D \ : \ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

4. *Dans le cas où les coefficients a_n sont tous nuls à partir d'un rang p+1; la série est convergente $\forall z \in \mathbb{C}$ et sa somme est la fonction polynomiale définie par :*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{p} a_n z^n$$

NB : On peut donc voir une série entière comme un polynôme de degré au plus infini.

Exemples : Déterminer les domaines de convergence des séries entières

1) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ***2)*** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ ***3)*** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

Solutions :

1) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ est une série géométrique qui converge pour $|z| < 1$. Le ***domaine de convergence*** est donc :

$$D = D(0,1) = \{z \in \mathbb{C}/|z| < 1\}$$

et pour $z \in D$ sa somme est donnée par $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

NB : Le ***domaine de convergence*** de la série réelle $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ est $D =]-1,1[$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$. Utilisons le critère de D'Alembert ; posons $U_n = \frac{z^n}{n}$

$$\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \left|\frac{z^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{z^n}\right| = \frac{n}{n+1} \cdot |z| \xrightarrow[n\to\infty]{} l = |z| \,;$$

la série converge pour $l = |z| < 1$. Le ***domaine de convergence*** est donc :

$$D = D(0,1) = \{z \in \mathbb{C}/|z| < 1\}$$

NB : Le ***domaine de convergence*** de la série réelle $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ est $D =]-1,1[$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Utilisons le critère de D'Alembert ; posons $U_n = \frac{z^n}{n!}$

$$\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{z^n}\right| = \frac{1}{n+1} \cdot |z| \xrightarrow[n\to\infty]{} l = 0 \,;$$

Comme $\forall z \in \mathbb{C} \;:\; l = 0 < 1$ alors la série converge $\forall z \in \mathbb{C}$. Le ***domaine de convergence*** est donc :

$$D = \mathbb{C}.$$

NB : Le ***domaine de convergence*** de la série réelle $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ est $D = \mathbb{R}$.

2. RAYON DE CONVERGENCE

Le rayon de convergence est le plus grand nombre $R \in [0, \infty]$ pour lequel :

1) la série $\sum a_n z^n$ *est absolument convergente pour* $|z| < R$
2) *si R est fini, les séries* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum |a_n z^n|$ *sont divergentes pour* $|z| > R$.
3) *Le* ***domaine de convergence*** *de la série est donnée par :*

$$D = \{z \in \mathbb{C}/|z| < R\}$$

Théorème 1 : *Soit* $\sum a_n\, z^n$ *une série entière telle que* $a_n \neq 0$ *à partir d'un certain rang. Si*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l \in [0,\infty]$$

alors le rayon de convergence de cette série est

$$R = \frac{1}{l}$$

avec la convention $\frac{1}{0} = \infty$ *et* $\frac{1}{\infty} = 0$

Exemple :

Déterminer le rayon et le domaine de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}\, z^n$.

Solution : *posons* $a_n = \frac{n!}{n^n}$ *:*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} . \frac{n^n}{n!}\right| = \frac{(n+1)\, n!}{(n+1)^n\,(n+1)} . \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{e}\ ;$$

Le rayon de convergence R de la série est donné par : $\frac{1}{R} = \frac{1}{e}$ d'où $R = e$.

Le ***domaine de convergence*** D est donc : $D = D(0,e) = \{z \in \mathbb{C} / |z| < e\}$

NB : Le ***domaine de convergence*** de la série réelle $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}\, x^n$ est $D =]-e, e[$.

Exos : Déterminer les domaines de convergence des séries entières

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ ***2)*** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ***3)*** $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n$ ***4)*** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, z^{2n}$ ***5)*** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, z^{2n+1}$

Solutions :

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ *posons* $a_n = \frac{1}{n}$ *:*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1\ ;$$

Le rayon de convergence R de la série est donné par : $\frac{1}{R} = 1$ d'où $R = 1$.

Le ***domaine de convergence*** D est donc : $D = D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$.

NB : Le ***domaine de convergence*** de la série réelle $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ est $D =]-1, 1[$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ *posons* $a_n = \frac{1}{n!}$ *:*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\ ;$$

Le rayon de convergence R de la série est: $R = +\infty$.

Le ***domaine de convergence*** D est donc : $D = \mathbb{C}$.

NB : Le ***domaine de convergence*** de la série réelle $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ est $D = \mathbb{R}$.

3) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n$ *posons* $a_n = n!$:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty\ ;$$

Le rayon de convergence R de la série est : $R = 0$.
Le ***domaine de convergence*** D est donc : $D = \{0\}$.

4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$ *posons* $a_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\ ;$$

Le rayon de convergence R de la série est: $R = +\infty$.
Le ***domaine de convergence*** D est donc : $D = \mathbb{C}$.

NB : Le ***domaine de convergence*** de la série réelle $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ est $D = \mathbb{R}$.

5) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$ *posons* $a_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} = \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\ ;$$

Le rayon de convergence R de la série est: $R = +\infty$.
Le ***domaine de convergence*** D est donc : $D = \mathbb{C}$.

NB : Le ***domaine de convergence*** de la série réelle $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ est $D = \mathbb{R}$.

> ***Théorème 2 :*** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière telle que $a_n \neq 0$ à partir d'un certain rang. Si*
>
> $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l \in [0, \infty]$$
>
> *alors le rayon de convergence de cette série est*
>
> $$R = \frac{1}{l}$$
>
> *avec la convention $\frac{1}{0} = \infty$ et $\frac{1}{\infty} = 0$*

Exemples :

Déterminer le rayon et le domaine de convergence des séries entières :

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln(n)}} z^n$ *2)* $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\cos(\frac{1}{n})\right)^{n^\alpha} z^n$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

Solutions :

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln(n)}} z^n$ *: posons* $a_n = \frac{1}{n^{\ln(n)}}$.

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{\ln(n)}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \exp\left(\ln \frac{1}{n^{\frac{\ln(n)}{n}}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \exp\left(-\ln n^{\frac{\ln(n)}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \exp\left(-(\frac{\ln(n)}{n}) \ln n\right);$$

$$= \lim_{n\to\infty} \exp\left(-(\frac{\ln^2(n)}{n})\right) = 1$$

Le rayon de convergence R de la série est donc $R = 1$.

Le ***domaine de convergence*** D est donc : $D = D(0,1) = \{z \in \mathbb{C}/|z| < 1\}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos(\frac{1}{n})\right)^{n^\alpha} z^n$ *: posons* $a_n = \left(\cos(\frac{1}{n})\right)^{n^\alpha}$.

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(\cos(\frac{1}{n})\right)^{n^{\alpha-1}}.$$

Sachant que $\cos X \sim X$ et $\ln(1+X) \sim X$ au voisinage de 0 alors

$$\lim_{n\to\infty} \ln(\frac{1}{R}) = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha-1} \ln\left(\cos(\frac{1}{n})\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^{\alpha-1} \ln\left(1 - \frac{1}{2n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-n^{\alpha-1}}{2n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{2} n^{\alpha-3}.$$

1) *Si* $\alpha < 3$ *alors* $\lim_{n\to\infty} \ln(\frac{1}{R}) = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{2} n^{\alpha-3} = 0$ *d'où* $\frac{1}{R} = 1$ *et par suite* $R = 1$. *Le domaine de convergence D est donc :* $D = D(0,1) = \{z \in \mathbb{C}/|z| < 1\}$
2) *Si* $\alpha > 3$ *alors* $\lim_{n\to\infty} \ln(\frac{1}{R}) = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{2} n^{\alpha-3} = -\infty$ *d'où* $\frac{1}{R} = 0^+$ *et par suite* $R = +\infty$. *Le domaine de convergence D est donc :* $D = \mathbb{C}$
3) *Si* $\alpha = 3$ *alors* $\lim_{n\to\infty} \ln(\frac{1}{R}) = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{2} n^{\alpha-3} = \frac{-1}{2}$ *d'où* $\frac{1}{R} = e^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$ *et par suite* $R = \sqrt{e}$. *Le domaine de convergence D est donc :* $D = D(0,\sqrt{e}) = \{z \in \mathbb{C}/|z| < \sqrt{e}\}$.

3. CONTINUITÉ, INTÉGRATION ET DÉRIVATION D'UNE SÉRIE ENTIÈRE :

Théorème1 :

La somme d'une série entière, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$, *de rayon de convergence R est une fonction continue sur* $]-R,+R[$.

Si la série converge pour $x = R$ *alors la somme* $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ *est continue à gauche de* $x = R$ *:*

$$S(R) = \lim_{x\to R^-} f(x)$$

Si la série converge pour $x = -R$ *alors la somme* $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ *est continue à droite de* $x = -R$ *:*

$$S(-R) = \lim_{x\to -R^+} f(x)$$

Théorème 1 : *Toute série entière* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$, *de rayon de convergence R, possède une primitive sur* $]-R,+R[$ *donnée par :*

$$F(x) = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\, x^{n+1}$$

qui est série entière de même rayon de convergence R

Exemples :

Déterminer la primitive qui s'annule pour 0 de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n$ puis donner sa somme.

Solutions : $\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n$ est une série géométrique de raison $q = -x^2$.
Elle converge si et seulement si $|-x^2| < 1$ ***i.e.*** $x \in]-1,+1[$ d'où

$$\forall x \in]-1,+1[\ :\ \int_0^x \Big(\sum_{n=0}^{\infty}(-t^2)^n\Big)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

On a pour $x \in]-1,+1[$: $\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}$ d'où

$$\forall x \in]-1,+1[\ :\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \int_0^x \frac{1}{1+x^2} = \arctan x$$

NB : pour $x = 1$ la série alternée $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge d'après le critère de Leibniz d'où (par continuité) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{x\to 1^-} \arctan x = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

Exos : Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

Solutions : Considérons $\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$ qui est une série géométrique de raison $q = -x$. Elle converge si et seulement si $x \in]-1, +1[$ et on a $\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x}$ d'où pour $x \in]-1, +1[$:

$$\int_1^x \frac{1}{1+t}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \ln(1+x).$$

Pour $x = 1$ on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \lim_{x \to 1^-} \ln(1+x) = \ln 2$$

> ***Théorème 2 :*** *Soit une série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$, de rayon de convergence R alors sur $]-R, +R[$ on a :*
>
> *1)* $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1}$ *avec rayon de convergence R*
>
> *2)* $f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n\, x^{n-2}$ *avec rayon de convergence R*
>
> *3)* $f'''(x) = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)\, a_n\, x^{n-3}$ *avec rayon de convergence R*
>
> *4)* …

NB : Ces formules donnent respectivement $f(0) = a_0$, $f'(0) = a_1$, $f''(0) = 2\, a_2$, $f'''(0) = 3!\, a_3$, , $f^{(4)}(0) = 4!\, a_4$ … $f^{(n)}(0) = n!\, a_n$

Exemples : Déterminer la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} n\, x^n$.

Solutions : $\sum_{n=0}^{\infty} n\, x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1} = x \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)'$.

Pour $x \in]-1, +1[$ on a $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ d'où :

$$\forall x \in]-1, +1[: \sum_{n=0}^{\infty} n\, x^n = x \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Exo : Déterminer la série entière dont la somme est $\arctan x$.

Solutions : $\sum_{n=0}^{\infty} n\, x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1} = x \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)'$.

Pour $x \in]-1, +1[$ on a $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ d'où :

$$\forall x \in]-1, +1[: \sum_{n=0}^{\infty} n\, x^n = x \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$$

4. FONCTIONS DÉVELOPPABLES EN SÉRIES ENTIÈRES

Théorème : « condition suffisante » :
Si une fonction $f \in C^{\infty}(-r,+r)$ vérifie :
Il existe $M > 0$ tel que $\left|f^{(n)}(x)\right| < M$
pour tout $n \geq 1$ et $\forall$: $x \in]-1,+1[$, alors on a

$$\forall x \in]-r,+r[: \ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

et pour son rayon de convergence R on a $R \geq r$
Lorsqu'il existe, ce développement est unique.

Proposition : Soient deux fonctions développables en séries entière autour de 0 ; $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ avec rayon de convergence respectifs R_f et R_g alors :
1) $f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ avec $R_{f+g} \geq \min\{R_f, R_g\}$.
2) $f(x) \times g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n$ avec $R_{f.g} \geq \min\{R_f, R_g\}$.
3) $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ avec $R_{f'} = R_f$.
4) $F(x) = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ avec $R_F = R_f$.
5) Si f.est paire alors $a_{2n+1} = 0$.
6) Si f.est impaire alors $a_{2n} = 0$.

Exemples fondamentaux (à retenir) :

1) $f(x) = e^x$ est $C^{\infty}(\mathbb{R})$ et $\forall n \geq 1$, $f^{(n)}(x) = (e^x)^{(n)}$ est majorée sur tout intervalle $]-r,+r[$ ...$R = \infty$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \ : \ e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

2) $f(x) = \cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ est $C^{\infty}(\mathbb{R})$ et toutes ses dérivées sont majorées par **1** ...$R = \infty$; $\cos x$ est paire donc $a_{2n+1} = 0$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \ : \ \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

3) $f(x) = \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ *est* $C^{\infty}(\mathbb{R})$ *et toutes ses dérivées sont majorées par **1** ...*$R = \infty$ *;* $\sin x$ *est paire donc* $a_{2n} = 0$ *:*

$$\forall x \in \mathbb{R} \ : \ \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

4) $f(x) = \frac{1}{1-x}$ *est la somme de la série géométrique* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ *:*

$$\forall x \in]-1,+1[: \ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

5) *En intégrant* $f(x) = \frac{1}{1-x}$ *on obtient :*

$$\forall x \in]-1,+1[: \ -\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

6) *En changement* x *en* $-x$ *dans* $f(x) = \frac{1}{1-x}$ *on obtient*

$$\forall x \in]-1,+1[: \ \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

7) *En intégrant on obtient :*

$$\forall x \in]-1,+1[: \ \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

8) *En changement* x *en* $-x^2$ *dans* $f(x) = \frac{1}{1-x}$ *on obtient*

$$\forall x \in]-1,+1[: \ \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

9) *En intégrant on obtient :*

$$\forall x \in]-1,+1[: \ \arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

NB : Pour obtenir un développement en série entière au voisinage de x_0 il suffit de faire un changement de variable $X = x - x_0$ et procéder au développement en fonction de X au voisinage de 0.

Exemple : donner le développement de $\frac{1}{x}$ autour de $x_0 = 2$.

Solution : posons $X = x - 2$ alors $x = X + 2$ et $\frac{1}{x} = \frac{1}{X+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{X}{2}+1} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{-X}{2}}$ avec X voisin de 0, d'où pour $|X| = |x-2| < 1$ ***i.e.*** $x \in]1,3[$ on a

$$\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{-X}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-X}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{X^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{2^n}$$

Exo : donner le développement de $\ln x$ autour de $x_0 = 1$.
Solutions : . posons $X = x - 1$ alors $x = X + 1$ et $\ln x = \ln(1+X)$ avec X voisin de 0. En remarquant que $\Big(\ln(1+X)\Big)' = \frac{1}{1+X} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n X^n$ on obtient pour $|X| = |x-1| < 1$ ***i.e.*** $x \in]0,2[$:

$$\ln x = \ln(1+X) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{X^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}$$

Liste des sommes des séries entières usuelles

Formule	Rayon de convergence	Ensemble de validité de la formule
$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$	∞	$\mathbb{R}$
$Ch\, x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$	∞	$\mathbb{R}$
$Sh\, x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	∞	$\mathbb{R}$
$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$	∞	$\mathbb{R}$
$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	∞	$\mathbb{R}$

$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$	1 (∞ *si* $\alpha \in \mathbb{N}$)	]-1,1[($\mathbb{R}$ *si* $\alpha \in \mathbb{N}$)

$\alpha = \frac{1}{2}$, $$\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1.3...(2n-3)}{2.4...2n} x^n = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \cdots$$
$\alpha = -\frac{1}{2}$ $$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1.3...(2n-1)}{2.4...2n} x^n = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + \cdots.$$

$Arctg\ x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$	1	[-1,1]
$Argth\ x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$	1	]-1,1[
$Arcsin\ x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!\, x^{2n+1}}{(2^n n!)^2 (2n+1)}$	1	[-1,1]
$Argsh\ x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!\, x^{2n+1}}{(2^n n!)^2 (2n+1)}$	1	[-1,1]

5. SOMMATION DE QUELQUES SÉRIES ENTIÈRES

On s'intéresse au problème inverse ; faire la sommation d'une série entière. Ceci est possible dans certains cas.

A suivre…