Lien vers e-Learning	http://elearn.univ-sba.dz		
Programme pour le module M03 divisé en 2 parties parallèles			
Calcul Intégral & annexes			**Equation Différentielles & ..**
Intégration dans R			***Equation différentielles linéaire du 1er ordre***
Primitives ; intégrations (changement de variable)			Eq. linéaire à variables séparables ; éq. linéaire type homogène
Intégration par partie ; Intégrales indéfinies (convergence, Fonctions Gamma et Beta)			Eq linéaire à coefficients variables (facteur d'intégration)
Séries numériques			***Eq diff. Lin. 2nd ordre à coéf. constants***
Séries (fonctions en escaliers dans les intégrales) ; convergence, divergence grossière.			Equation caractéristique et résolution d'éq. sans second membre ; (exples d'ordre supérieur)
Séries usuelles (critère intégral) ; critères de conv. (de D'Alembert ; de comparaison)			Equation avec second membre
Séries entières et séries de Laurent			Séries entières et solutions approchées
Définition ; convergence ; approximations.			***Eq diff. par la Transformée de Laplace***
Séries de Laurent ; résidu			Transformation de Laplace
Calcul de résidus ; calcul d'intégrale par les résidus.			Transformation de Laplace (suite)
Série et transformé de Fourier			Eq. diff. avec cond. Initiales.
Définitions (coefficients) ; convergence ;...(suite).			Impulsions ; Eq. diff. avec impulsions
Transformation de Fourier ;			***Transformée de Fourier***
Application au calcul intégrale			Eq diff. à deux variables (t,x)
Intégration multiple			Eq diff. à deux variables (suite)
Intégrale double ; coordonnées polaires			***EDP***
Intégrale triple ; coordonnées cylindriques ; coordonnées sphériques.			Modèles d'équations (ondes)
Applications			Modèles d'équations (diffusions)
			Résolution par les séries de Fourier

SÉANCE 3

1. SÉRIES NUMÉRIQUES

Rappelons que

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \lim_{N\to\infty} \int_1^N f(x)dx$$

Si $f(x) = a_n$ pour tout $x \in [n, n+1[$, $n = 1, 2, \ldots$ alors les deux intégrales précédentes s'écrivent

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n := \lim_{N\to\infty} S_N \text{ ;}$$

on obtient ainsi une série.

1.1. DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS:

Définitions et notations : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes ou réels. On pose

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \quad + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'appelle **suite des *sommes partielles*** (*séries **finies** de terme général* a_n*, ou encore associées à la suite* (a_n)).

Pour $n \to +\infty$ on obtient la série (somme infinie) notée $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

1. *Si la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet une limite* S *(dite somme ou valeur de la série) dans* $\mathbb{C}$ *ou dans* $\mathbb{R}$*, on note*
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n = S$$
On dit que la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *est **convergente** (ou **converge**) vers* S.
2. *Si la série* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *ne converge pas, on dit qu'elle est **divergente** (ou **diverge**).*
3. *Si* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *est convergente, on dit que la série* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *est **absolument convergente** Toute série absolument convergente converge car*
$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$
4. *Si* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *converge mais* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *diverge alors la série* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *est dite **semi-convergente**.*

NB : Bien sûr on peut noter la série aussi (différents symboles pour l'indice):

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_i, \sum_{i=1}^{\infty} a_i, \sum_{j\geq 1} a_j, \sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n.$$

On peut aussi commencer la somme par n'importe quel indice n_0 ***i.e.*** $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$. Dans ce cas la nature (convergence ou divergence) de la série ne change pas, ***mais*** la somme (en cas de convergence) évidemment change.

Notons aussi que si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge alors on a pour son terme général ***la condition nécessaire (de convergence)*** suivante:

$$u_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0$$

En fait c'est la contraposée qui plus pratique.

Proposition : $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0 \implies \sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} u_n$ *diverge (grossièrement)*

Exemples :

1) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ diverge (grossièrement) car $\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty \neq 0$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})$ est grossièrement divergente car $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}) = 1 \neq 0$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi+\frac{1}{n})$ est grossièrement divergente car $\lim_{n\to\infty} \cos(\pi+\frac{1}{n}) = \cos(\pi) = -1 \neq 0$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi+\frac{1}{n})$: on a $\lim_{n\to\infty} \sin(\pi+\frac{1}{n}) = 0$. On ne peut rien dire sur la convergence.

1.1.SÉRIES PARTICULIÈRES:

A) SÉRIE GÉOMÉTRIQUE : Soit $q \in \mathbb{C}$ *ou* $\mathbb{R}$. La série dite géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ est convergente si et seulement si $|q| < 1$. Le nombre q est appelé *la raison*. On a alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots = \frac{1}{1-q}$$

NB : $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} q^n = q^{n_0} + q^{n_0} + q^{n_0} + \ldots = q^{n_0}\left[1 + q + q^2 + q^3 + \ldots\right] = q^{n_0}\frac{1}{1-q}$

Exemples :

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots$ est une ***série géométrique*** de raison $q = \frac{1}{2} < 1$ donc converge. Sa somme est donnée par

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

2) $\sum_{n=2}^{\infty} e^{-n} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(e^{-1}\right)^n$ est une ***série géométrique*** de raison $q = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$ donc converge. Sa somme est donnée par

$$\sum_{n=2}^{\infty} e^{-n} = \frac{1}{1-\frac{1}{e}} - [1 + \frac{1}{e}] = \frac{e}{e-1} - 1 - \frac{1}{e}$$

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(e-1)^n} = 1 - \frac{1}{(e-1)} + \frac{1}{(e-1)^2} - \ldots$ est une ***série alternée***.

$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{(e-1)^n}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(e-1)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e-1}\right)^n$ est une série géométrique de raison $q = \frac{1}{e-1} < 1$ donc converge. La série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(e-1)^n}$ étant ***absolument convergente*** alors elle converge.

B) SÉRIE DE RIEMANN $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$.

Critère intégrale pour la convergence de séries positives

Soit une série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ où u_n est décroissante à partir d'un certains rang $m \in \mathbb{N}$; alors pour tout $k > n_0 + 1$ on a:

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\, dt \leq f(k)$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{k+1} f(k+1) \leq \int_1^{k+1} f(t)\, dt \leq \sum_{n=1}^{k+1} f(k).$$

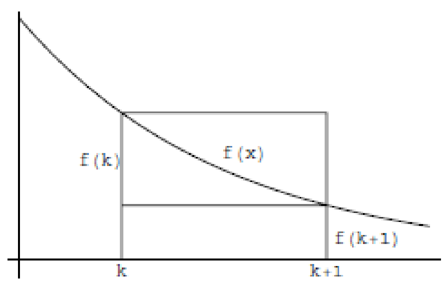

FIG. 18 – Comparaison de séries et d'intégrales

Théorème : *si pour un certains $m \in \mathbb{N}$, $f : [m, \infty[\to [0, \infty[$ est une* ***fonction décroissante****,*
alors la série $\sum_{n=m}^{\infty} f(n)$ et l'intégrale $\int_m^{\infty} f(t)\, dt$ sont de même nature.

Application

Pour $\alpha > 0$, $f(t) = t^{-\alpha}$ est ***décroissante et positive***; donc on peut appliquer le théorème (de ***comparaison série-intégrale***). $\int_1^{+\infty} t^{-\alpha}\, dt = \frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_1^{+\infty}$ est convergente pour $-\alpha+1<0$ et divergente pour $-\alpha+1\geq 0$.

> ***Résultat fondamental*:**
>
> *a)* ***Série de Riemann*** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ *($\alpha \in \mathbb{R}$) converge si et seulement si* $\alpha > 1$.
>
> *b)* ***Série harmonique*** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *est une série divergente (dite pourquoi).*

Exo : déterminez la nature des séries suivantes:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^n}$, 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sqrt{2}}}$, 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln 2}}$, 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+n^2}{n^3}$, 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1}$,
6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+e^{-n}}$.

Solutions :

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^n}$: c'est une *série alternée*. On a $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{e^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n$ est convergente (***série géométrique de raison*** $q = \frac{1}{e} < 1$) dons la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^n}$ est absolument convergente.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sqrt{2}}}$: c'est une série convergente (***série de Riemann avec*** $\alpha = \sqrt{2} > 1$).

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln 2}}$: c'est une série divergente (***série de Riemann avec*** $\alpha = \ln 2 < 1$).

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+n^2}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$: c'est la somme d'une série positive convergente (***série de Riemann avec exposant*** $\alpha = 2 > 1$) et une série divergente (***série de harmonique***). Donc la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+n^2}{n^3}$ diverge.

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1}$: on a $\forall n \geq 1 \;:\; \frac{1}{n^2+n+1} \leq \frac{1}{n^2}$ donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; or celle-ci converge (***série de Riemann avec exposant*** $\alpha = 2 > 1$) donc la première converge aussi.

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+e^{-n}}$.: on a $\forall n \geq 1 \;:\; \frac{1}{3^n+e^{-n}} \leq \frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+e^{-n}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$; or celle-ci converge (***série géométrique de raison*** $q = \frac{1}{3} < 1$) donc la première converge aussi.

1.2. CRITÈRE DE D'ALEMBERT POUR LA CONVERGENCE DE SÉRIES:

> ***<u>Théorème :</u>*** *soit une série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ de nombres réels ou complexes tels que*
>
> $$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} l$$
>
> *1) **si** $l < 1$ alors la série converge*
> *2) **si** $l > 1$ alors la série diverge*
> *3) si $l = 1$ on ne peut rien conclure*

<u>Exemples :</u>

1) $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n!}{1.3.5...(2n-1)}$: on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{1.3.5...(2n+1)} \times \frac{1.3.5...(2n-1)}{n!} = \frac{n+1}{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} l = \frac{1}{2} < 1$$

donc la série converge ***d'après le critère de D'Alembert***.

2) $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^n}{n!}$: on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e > 1$

donc la série diverge ***d'après le critère de D'Alembert***.

3) $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n!}{2^{n^2}}$: on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{2^{n^2+2n+1}} \times \frac{2^{n^2}}{n!} = \frac{n+1}{2^{2n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 < 1$

donc la série converge ***d'après le critère de D'Alembert***.

4) $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{2^n}{n^\alpha}$: on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^\alpha} \times \frac{n^\alpha}{2^n} = 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha \xrightarrow[n\to\infty]{} 2 > 1$

donc la série diverge ***d'après le critère de D'Alembert***.

1.3. CRITÈRE DE D'ÉQUIVALENCE POUR LA CONVERGENCE DE SÉRIES:

Théorème : *soit deux séries réelles ou complexes* $\sum_{n\geq n_0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq n_0} v_n$ *. Si*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l \quad (l\neq 0 \text{ et } l\neq\infty)$$

alors les séries sont équivalentes (elles sont de même nature : convergent ou divergent ensemble)

Exemples : $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ avec $u_n=\ln(1+\frac{1}{2^n})$ et $v_n=\frac{1}{2^n}$.

Il faut noter que $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

d'où $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{2^n})}{\frac{1}{2^n}}=1$; $\sum_n u_n$ est équivalentes à $\sum_n v_n$.

$\sum_n v_n=\sum_n\frac{1}{2^n}=\sum_n\left(\frac{1}{2}\right)^n$ est convergente (série géométrique de raison $0<q=\frac{1}{2}<1$) donc la séries $\sum_n \ln(1+\frac{1}{2^n})$ converge (***critère d'équivalence***).

Exo : déterminez la nature des séries suivantes:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$, 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n\sqrt{n}})$, 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\frac{1}{n^2})$, 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+n^2}{n^3}$.

Solution :

1) $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}=1$: $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$ est équivalente à $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ qui diverge (série harmonique) donc $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$ diverge d'après le critère d'équivalence.

2) $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{n\sqrt{n}})}{\frac{1}{n\sqrt{n}}}=1$: $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n\sqrt{n}})$ est équivalente à $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ qui converge (série de Riemann avec coefficient $\alpha=\frac{3}{2}>1$) donc $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n\sqrt{n}})$ converge d'après le critère d'équivalence.

3) Rappelons que $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$ d'où

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}} = 1$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n^2})$ est équivalente à $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ qui converge (série de Riemann avec coefficient $\alpha = 2 > 1$) donc $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n^2})$ converge d'après le critère d'équivalence.

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+n^2}{n^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}$ d'où $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{n+n^2}{n^3}}{\frac{1}{n}} = 1$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+n^2}{n^3}$ est équivalente à $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ qui diverge (série harmonique) donc $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+n^2}{n^3}$ diverge d'après le critère d'équivalence.

1.4. CRITÈRE DE LEIBNITZ POUR LA CONVERGENCE DE SÉRIES ALTERNÉES:

Théorème : *soit une série alternée* $\sum_{n\geq n_0}(-1)^n u_n$ *avec* $u_n > 0$ *telle que :*

i) *la suite* (u_n) *est* *décroissante* *(à partir d'un certains rang* n_0*)*

ii) $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

alors la série alternée $\sum_{n\geq n_0}(-1)^n u_n$ *converge.*

On a en plus :

a). *La somme de la série* $\sum_{n\geq n_0}(-1)^n u_n$ *(lorsqu'elle converge) a le signe du premier terme* u_{n_0} *et on a*

$$\left|\sum\nolimits_{n\geq n_0}(-1)^n u_n\right| \leq u_{n_0}$$

b). *En prenant pour*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u_n = \sum_{n=0}^{p}(-1)^n u_n + R_p \approx \sum_{n=0}^{p}(-1)^n u_n$$

On commet une erreur

$$\left|R_p\right| = \left|\sum\nolimits_{p+1}^{\infty}(-1)^n u_n\right| \leq u_{p+1}$$

NB : rappelons que si la série (à termes positives) $\sum_{n\geq n_0}|(-1)^n u_n| = \sum_{n\geq n_0} u_n$ converge alors la série alternée $\sum_{n\geq n_0}(-1)^n u_n$ puisqu'elle ***converge absolument***.

Exemples :

1) $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$: c'est une série alternée. La série (à termes positives) $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ diverge donc la série alternée $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ne converge pas absolument.

Utilisons le critère de Leibnitz : la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ est décroissante et $\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge. La série alternée $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ est ***semi-convergente***.

On a :

a)..

b). En prenant pour

$S=\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\ldots\approx\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=..$

On commet une erreur $\left|R_p\right|\leq\frac{1}{5}=0,2$

2) $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3}}$: *c'est une série alternée*. La série $\sum_{n\geq n_0}\frac{1}{\sqrt{n^3}}=\sum_{n\geq n_0}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge (***série de Riemann avec exposant*** $\alpha=\frac{3}{2}>1$) donc la série alternée $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3}}$ ***converge absolument*** et par suite elle converge.

> ***Théorème :*** *Si une série alternée* $\sum_n w_{\phi(n)}$ *est absolument convergente alors pour toute bijection* $\phi\ :\ \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ *on a* $\sum_n w_{\phi(n)}$ *est absolument convergente et*
>
> $$\sum_n w_{\phi(n)}=\sum_n w_n.$$

EXO_1 TD :

Les sommes suivantes sont-elles finies ?

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5^n}\,;\,\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^{n-2}}\,;\,\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(e-1)^n}\,;\,\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(e-2)^n}$$

Solution :

- $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n$ est une série géométrique de raison $q=\frac{1}{5}<1$ donc converge
- $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^{n-2}}=9\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ est une série géométrique de raison $q=\frac{2}{3}<1$ donc converge
- $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(e-1)^n}=1-\frac{1}{(e-1)}+\frac{1}{(e-1)^2}-\dots$ *est une* ***série alternée***.

$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(e-1)^n}\right|=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(e-1)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{e-1}\right)^n$ est une série géométrique de raison $q=\frac{1}{e-1}<1$ donc converge. La série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(e-1)^n}$ étant ***absolument convergente*** alors elle converge.

- $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(e-2)^n}$ *est une* ***série alternée***.

$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(e-2)^n}\right|=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(e-2)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{e-2}\right)^n$ est une série géométrique de raison $q=\frac{1}{e-2}>1$ donc diverge. On montrera plus tard que La série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(e-2)^n}$ est convergente, donc elle est ***semi-convergente***.

EXO_2 TD :

$k > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$

a) étudiez la nature des séries :

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi + \frac{1}{n})$; ***2)*** $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi + \frac{1}{n})$; ***3)*** $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(\frac{2+n^\alpha}{1+n^\alpha})$; ***4)*** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cosh 3n}{\sinh 5n}$

b) étudiez la série de terme générale :

5) $u_n = \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ ***6)*** $u_n = \frac{n^\alpha}{k^n \ln^5(n)}$ ***7)*** $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n^2})$

Solution :

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi + \frac{1}{n})$ est grossièrement divergente car $\lim_{n\to\infty} \cos(\pi + \frac{1}{n}) = \cos(\pi) = -1 \neq 0$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi + \frac{1}{n})$: on a $\lim_{n\to\infty} \sin(\pi + \frac{1}{n}) = 0$. On ne peut rien dire sur la convergence.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n})$ est équivalente à $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ qui qui diverge (série harmonique) donc $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n})$ diverge d'après le critère d'équivalence.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(\frac{2+n^\alpha}{1+n^\alpha})$. Rappelons que $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha > 0 \\ 0 & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$ d'où

cas 1 : si $\alpha = 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(\frac{2+n^\alpha}{1+n^\alpha}) = \ln(\frac{2+1}{1+1}) = \frac{3}{2} \neq 0$ donc la série diverge grossièrement.

cas 2 : si $\alpha < 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(\frac{2+n^\alpha}{1+n^\alpha}) = \ln(\frac{2+0}{1+0}) = \ln(2) \neq 0$ donc la série diverge grossièrement.

cas 3 : si $\alpha > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(\frac{2+n^\alpha}{1+n^\alpha}) = 0$. On ne peut rien dire.

$\ln(\frac{2+n^\alpha}{1+n^\alpha}) = \ln(1 + \frac{1}{1+n^\alpha})$ d'où $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{1+n^\alpha})}{\frac{1}{1+n^\alpha}} = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(\frac{2+n^\alpha}{1+n^\alpha})$ est équivalente à $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^\alpha}$ qui est équivalente à $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ (car $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+n^\alpha} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha}$).

si $0 < \alpha \leq 1$ ***:*** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ diverge (série de Riemann $\alpha \leq 1$) donc $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(\frac{2+n^{\alpha}}{1+n^{\alpha}})$ converge (critère d'équivalence).

Si $\alpha > 1$ ***:*** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ verge (série de Riemann $\alpha > 1$) donc $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(\frac{2+n^{\alpha}}{1+n^{\alpha}})$ converge (critère d'équivalence).

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cosh 3n}{\sinh 5n}$. Posons $u_n = \frac{\cosh 3n}{\sinh 5n}$ alors

$u_n = \frac{\cosh 3n}{\sinh 5n} = \frac{(e^{3n}+e^{-3n})/2}{(e^{5n}-e^{-5n})/2} = \frac{e^{3n}(1+e^{-6n})}{e^{5n}(1-e^{-10n})} = e^{-2n}\frac{(1+e^{-6n})}{(1-e^{-10n})}$ d'où $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{e^{-2n}} = 1$.

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cosh 3n}{\sinh 5n}$ est équivalente à $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e^2}\right)^n$ qui est convergente (série géométrique de raison $q = \frac{1}{e^2} < 1$) donc $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cosh 3n}{\sinh 5n}$ converge (critère d'équivalence).

5) $u_n = \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}} . \frac{2^{n^2}}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2\,(n!)^2}{2^{n^2+2n+1}} . \frac{2^{n^2}}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 < 1$

d'où $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ converge (critère de D'Alembert).

6) $u_n = \frac{n^2}{k^n \ln^5(n)}$.

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{k^{n+1} \ln^5(n+1)} . \frac{k^n \ln^5(n)}{n^2} = \left(\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}\right)^5 \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{k}$ d'où :

cas 1 : si $k > 1$ alors $\frac{1}{k} < 1$ et donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{k^n \ln^5(n)}$ converge (critère de D'Alembert).

cas 2 : si $k < 1$ alors $\frac{1}{k} > 1$ et donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{k^n \ln^5(n)}$ diverge (critère de D'Alembert).

cas 3 : si $k = 1$ on ne peut rien conclure. Dans ce cas $u_n = \frac{n^2}{\ln^5(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et donc la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\ln^5(n)}$ diverge grossièrement.

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}} = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n^2})$ est équivalente à $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ qui converge (série de Riemann avec coefficient $\alpha = 2 > 1$) donc $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n^2})$ converge d'après le critère d'équivalence.

EXO_supplémentaire TD :

Etudiez la convergence de la série de terme général u_n

1. $u_n = (-1)^n \frac{n^3}{n!}$.
2. $u_n = \frac{a^n}{n!}$, $a \in \mathbb{C}$.
3. $u_n = na^{n-1}$, $a \in \mathbb{C}$.
4. $u_n = \sin\left(\frac{n^2+1}{n}\pi\right)$.
5. $u_n = (-1)^n\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

Solution :

1. On pose $v_n = |u_n| = \frac{n^3}{n!}$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{(n+1)^3}{(n+1)!}}{\frac{n^3}{n!}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \times \frac{1}{n+1} \to 0$$

D'après la règle de D'Alembert, la série de terme général v_n converge, donc la série de terme général u_n converge absolument, donc elle converge.

2. On pose $v_n = |u_n| = \frac{|a|^n}{n!}$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|a|^n}{n!}} = \frac{|a|}{n+1} \to 0$$

D'après la règle de D'Alembert, la série de terme général v_n converge, donc la série de terme général u_n converge absolument, donc elle converge.

3. On pose $v_n = |u_n| = n|a|^{n-1}$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)|a|^n}{n|a|^{n-1}} = \frac{n}{n+1}|a| \to |a|$$

Si $|a| < 1$

D'après la règle de D'Alembert, la série de terme général v_n converge, donc la série de terme général u_n converge absolument, donc elle converge.

Si $|a| \geq 1$, $|u_n| \to +\infty$ donc la série diverge grossièrement

4.

$$u_n = \sin\left(\frac{n^2+1}{n}\pi\right) = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{n}\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Il s'agit d'une série alternée car $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \geq 0$, il est à peu près évident que a_n est décroissant et tend vers 0, d'après le TSSA, la série converge.

Remarque : on pourrait montrer qu'elle semi-convergente.

5.

$$u_n = (-1)^n\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = (-1)^n \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ est positif, décroissant et tend vers 0, d'après le TSSA la série converge.