Université de Cergy-Pontoise **2008-2009**
Licence S3 PC-C-STE

cours n^o 1 : Séries

1 Séries numériques

Le but de cette partie est de faire comprendre ce qu'est une série numérique et ce que veut dire qu'elle converge. Il ne s'agit pas de montrer toutes les subtilités possibles (par exemple les cas où on ne peut pas : utiliser les équivalents, décomposer une somme en deux sommes, faire des sommes par blocs, ...)

1.1 Définitions

Définition 1.1 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On appelle série de terme général la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

• *On dit que la série de terme général (u_n) converge si et seulement si la suite (S_n) converge. Dans ce cas on appelle somme de la série sa limite que l'on note*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} u_k.$$

On fera l'abus de langage de dire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ *converge.*

• *On dit que la série de terme générale (u_n) diverge si la suite (S_n) diverge. On fera l'abus de langage de dire que* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ *diverge.*

Exemples :

• Soit $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$. En notant que $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, on montre que la série de terme générale (u_n) converge.

• Soit $v_n = k^n$. En utilisant les résultats sur les suites géométriques (ou en les retrouvant), on montre que la série de terme générale (v_n) converge si et seulement si $|k| < 1$. On étudiera les cas particuliers de $k \in \{-1, 1\}$

• Soit $w_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$. En notant que $w_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, on montre que la série de terme général (w_n) diverge.

Définition 1.2 *On dit que la série de terme générale (u_n) est absolument convergente si et seulement si $\sum_{k=0}^{\infty} |u_k|$ converge. Dans ce cas la série est convergente.*

1.2 Propriétés

Signalons tout d'abord le résultat naturel concernant la somme de deux séries.

Proposition 1.3 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les termes généraux de deux séries numériques convergentes. La série numérique de terme général $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors aussi convergente et vérifie :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n + v_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$

Remarque : Il est important de comprendre la propriété précédente. Entre autre cela veut dire que si l'on sait que la série numérique de terme général $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente on ne peut pas séparer sa somme en deux sans avoir au prÃl'alable vérifier la nature des nouvelles séries.

La condition qui suit est nécessaire, attention celle-ci n'est pas suffisante.

Proposition 1.4 *Si $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge, alors la suite (u_n) converge vers 0. Si la suite (u_n) ne converge pas vers 0, on dit alors que la série est grossièrement divergente.*

La preuve est immédiate si on note que $S_{n+1} - S_n = u_{n+1}$. (On reviendra sur les exemples précédents pour un contre-exemple).

1.3 Critère de comparaison pour les séries de termes généraux à signe constant

Remarque :
Si la suite (u_n) est à termes positifs ou nuls, alors la suite (S_n) est croissante, dans ce cas soit elle est majorée et converge, soit elle diverge vers $+\infty$.
Si la suite (u_n) est à termes négatifs ou nuls, alors la suite (S_n) est décroissante, dans ce cas soit elle est minorée et converge, soit elle diverge vers $-\infty$.

Soit (u_n) et (v_n) des suites à termes positifs ou nuls.
• On suppose que $u_n \leq v_n$.
Si $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ diverge alors $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ diverge.
Si $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ converge alors $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge.

• On suppose que $u_n \sim v_n$ alors $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ et $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ sont de même natures.

Exemples : A l'aide des exemples vu précédemment on peut donc dire que la série de terme générale $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge alors que la série de terme général $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Proposition 1.5 *(Critère de "d'Alembert")*
Soit (u_n) une suite ne s'annulant pas.
• Si il existe une constante $k < 1$ telle que pour tout n $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq k$, alors la série de terme général (u_n) est absolument convergente.
• Si pour tout n, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \geq 1$ alors la série est grossièrement divergente.

Remarque : Quand on a vérifié uniquement que $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1$ alors on ne peut pas conclure.

1.4 Séries de références

Pour conclure cette partie nous allons nous donner des résultats de convergence pour des séries particulières nous permettant d'appliquer les critères de comparaison.

Rappelons que nous avons montré que les séries de termes généraux $(k^n)_n$ ne convergent que si $|k| < 1$.

Une autre famille importante appelée les séries de Riemann est gérée par la propriété suivante.

Proposition 1.6 *Les séries de terme général $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes si et seulement si $\alpha > 1$.*

Pour une preuve on peut traiter le cas $\alpha \neq 1$ en utilisant l'équivalent

$$(n+1)^a - n^a \sim an^{a-1}.$$

On traite le dernier cas par l'absurde en montrant que le reste de la somme, minorée par $\frac{1}{2}$ (ou $\frac{5}{6}$ pour changer), ne peut pas converger vers 0.

Enfin siganalons que la série de terme génfal $(\frac{1}{n!})$ converge (on peut le montrer en utilisant le critère de d'Alembert).

Pour la culture, on pourra étudier le comportement des séries de termes généraux respectifs, $\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\frac{(-1)^n\sqrt{n}+1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour expliquer l'importance de travailler avec des séries de termes généraux de signe constant pour utiliser les critères de comparaison.

2 Séries entières

Dans cette partie on ne traite que l'aspect série entière pas l'aspect fonctions développables en séries entières même si le dernier résultat énoncé en est très proche.

2.1 Définitions

Définition 2.1 *Soit (a_n) une suite réelle. On appelle série entière de terme général (a_n) la fonction définie par*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Définition 2.2 *Soit (a_n) une suite réelle et $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sa série entière associée. On appelle rayon de convergence de la série la borne sup de l'ensemble suivant $\{x \geq 0, (a_n x^n)$ est bornée$\}$. On le note R, si $R = \infty$ on dit que le rayon est infini, si $R \in \mathbb{R}^*$ alors par définition on vérifie :*

si $|x| < R$ alors la suite $(a_n x^n)$ est bornée
si $|x| > R$ alors la suite $(a_n x^n)$ n'est pas bornée.

Proposition 2.3
- *Si $R = 0$ alors la série entière n'est définie que pour $x = 0$, elle est grossièrement divergente pour tout $x \neq 0$.*
- *Si $R = \infty$ alors la série entière converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$.*
- *Si $R \in]0, +\infty[$, alors la série entière converge absolument pour tout $x \in]-R, R[$, elle diverge grossièrement pour tout $|x| > R$.*

Attention on ne sait pas ce qui se passe si $|x| = R$.

Exemples :

- On pose $a_n = \frac{1}{n}$.
- On pose $a_n = \frac{2^n}{n^2}$.
- On pose $a_n = n!$.
- On pose $a_n = n$.
- On pose $a_n = \frac{1}{n!}$.

2.2 Propriétés

On commence par donner un critère permettant de calculer les rayons de convergence :

Proposition 2.4 *(Critère de "d'Alembert")*
Soit (a_n) une suite réelle ne s'annulant jamais. Si la suite $\left(\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)$ converge vers une limite l, alors le rayon de la série entière de terme général (a_n) est $R = \dfrac{1}{l}$.

Nous allons donner plusieurs résultats sur la somme et le produit de série entière.

Proposition 2.5 *(somme de deux séries entières)*
Soient R et R' les rayons respectifs des séries entières de termes généraux (a_n) et (b_n) alors :
• Si $R < R'$ alors la série entière de terme général $(a_n + b_n)$ a pour rayon R.
• Si $R = R'$ alors la série entière de terme général $(a_n + b_n)$ a un rayon supérieur ou égal à R.

Exemple :
On pourra regarder les cas où $a_n = \dfrac{1}{n}$, $b_n = 2^n$ et $c_n = \dfrac{(n-1)!-1}{n!}$.

On définit le produit de deux séries entières de la façon suivante :

Définition 2.6 *(Produit de Cauchy) Soient deux séries entières de termes généraux (a_n) et (b_n), on appelle produit de Cauchy de ces deux séries la série de terme général (c_n) défini par :*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Formellement cela revient à mettre pour la puissance n tout ce qui peut donner de la puissance n à partir des deux premières séries.
On a alors le résultat suivant.

Proposition 2.7 *Soient deux séries entières de termes généraux (a_n) et (b_n) de rayon de convergence respectifs R et R', on note (c_n) le terme général de leur produit de Cauchy. Le rayon de convergence du produit de Cauchy est alors supérieur ou égal au minimum de R et R'. De plus pour tout $|x| < Min\{R, R'\}$,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n . \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Pour finir nous allons donner un résultat de régularité.

Proposition 2.8 *Soit une série entière de terme général (a_n) et de rayon de convergence $R > 0$. Alors si on note $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-R, R[$, la fonction f est de classe C^∞ sur $]-R, R[$. De plus la série de terme général*

$((n+1)a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ a même rayon (il suffit de revenir à la définition), on l'appelle série dérivée de f et on vérifie pour tout $x \in]-R, R[$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

Enfin on vérifie que $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Exemple :

On étudie la série entière de terme général $\left(\dfrac{1}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et on montre que l'on retrouve la fonction exponentielle avec toutes ses propriétés.

3 Séries de Fourier

Le but de cette partie est de faire comprendre que l'on peut approcher les fonctions périodiques à l'aide des fonctions trigonométriques. L'aspect espace de hilbert, base orthonormée ne sera pas du tout abordé.

3.1 Fonctions périodiques

Définition 3.1 *On dit qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est périodique si il existe un réel $T > 0$ tel que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+T) = f(x).$$

On dit que T est une période.

Définition 3.2 *Si il existe $T_0 = min\{T > 0, f(x+T) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}\}$, on appelle T_0* **la** *période de T. On dit qu'une fonction f est T-périodique si T est une periode de f.*

Exemples :
1) La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(2x)$ est périodique. On voit facilement que 2π est **une** période et que π est **sa** période.
2) La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x - E(x)$ où ($E(x)$ est la partie entière de x) est périodique, on montre facilement que 1 est sa plus petite période.
3) Signalons que l'on peut définir une fonction périodique de la manière suivante, h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$, paire 4π périodique telle que pour tout $x \in [0, 2\pi]$, $f(x) = 2\pi - x$.(Pour dessiner la fonction, on fait sa représentation sur $[0, 2\pi]$ puis par parité sur $[-2\pi, 0]$ et enfin par périodicité sur $\mathbb{R}$).
4) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $\varphi(x) = 2$ si $x \notin \mathbb{Q}$. On montre que cette fonction est périodique, tout rationel est une période, cette fonction n'admet donc pas de plus petite période.

On signalera les propriétés géométriques des représentations des fonctions T-périodiques.

Remarques : La somme (ou le produit) de deux fonctions périodiques n'est pas forcément périodique, il faut pour cela qu'elles admettent une période commune.

Définition 3.3 *Soit f une fonction T-periodique. On dit que f est continue par morceaux si sur le segment $[0, T]$ il existe un nombre fini de points $(x_k)_{1\leq k\leq n}$ tels que f soit continu sur $[0, T] \setminus \{x_k, 1 \leq k \leq n\}$ et admet des limites à gauche et à droite des points x_k.*
On dit que f est C^1 par morceaux si sur le segment $[0, T]$ il existe un nombre fini de points $(x_k)_{1\leq k\leq n}$ tels que f soit continu et dérivable sur $[0, T] \setminus \{x_k, 1 \leq k \leq n\}$ et que f et sa dérivée f' admettent des limites à gauche et à droite des points x_k.

Proposition 3.4 *Soit f une fonction T-périodique, continue par morceaux, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$*

$$\int_0^T f(t)dt = \int_x^{x+T} f(t)dt.$$

3.2 Coefficients de Fourier

Dans cette partie f désigne une fonction T-périodique au moins continue par morceaux.

Définition 3.5 *On appelle coefficients de Fourier de f les réels suivants*

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt, \\ a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)dt, \forall n \geq 1, \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)dt, \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

On appelle série de Fourier associèe à f la série suivante

$$S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right).$$

Proposition 3.6 *Si la fonction f est impaire alors les coefficients a_n sont nuls. Si la fonction f est paire alors les coefficients b_n sont nuls.*

Les résultats suivants nous permettent de faire le lien sous certaines hypothèses entre une fonction f et sa série de Fourier associée S.

Théorème 3.7 (Théorème de Dirichlet)
Si f est C^1 par morceaux, alors sa série de Fourier $S(x)$ converge. De plus si f est continue au point x alors $S(x) = f(x)$. Si x est un point de discontinuité , si on note $f(x^+)$ la limite à droite et $f(x^-)$ la limite à gauche, alors :

$$S(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

Enfin on vérifie le résultat suivant où on suppose uniquement que f est continue par morceaux

Théorème 3.8 (Egalité de Parseval)
On vérifie l'égalité suivante :

$$\frac{2}{T}\int_0^T f^2(t)dt = 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2.$$

Exemple :

On pourra étudier la fonction 1-périodique définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = x - E(x).$$

On dessinera la courbe représentative de g.
On pourra appliquer les résultats du théorème de Dirichlet en 0, $\frac{1}{2}$ et en $\frac{1}{4}$ ainsi que la formule de Parseval.