UNIVERSITÉ de NICE – SOPHIA ANTIPOLIS
UFR SCIENCES
Licence 2 MI

Examen d'Intégrales et Séries 2005–2006

Corrigé du contrôle Continu du Mardi 22 novembre 2005

Durée : 2h00
Les documents, calculatrices,... ne sont pas autorisés.

Exercice 1 : Questions de cours (4 points)
1.1. Définition d'une série alternée et énoncé du théorème des séries alternées (thm8).
Une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est alternée si $u_n = (-1)^n a_n$ ou $u_n = (-1)^{n+1} a_n$ avec $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.
Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle, décroissante, positive et telle que $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et soit $u_n = (-1)^n a_n$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge et le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ vérifie $|R_n| \leq a_{n+1}$.

1.2. Démonstration de l'équivalent de $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ quand $n \to +\infty$.

On pose $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ et $v_n = \frac{1}{n}$. On sait que $u_n \sim v_n$ quand $n \to +\infty$, que $v_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$ et que $\sum_{k\geq 1} v_k$ diverge. Donc d'après le théorème d'équivalence des sommes partielles, $H_n = \sum_{k=1}^{n} v_k \sim \sum_{k=1}^{n} u_k$.
Or $\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln k = \ln(n+1)$, donc $\sum_{k=1}^{n} u_k \sim \ln n$ quand $n \to +\infty$. Donc $H_n \sim \ln n$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 2 : (4.5 points) On considère $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{\alpha-1} dt$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.
2.1. Montrer que $I(\alpha)$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.
La fonction $f(t) = \mathrm{e}^{-t} t^{\alpha-1}$ est localement intégrable sur $[0, +\infty[$ pour $\alpha \geq 1$ et sur $]0, +\infty[$ pour $\alpha < 1$. Il y a donc deux problèmes à étudier : en 0 et en $+\infty$.
Quand $t \to +\infty$, $\mathrm{e}^{-t} t^{\alpha-1} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Or $\frac{1}{t^2} \geq 0$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge, donc d'après le théorème de comparaison des intégrales, $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{\alpha-1} dt$ converge pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.
Quand $t \to 0$, $\mathrm{e}^{-t} t^{\alpha-1} \sim \frac{1}{t^{1-\alpha}} \geq 0$ et $\int_0^1 \frac{1}{t^{1-\alpha}} dt$ converge ssi $1 - \alpha < 1$, c'est-à-dire ssi $\alpha > 0$.
Donc, d'après le théorème de comparaison des intégrales, $\int_0^1 \mathrm{e}^{-t} t^{\alpha-1} dt$ converge ssi $\alpha > 0$ et $I(\alpha)$ converge ssi $\alpha > 0$.

2.2. En effectuant une intégration par parties sur l'intégrale $\int_0^X \mathrm{e}^{-t} t^{\alpha} dt$, montrer que $I(\alpha + 1) = \alpha I(\alpha)$ pour tout $\alpha \geq 1$.

Soit $\int_0^X e^{-t}t^\alpha dt$. On pose $u(t) = t^\alpha$ et $v'(t) = e^{-t}$; alors $u'(t) = \alpha t^{\alpha-1}$ et $v(t) = -e^{-t}$. Donc $\int_0^X e^{-t}t^\alpha dt = \left[-t^\alpha e^{-t}\right]_0^X + \alpha\int_0^X e^{-t}t^{\alpha-1}dt = \underbrace{-X^\alpha e^{-X}}_{\to 0} + \alpha \underbrace{\int_0^X e^{-t}t^{\alpha-1}dt}_{\text{converge}}$, car $\alpha > 0$.

On passe à la limite quand $X \to +\infty$ et $I(\alpha+1) = \alpha I(\alpha)$.

2.3. En sachant que $I\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et en utilisant la question précédente 2.2., calculer $I\left(\frac{7}{2}\right)$.

D'après la question 2.2., $I\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5}{2}I\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}\times\frac{3}{2}I\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}$.

Exercice 3 : (5 points)

On cherche les paramètres a et b pour lesquels la série $\sum_{n\geq 1} a\ln(n+2) + b\ln(n+1) + \ln n$ converge et la valeur de cette série dans les cas de convergence. On note

$$u_n = a\ln(n+2) + b\ln(n+1) + \ln n.$$

3.1. Donner un équivalent, puis calculer la limite de $(n+2)^a(n+1)^b n$ lorsque $n \to +\infty$ en fonction de a et b. En déduire la limite de u_n lorsque $n \to +\infty$ en fonction de a et b. En déduire une condition sur a et b pour que $u_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.

On a $(n+2)^a(n+1)^b n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{a+b+1}$. Donc $(n+2)^a(n+1)^b n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{si } a+b+1>0 \\ 0 & \text{si } a+b+1<0 \\ 1 & \text{si } a+b+1=0 \end{cases}$.

Or $u_n = \ln\left((n+2)^a(n+1)^b n\right)$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{si } a+b+1>0 \\ -\infty & \text{si } a+b+1<0 \\ 0 & \text{si } a+b+1=0 \end{cases}$ et donc $u_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$ si et seulement si $a+b+1=0$.

3.2. En supposant la condition trouvée à la question précédente 3.1. satisfaite, montrer que $u_n = a\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) + b\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. Donner alors un développement limité de u_n à l'ordre 2. En déduire une condition supplémentaire sur a et b pour que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

On sait que $\ln(n+2) = \ln\left(n\left(1+\frac{2}{n}\right)\right) = \ln n + \ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$ et $\ln(n+1) = \ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, donc $u_n = (a+b+1)\ln n + a\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) + b\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. Or on a trouvé que $a+b+1=0$, donc $u_n = a\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) + b\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

On utilise alors que $\ln(1+x) = x + O(x^2)$ pour $x \to 0$, donc $u_n = \frac{2a+b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Or $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge et donc par le théorème de comparaison des séries $\sum_{n\geq 1} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge. De plus, comme $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ diverge, $\sum_{n\geq 1}\frac{2a+b}{n}$ converge ssi $2a+b=0$. Donc la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge ssi $2a+b=0$.

3.3. Déduire des questions 3.1. et 3.2. que $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge si et seulement si $a=1$ et $b=-2$.

$\sum_{n\geq 1} u_n$ converge si et seulement si $a+b+1=0$ et $2a+b=0$, c'est-à-dire ssi $a=1$ et $b=-2$.

3.4. On pose $v_n = \ln(n+2) - \ln(n+1)$ et $w_n = \ln n - \ln(n+1)$. Calculer $\sum_{k=1}^{N} v_k$ et $\sum_{k=1}^{N} w_k$. En déduire $\sum_{k=1}^{N} \ln(k+2) - 2\ln(k+1) + \ln k$ et la valeur de $\sum_{n\geq 1} \ln(n+2) - 2\ln(n+1) + \ln n$.

On reconnaît les sommes de deux séries téléscopiques. On a alors $\sum_{k=1}^{N} v_k = \ln(N+2) - \ln 2$ et $\sum_{k=1}^{N} w_k = \ln 1 - \ln(N+1) = -\ln(N+1)$, donc $\sum_{k=1}^{N} \ln(k+2) - 2\ln(k+1) + \ln k = \sum_{k=1}^{N} v_k + w_k =$ $\ln(N+2) - \ln 2 - \ln(N+1) = -\ln 2 + \underbrace{\ln\left(\frac{N+2}{N+1}\right)}_{\to 0}$.

On fait tendre N vers $+\infty$ et donc $\sum_{n\geq 1} \ln(n+2) - 2\ln(n+1) + \ln n = -\ln 2$.

Exercice 4 : (9 points) On cherche à étudier la nature des deux intégrales $I = \int_0^{+\infty} \frac{t\sin t}{t^2+1} dt$ et $J = \int_0^{+\infty} \frac{t|\sin t|}{t^2+1} dt$.

4.1. Dans cette première question, on étudie la nature de I de trois manières différentes.

a. Etudier la monotonie de $f(t) = \frac{t}{t^2+1}$ sur $[1,+\infty[$. En déduire la nature de I en vérifiant très précisément les hypothèses du résultat utilisé.

La fonction $g(t) = \frac{t\sin t}{t^2+1}$ est localement intégrable sur $[0,+\infty[$.

On calcule la dérivée $f'(t) = \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2} \leq 0$ sur $[1,+\infty[$. Donc f décroît sur cet intervalle. De plus, f est positive et f tend vers 0 en $+\infty$.

De plus, les primitives de sin sont bornées, car $\left|\int_a^b \sin t \, dt\right| = |\cos a - \cos b| \leq 2$ pour tout a et b dans $[1,+\infty[$.

Donc, d'après le théorème d'Abel pour les intégrales généralisées, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{t\sin t}{t^2+1} dt$ converge et donc I converge.

b. Retrouver le même résultat en faisant une intégration par parties sur $\int_0^X \frac{t\sin t}{t^2+1} dt$.

On pose $u(t) = \frac{t}{t^2+1}$, $v'(t) = \sin t$; donc $u'(t) = \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2}$, $v(t) = -\cos t$ et $\int_0^X \frac{t\sin t}{t^2+1} dt =$ $\underbrace{-\frac{X\cos X}{X^2+1}}_{\xrightarrow[X\to+\infty]{} 0} + \int_0^X \underbrace{\frac{\cos t(1-t^2)}{(t^2+1)^2}}_{\text{CVA car } |.|\leq 1/(1+t^2)} dt$. Donc à la limite quand $X \to +\infty$, I converge.

c. Réduire au même dénominateur l'expression $\frac{t\sin t}{t^2+1} - \frac{\sin t}{t}$ et en déduire d'une troisième manière le même résultat.

On a $\frac{t\sin t}{t^2+1} - \frac{\sin t}{t} = \frac{-\sin t}{t(t^2+1)}$. Or $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge par théorème d'Abel. Etudions $\int_0^{+\infty} \frac{-\sin t}{t(t^2+1)} dt$.

La fonction $t \to \frac{-\sin t}{t(t^2+1)}$ est prolongeable par continuité par -1 en 0, donc elle est localement intégrable sur $[0,+\infty[$ et le seul problème se situe en $+\infty$. Donc $\int_0^{+\infty} \frac{-\sin t}{t(t^2+1)} dt$ converge absolument par théorème de comparaison des intégrales car $\left|\dfrac{\sin t}{t(t^2+1)}\right| \leq \dfrac{1}{t^3}$ et que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^3}$ converge.

Donc l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t \sin t}{t^2+1} dt$ converge.

4.2. Dans cette deuxième question, on étudie la nature de J.

a. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin t \; dt$.

$\displaystyle\int_0^{\pi} \sin t \; dt = [-\cos t]_0^{\pi} = 2.$

b. On note $u_k = \displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{t|\sin t|}{t^2+1} dt$. Montrer que $u_k = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{(y+k\pi)\sin y}{(y+k\pi)^2+1} dy$.

On fait le changement de variables $y = t - k\pi$, alors $u_k = \displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{t|\sin t|}{t^2+1} dt = \int_0^{\pi} \frac{(y+k\pi)|\sin y|}{(y+k\pi)^2+1} dy$, car $\sin(t) = \sin(y+k\pi) = (-1)^k \sin y$. Or $\sin y \geq 0$ pour $y \in [0,\pi]$, donc $u_k = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{(y+k\pi)\sin y}{(y+k\pi)^2+1} dy$.

c. Déduire de a. et b. que $u_k \geq \dfrac{2k\pi}{((k+1)\pi)^2+1}$.

On a pour $0 \leq y \leq \pi$, $y + k\pi \geq k\pi$ et $(y+k\pi)^2 + 1 \leq ((k+1)\pi)^2 + 1$. Puisque $\sin y \geq 0$ sur $[0,\pi]$, on obtient l'inégalité $\dfrac{(y+k\pi)\sin y}{(y+k\pi)^2+1} \geq \dfrac{k\pi \sin y}{((k+1)\pi)^2+1} \geq 0$, que l'on intègre entre 0 et π.

Donc $u_k = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{(y+k\pi)\sin y}{(y+k\pi)^2+1} dy \geq \frac{k\pi}{((k+1)\pi)^2+1} \int_0^{\pi} \sin y \; dy = \frac{2k\pi}{((k+1)\pi)^2+1}$.

d. On pose $v_k = \dfrac{2k\pi}{((k+1)\pi)^2+1}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} v_k$ diverge. Qu'en conclure pour $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k$?

On a $v_k \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{\pi k} \geq 0$. Or $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}$ diverge, donc $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} v_k$ diverge par théorème de comparaison des séries. Donc par le théorème de comparaison des séries et d'après la question précédente 4.2.c., comme $u_k \geq v_k \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k$ diverge. De plus, comme $u_k \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on en déduit que $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} u_k \to +\infty$ quand $N \to +\infty$.

e. Que vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} u_k$, où u_k est défini à la question 4.2.b. ? Qu'en conclure pour J ?

On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} u_k = \sum_{k=0}^{N} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{t|\sin t|}{t^2+1} dt = \int_0^{(N+1)\pi} \frac{t|\sin t|}{t^2+1} dt$. On pose $F(X) = \displaystyle\int_0^{X} \frac{t|\sin t|}{t^2+1} dt$.

Comme $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} u_k \to +\infty$ quand $N \to +\infty$, $F((N+1)\pi) \to +\infty$ et J diverge.

4.3. Que conclure des questions 4.1. et 4.2. sur la nature de I ?

D'après la question 4.1., I converge et d'après la question 4.2, I ne converge pas absolument. Donc, I est semi-convergente.