UNIVERSITÉ de NICE – SOPHIA ANTIPOLIS
UFR SCIENCES
Licence 2 MI

Examen d'Intégrales et Séries 2005–2006

Examen de $2^{\text{ème}}$ session du Jeudi 8 Juin 2006

Durée : 2h
Les documents, calculatrices,... ne sont pas autorisés.

Exercice 1 : Séries numériques (6 points)
On cherche à étudier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{2n^\alpha}\right)$, où $\alpha \in [0,+\infty[$, en fonction du paramètre α.

1.1. Si $\alpha = 0$, que peut-on dire de la suite $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{2}\right)$? Qu'en conclure pour la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{2}\right)$?

Lorsque n est pair, $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{2}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ et lorsque n est impair, $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$. La suite est donc oscillante et ne converge donc pas.
Or, on sait que si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge, alors $u_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. On en déduit donc que la série $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{2}\right)$ diverge.

1.2. Si $\alpha > 0$, donner un équivalent de $\left|\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{2n^\alpha}\right)\right|$ lorsque $n \to +\infty$. Pour quelles valeurs de α est-ce que la série $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{2n^\alpha}\right)$ converge absolument ?

On sait que pour $\alpha > 0$, $\frac{(-1)^n}{2n^\alpha} \to 0$ quand $n \to +\infty$ et que $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, donc, lorsque $n \to +\infty$, $\left|\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{2n^\alpha}\right)\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^\alpha}$.
D'après le critère de Riemann, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$. On peut utiliser ici le théorème de comparaison des séries, puisque les termes sont tous positifs et on obtient que la série $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{2n^\alpha}\right)$ converge absolument ssi la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n^\alpha}$ converge, c'est-à-dire ssi $\alpha > 1$.

1.3. Si $0 < \alpha \leq 1$, donner la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{2n^\alpha}$. A l'aide d'un développement

limité, donner un équivalent simple lorsque $n \to +\infty$ de v_n, où $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{2n^\alpha}\right) = \frac{(-1)^n}{2n^\alpha} + v_n$. Pour quelles valeurs de α, est-ce que la série $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{2n^\alpha}\right)$ est semi-convergente ? Pour quelles valeurs de α est ce que la série diverge ?

On utilise le critère des séries alternées. On a $\frac{1}{2n^\alpha} \geq 0$; puisque $\alpha > 0$, $\frac{1}{2n^\alpha} \to 0$ quand $n \to +\infty$ et la suite $\left(\frac{1}{2n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. On en déduit que $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{2n^\alpha}$ converge.

On effectue un développement limité de $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{2n^\alpha}\right)$. Comme $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ quand $x \to 0$, on obtient $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{2n^\alpha}\right) = \frac{(-1)^n}{2n^\alpha} - \frac{1}{8n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$, c'est-à-dire $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{2n^\alpha}\right) = \frac{(-1)^n}{2n^\alpha} + v_n$, où $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{8n^{2\alpha}}$.

La suite $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{2n^\alpha}\right)$ est donc la somme de deux suites, la suite $\frac{(-1)^n}{2n^\alpha}$ et la suite v_n.

Pour $0 < \alpha \leq 1$, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{2n^\alpha}$ converge, comme vu précédemment. Donc la série $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{2n^\alpha}\right)$ converge ssi $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge.

Or d'après le critère de Riemann, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{8n^{2\alpha}}$ converge ssi $2\alpha > 1$, c'est-à-dire ssi $\alpha > 1/2$.

Donc, comme $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{8n^{2\alpha}}$ et que $-\frac{1}{8n^{2\alpha}} \leq 0$, par le théorème de comparaison des séries de termes de signe constant, la série $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge ssi $\alpha > 1/2$.

On peut donc conclure que la série $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{2n^\alpha}\right)$ est semi-convergente (c'est-à-dire qu'elle converge mais ne converge pas absolument) pour $1 \geq \alpha > 1/2$ et divergente pour $1/2 \geq \alpha > 0$.

Exercice 2 : Suites et séries de fonctions (9 points)

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ avec $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2}$.

2.1. On cherche tout d'abord à étudier la suite $(f_n)_{n\geq 1}$.

2.1.a. Etudier la convergence simple sur $\mathbb{R}^+$ de la suite de fonctions (f_n) ; on donnera la valeur de la fonction limite f et le domaine de $\mathbb{R}^+$ où la convergence a lieu.

Pour $x > 0$, $f_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}$, donc $f_n(x) \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Pour $x = 0$, $f_n(0) = 0$ donc $f_n(0) \to 0$ quand $n \to +\infty$.

En conclusion, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle.

2.1.b. Etudier les variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}^+$. En déduire la convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$ de la suite de fonctions (f_n).

La dérivée de la fonction f_n, vaut $f_n'(x) = \dfrac{n^2 - x^2}{n^2 + x^2}$, donc, sur $\mathbb{R}^+$, $f_n'(x) \geq 0$ ssi $0 \geq x < n$. De plus, $f_n(0) = 0$ et $f_n(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$. On obtient finalement le tableau de variations suivant sur $\mathbb{R}^+$:

x	0		n		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n			$f_n(n)$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				0

On cherche à calculer le maximum de $|f_n|$ sur $\mathbb{R}^+$. Comme la fonction f_n est positive, on a $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} f_n(x) = f_n(n) = \dfrac{1}{2n} \to 0$ quand $n \to +\infty$. Donc, la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$.
Sur

2.2. On cherche maintenant à étudier la série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$.

2.2.a. Etudier la convergence simple de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{x}{n^2 + x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$.

Pour $x > 0$, $f_n(x) = \dfrac{x}{n^2 + x^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{n^2}$. Or, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{x}{n^2}$ converge par le critère de Riemann donc par le théorème de comparaison des séries de termes de signe constant, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{x}{n^2 + x^2}$ converge.
Pour $x = 0$, $f_n(0) = 0$ donc la série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(0)$ converge.
En conclusion, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{x}{n^2 + x^2}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

2.2.b. Etudier la convergence normale de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{x}{n^2 + x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$, puis pour $x \in [0, a]$ avec $a > 0$. Qu'en déduit-on à propos de la continuité de la fonction $F(x) = \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{x}{n^2 + x^2}$ sur $\mathbb{R}^+$?

Sur $\mathbb{R}^+$, $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}^+} = \dfrac{1}{2n}$, mais $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{2n}$ diverge. Donc la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{x}{n^2 + x^2}$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}^+$.
Sur $[0, a]$ avec $a > 0$, $||f_n||_{\infty,[0,a]} = \dfrac{1}{2n}$ si $n \leq a$ et $||f_n||_{\infty,[0,a]} = \dfrac{a}{n^2 + a^2}$ dès que $n > a$. Comme la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{a}{n^2 + a^2}$ converge, d'après la question 2.2.a., la série $\sum\limits_{n\geq 1} ||f_n||_{\infty,[0,a]}$ converge et donc la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{x}{n^2 + x^2}$ converge normalement sur $[0, a]$.
Les fonctions $x \to \dfrac{x}{n^2 + x^2}$ sont continues sur $[0, a]$ et la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{x}{n^2 + x^2}$ converge normalement sur $[0, a]$, donc d'après le théorème de continuité des séries de fonctions, la fonction $x \to \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{x}{n^2 + x^2}$ est continue sur $[0, a]$. Comme c'est vrai pour tout $a > 0$, la fonction est continue sur $\cup_{a>0}[0, a] = \mathbb{R}^+$.

2.3. On cherche enfin à étudier la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^n f_n$.

2.3.a. Etudier la convergence simple de la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{x}{n^2+x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$.

Soit $x \in \mathbb{R}^+$, on étudie la convergence absolue de la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{x}{n^2+x^2}$.

Or, $\left|(-1)^n \frac{x}{n^2+x^2}\right| = \frac{x}{n^2+x^2}$ et donc d'après la question 2.2.a., la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{x}{n^2+x^2}$ converge absolument, donc converge.

Donc la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{x}{n^2+x^2}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

2.3.b. Rappeler le critère des séries alternées. En déduire une estimation du reste $R_n(x) = \sum_{k=n}^{+\infty}(-1)^k \frac{x}{k^2+x^2}$, puis la convergence uniforme de $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{x}{n^2+x^2}$ sur $\mathbb{R}^+$.

Le critère des séries alternées : soit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positive, décroissante et qui tend vers zéro quand $n \to +\infty$, alors la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^n a_n$ converge et le reste $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty}(-1)^k a_k$ vérifie $|R_n| \leq a_{n+1}$.

On en déduit donc, pour $x \in \mathbb{R}^+$, que $|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n}^{+\infty}(-1)^k \frac{x}{k^2+x^2}\right| \leq \frac{x}{(n+1)^2+x^2}$. Or, d'après la question 2.1.b., $\frac{x}{(n+1)^2+x^2} \leq \frac{1}{2(n+1)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$; donc pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $|R_n(x)| \leq \frac{1}{2(n+1)}$. c'est-à-dire $||R_n||_{\infty,\mathbb{R}^+} \leq \frac{1}{2(n+1)}$. On en déduit que $||R_n||_{\infty,\mathbb{R}^+} \to 0$ quand $n \to +\infty$ et donc que la série converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 3 : Séries entières (9 points)

On considère l'équation différentielle suivante $(\mathcal{E})$ $\begin{cases} (1+2x)y' + 4y = \dfrac{-2}{1+2x} \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

3.1. On suppose qu'il existe une solution y de $(\mathcal{E})$ développable en série entière, c'est-à-dire telle que $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec un rayon $R > 0$.

3.1.a. Calculer a_0.

D'après la deuxième équation de $(\mathcal{E})$, on obtient que $a_0 = 0$.

3.1.b. Développer le second membre $\frac{-2}{1+2x}$ en série entière et préciser son rayon.

On développe $\frac{-2}{1+2x} = (-2)\sum_{n\geq 0}(-2x)^n = \sum_{n\geq 0}(-2)^{n+1}x^n$. C'est une série entière de rayon $R = 1/2$.

3.1.c. Déterminer a_1 et montrer que pour $n \geq 1$, $(n+1)a_{n+1} + (2n+4)a_n = (-2)^{n+1}$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = n(-2)^n$.

Si $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, alors sur $]-R, R[$, $y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$. L'équation $(\mathcal{E})$ se réécrit alors

$\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^n + 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-2)^{n+1}x^n$, c'est-à-dire $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^n + 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-2)^{n+1}x^n$. Or pour une série entière qui vérifie $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$, on a $b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ici on en déduit que $(n+1)a_{n+1} + (2n+4)a_n = (-2)^{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
En particulier pour $n = 0$, on trouve $a_1 + 4a_0 = -2$, ce qui donne avec la question 3.1.a., $a_1 = -2$.
La récurrence vient d'être vérifiée au rang 1.
On suppose qu'au rang n, on a bien $a_n = n(-2)^n$, on trouve alors au rang $n+1$ que

$$\begin{aligned}(n+1)a_{n+1} &= (-2)^{n+1} - (2n+4)a_n = (-2)^{n+1} - 2(n+2)n(-2)^n = (-2)^{n+1} + (n+2)n(-2)^{n+1} \\ &= (n^2+2n+1)(-2)^{n+1} = (n+1)^2(-2)^{n+1}\end{aligned}$$

et donc $a_{n+1} = (n+1)(-2)^{n+1}$. On conclut par récurrence que $a_n = n(-2)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
La série y est donc égale à $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(-2)^n x^n$.

3.1.d. Quel est le rayon de la série $y(x)$ ainsi calculée ?

On utilise le critère de d'Alembert, on trouve que $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} 2\frac{n+1}{n} = 2$, le rayon de convergence vaut donc $R = 1/2$.

3.2. On cherche une expression de y à l'aide des fonctions usuelles.

3.2. a. Donner le rayon de convergence et la somme de la série $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-2)^n x^n$.

C'est une série entière de rayon $R = 1/2$ qui vaut $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-2)^n x^n = \frac{1}{1+2x}$.

3.2.b. En citant le théorème utilisé, calculer la dérivée de g et en déduire que $y(x) = xg'(x)$.

On utilise le théorème de dérivation des séries entières : en tout point $x_0 \in]-R, R[$, la fonction somme f de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon R est dérivable et la dérivée f' est la somme de la série entière $\sum_{n\geq 1} na_n x^{n-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}}(n+1)a_{n+1}x^n$ de rayon de convergence R.

Donc ici, sur $]-1/2, 1/2[$, $g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(-2)^n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} n(-2)^n x^{n-1}$ et d'après la question 3.1.c., on a $y(x) = xg'(x)$.

3.2.c. Déduire de la question précédente une expression de y sous la forme d'une fraction rationnelle.

Or $g(x) = \frac{1}{1+2x}$, donc $g'(x) = -\frac{2}{(1+2x)^2}$ et $y(x) = -\frac{2x}{(1+2x)^2}$

3.2.d. Donner une expression simple de $y'(0)$, puis de $y^{(4)}(0)$.

On utilise le développement en série entière : $y'(0) = a_1 = -2$ et $y^{(4)}(0) = 4!a_4 = 4!\times 4(-2)^4 = 3 \times 2^9$.