UNIVERSITÉ de NICE – SOPHIA ANTIPOLIS
UFR SCIENCES
Licence 2 MI

Examen d'Intégrales et Séries 2005–2006

Corrigé de l'examen du Lundi 9 janvier 2006

Durée : 2h00
Les documents, calculatrices,... ne sont pas autorisés.

Exercice 1 : Suites et séries de fonctions (7 points)

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ avec $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{n^\alpha x}{1+n^2x^2}$.

1.1.On cherche tout d'abord à étudier la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ en fonction de α.

1.1.a. Etudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions (f_n) en distinguant les trois cas $\alpha > 2$, $\alpha = 2$ et $\alpha < 2$. Pour chaque cas, on donnera l'expression de la fonction limite f et le domaine de $\mathbb{R}$ où la convergence a lieu.

Pour $x \neq 0$, $f_n(x) \sim \dfrac{n^\alpha x}{n^2x^2} \sim \dfrac{n^{\alpha-2}}{x}$. Pour $x = 0$, $f_n(0) = 0$.
Lorsque $\alpha > 2$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} \pm\infty$ pour $x \neq 0$ et $f_n(0) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Donc f_n converge simplement vers 0 en 0 seulement .
Lorsque $\alpha = 2$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} 1/x$ pour $x \neq 0$ et $f_n(0) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Donc f_n converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Lorsque $\alpha < 2$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ pour $x \neq 0$ et $f_n(0) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Donc f_n converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

1.1.b. Dans le cas où $\alpha = 2$, que peut-on dire de la fonction limite f ? Qu'en déduire à propos de la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions (f_n) ?

Dans le cas où $\alpha = 2$, la fonction limite f est définie sur $\mathbb{R}$, mais elle n'est pas continue en 0, alors que les fonctions f_n le sont. Donc la convergence de f_n vers f n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

1.1.c. Dans le cas où $\alpha < 2$, étudier les variations de la fonction f_n. En déduire les valeurs de α pour lesquelles la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

Comme les fonctions f_n sont toutes impaires, on les étudie seulement sur $[0, +\infty[$.
On calcule la dérivée $f_n'(x) = n^\alpha \dfrac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$ et on obtient donc le tableau de variation suivant :

x	0		$1/n$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$f_n(1/n)$	$\searrow$	0

Or $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{n^{\alpha-1}}{2}$, donc $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}} = \dfrac{n^{\alpha-1}}{2}$ qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ si et seulement si $\alpha < 1$. Donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\alpha < 1$.

1.2. Dans le cas où $\alpha < 2$, on cherche maintenant à étudier la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ en fonction de α.

1.2.a. Déterminer les $\alpha < 2$ pour lesquels la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

La série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ ssi la série $\sum_{n\geq 1} ||f_n||_{\infty,\mathbb{R}}$ converge. Or, d'après la question 1.1.c, $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}} = \frac{n^{\alpha-1}}{2}$; la série $\sum_{n\geq 1} \frac{n^{\alpha-1}}{2}$ converge ssi $1-\alpha > 1$, c'est-à-dire ssi $\alpha < 0$. Donc la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ ssi $\alpha < 0$.

1.2.b. En déduire que, pour les coefficients α déterminés à la question précédente, la fonction F, définie par $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$, est continue sur $\mathbb{R}$. On citera précisément le résultat utilisé.

Pour $\alpha < 0$, la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, donc elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$ et pour $n \geq 1$ les fonctions f_n sont toutes continues sur $\mathbb{R}$. Donc, d'après le théorème de continuité des séries, la fonction F est bien continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 : Séries entières (7 points)

On considère l'équation différentielle suivante $(\mathcal{E}) \left\{ \begin{array}{l} xy'' + 2y' + xy = 0 \\ y(0) = 1 \end{array} \right.$.

On suppose qu'il existe une solution y de $(\mathcal{E})$ développable en série entière, c'est-à-dire telle que $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec un rayon $R > 0$.

2.1. Calculer a_0.

$y(0) = a_0$, donc $a_0 = 1$.

2.2. Calculer la valeur de a_1 et trouver une relation entre a_{n+1} et a_{n-1} pour $n \geq 1$.

On cherche y sous la forme $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

Donc en dérivant, $y'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ et $y''(x) = \sum_{n\geq 2} n(n-1) a_n x^{n-2}$. En remplaçant dans l'équation différentielle, on trouve $\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-1} + 2\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} + \sum_{n\geq 0} a_n x^{n+1} = 0$. Après un changement d'indice, on trouve $\sum_{n\geq 1} n(n+1)a_{n+1}x^n + 2\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n\geq 1} a_{n-1}x^n = 0$. On peut regrouper ces termes et utiliser le fait que si $\sum_{n\geq 0} b_n x^n = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 0$.

On obtient alors que $a_1 = 0$ et que pour $n \geq 1$, $(n+2)(n+1)a_{n+1} + a_{n-1} = 0$.

2.3. Déduire des questions précédentes la valeur des coefficients a_n pour $n \geq 0$. On montrera en particulier que pour $p \geq 0$, $a_{2p} = \frac{(-1)^p}{(2p+1)!}$. Donner le développement de la solution y ainsi trouvée.

En utilisant la relation $(n+2)(n+1)a_{n+1} + a_{n-1} = 0$ et le fait que $a_1 = 0$, on trouve que pour tout indice n impair, $a_n = 0$.

En utilisant la relation $(n+2)(n+1)a_{n+1} + a_{n-1} = 0$ et le fait que $a_0 = 1$, on trouve la valeur des coefficents a_n pour n pair.

On pose $n = 2p$ avec $p \geq 0$ et $a_{2p} = -\frac{1}{(2p+1)(2p)} a_{2p-2} = \frac{(-1)^2}{(2p+1)(2p)(2p-1)(2p-2)} a_{2p-4} = \cdots = \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} a_0 = \frac{(-1)^p}{(2p+1)!}$.

On trouve donc que $y(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p}$.

2.4. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^p$. En déduire le rayon de convergence de la série entière trouvée à la question 2.3.

On étudie le rayon de convergence de la série entière $g(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^p$ grâce à la règle de d'Alembert. On pose $a_p = \frac{(-1)^p}{(2p+1)!}$. On trouve que $\lim_{p\to+\infty} \left|\frac{a_{p+1}}{a_p}\right| = \lim_{p\to+\infty} \left|\frac{1}{(2p+3)(2p+2)}\right| = 0$. Donc le rayon de la série entière g vaut $+\infty$.

On en déduit que la série $g(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^p$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme $y(x) = g(x^2)$, la série $y(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p}$ converge absolument également pour tout $x \in \mathbb{R}$ et le rayon vaut $R = +\infty$.

2.5. Calculer la somme de la série en utilisant la fonction sinus.

Le développement en série entière de la fonction sinus vaut $\sin(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p+1} = xy(x)$.

Donc $y(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

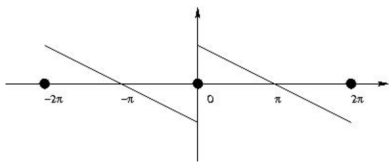
Question bonus : **2.6. Que peut-on en conclure pour la fonction ainsi trouvée au voisinage de 0 ?**

La fonction $y(x) = \frac{\sin x}{x}$ est donc développable en série entière au voisinage de 0. Elle est donc indéfiniment dérivable en 0.

Exercice 3 : Séries de Fourier (7 points)

3.1. Soit f la fonction de période 2π et impaire, égale à $\frac{\pi - x}{2}$ sur $]0, \pi]$.

3.1.a. Tracer le graphe de la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.



3.1.b. Calculer les coefficients de Fourier et la série de Fourier de f.

La fonction f est impaire donc les coefficients $a_n(f)$ sont nuls.

Calculons les coefficients $b_n(f)$ pour $n \geq 1$: $b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\pi - t)\sin(nt)dt$.

Par intégration par parties, $u(t) = \pi - t$ et $v'(t) = \sin(nt)$, donc $u'(t) = -1$ et $v(t) = -\frac{\cos(nt)}{n}$, on obtient : $b_n(f) = \frac{1}{\pi}\left(\left[-(\pi - t)\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\cos(nt)}{n}dt\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{n} - \left[\frac{\sin(nt)}{n^2}\right]_0^\pi\right) = \frac{1}{n}$.

Finalement, la série de Fourier de f vaut $S(f)(x) = \sum_{n\geq1} \frac{\sin(nx)}{n}$.

3.1.c. En déduire la valeur de $\sum_{n\geq1} \frac{\sin n}{n}$ en citant très précisément le résultat utilisé.

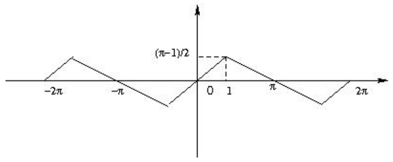
On utilise le théorème de Dirichlet. La fonction f est $2\pi-$périodique et dérivable par morceaux sur $[-\pi, \pi]$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de Fourier $S(f)(x)$ converge simplement vers

$\dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$. Ici la fonction f est continue en 1 et en ce point, $\dfrac{f(1^+)+f(1^-)}{2} = f(1) = \dfrac{\pi-1}{2}$.
Donc pour $x=1$, $S(f)(1) = \sum_{n\geq 1} \dfrac{\sin n}{n} = f(1) = \dfrac{\pi-1}{2}$.

3.2. On considère maintenant la fonction g de période 2π et impaire définie sur $[0,\pi]$ par

$$g(x) = \begin{cases} xf(1) = x \times \dfrac{\pi-1}{2} & \textbf{si } x\in[0,1], \\ f(x) & \textbf{si } x \in [1,\pi]. \end{cases}$$

3.2.a. Tracer le graphe de la fonction g sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.



3.2.b. Calculer les coefficients de Fourier de g. Montrer que la série de Fourier de g est égale à $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\sin n}{n^2}\sin(nx)$.

Comme g est impaire, $a_n(g) = 0$. Calculons les coefficients $b_n(g)$ pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} b_n(g) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(t)\sin(nt)dt = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^1 f(1)t\sin(nt)dt + \int_1^\pi f(t)\sin(nt)dt\right) \\ &= \frac{\pi-1}{\pi}\left(\left[-t\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^1 + \left[\frac{\sin(nt)}{n^2}\right]_0^1\right) + \frac{1}{\pi}\left(\left[-(\pi-t)\frac{\cos(nt)}{n}\right]_1^\pi - \left[\frac{\sin(nt)}{n^2}\right]_1^\pi\right) \\ &= \frac{\pi-1}{\pi}\left(-\frac{\cos n}{n} + \frac{\sin n}{n^2}\right) + \frac{1}{\pi}\left((\pi-1)\frac{\cos n}{n} + \frac{\sin n}{n^2}\right) = \frac{\sin n}{n^2}. \end{aligned}$$

Donc la série de Fourier de g vaut $S(g)(x) = \sum_{n\geq 1} \dfrac{\sin n}{n^2}\sin(nx)$.

3.2.c. En déduire la valeur de $\sum_{n\geq 1}\left(\dfrac{\sin n}{n}\right)^2$.

Comme à la question 3.1.c, on applique le théorème de Dirichlet pour $x=1$. Ici, la fonction g est continue partout et donc pour tout $x\in\mathbb{R}$, $S(g)(x) = g(x)$. Pour $x=1$, on obtient $S(g)(1) = \sum_{n\geq 1}\left(\dfrac{\sin n}{n}\right)^2 = g(1) = f(1) = \dfrac{\pi-1}{2}$.

3.3. Déduire des questions 3.1. et 3.2. l'égalité suivante $\sum_{n\geq 1}\dfrac{\sin n}{n} = \sum_{n\geq 1}\left(\dfrac{\sin n}{n}\right)^2$.

D'après les questions 3.1.c. et 3.2.c. $\sum_{n\geq 1}\dfrac{\sin n}{n} = \dfrac{\pi-1}{2} = \sum_{n\geq 1}\left(\dfrac{\sin n}{n}\right)^2$.