UNIVERSITÉ de NICE – SOPHIA ANTIPOLIS
UFR SCIENCES
Licence 2 MI

Examen d'Intégrales et Séries 2006–2007

Contrôle Continu du Lundi 13 novembre 2006

Durée : 2h00
Les documents, calculatrices,... ne sont pas autorisés.

Exercice 1 : (5 points) Séries numériques
Donner la nature des séries suivantes en justifiant votre réponse :

1.1. $\sum_{n\geq 0} \frac{n!}{2^n}$. Soit $u_n = \frac{n!}{2^n}$. On calcule $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{n+1}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty > 1$. On en conclut donc, d'après le critère de d'Alembert, que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{n!}{2^n}$ diverge.

1.2. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$. Soit $u_n = \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$. Or $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ et comme $\frac{1}{n^2} \to 0$, donc $u_n \sim \frac{1}{n^3}$ quand $n \to +\infty$. De plus, $\frac{1}{n^3} \geq 0$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ converge, donc d'après le théorème de comparaison, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ converge.

1.3. $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{\arctan n}{2}\right)^n$. Soit $u_n = \left(\frac{\arctan n}{2}\right)^n$. On calcule $|u_n|^{1/n} = \frac{\arctan n}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{4} < 1$. On en conclut donc, d'après le critère de Cauchy, que la série $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{\arctan n}{2}\right)^n$ converge.

1.4. $\sum_{n\geq 1} \exp\left(\frac{1}{n}\right)$. $\lim_{n\to+\infty} \exp\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0$, donc la série $\sum_{n\geq 1} \exp\left(\frac{1}{n}\right)$ diverge.

1.5. $\sum_{n\geq 1} \left(1-\exp\left(-\frac{1}{n}\right)\right)$. Soit $u_n = \left(1-\exp\left(-\frac{1}{n}\right)\right)$. On utilise un développement limité de l'exponentielle au voisinage de 0, à savoir $\exp x = 1 + x + o(x)$. On obtient que $\left(1-\exp\left(-\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, c'est-à-dire $u_n \sim \frac{1}{n} \geq 0$. Par le théorème de comparaison, comme $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, on en déduit que $\sum_{n\geq 1} \left(1-\exp\left(-\frac{1}{n}\right)\right)$ diverge.

Exercice 2 : (5 points) Séries numériques

2.1. Montrer que $\left|\dfrac{(-1)^n}{(-1)^n+n^2}\right| \sim \dfrac{1}{n^2}$ **quand** $n \to +\infty$**. En déduire la nature de** $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{(-1)^n+n^2}$**.**

On a $\left|\dfrac{(-1)^n n^2}{(-1)^n+n^2}\right| = \left|\dfrac{1}{\dfrac{(-1)^n}{n^2}+1}\right| \to 1$ quand $n \to +\infty$ car $\dfrac{(-1)^n}{n^2} \to 0$. On en déduit que $\left|\dfrac{(-1)^n}{(-1)^n+n^2}\right| \sim \dfrac{1}{n^2}$ quand $n \to +\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{n^2} \geq 0$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, donc d'après le théorème de comparaison, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{(-1)^n+n^2}$ converge absolument, donc elle converge.

2.2. On cherche à étudier la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{(-1)^n+n}$**.**

2.2.a. De l'équivalent $\left|\dfrac{(-1)^n}{(-1)^n+n}\right| \sim \dfrac{1}{n}$ **quand** $n \to +\infty$**, que peut-on en déduire sur la convergence asbolue de** $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{(-1)^n+n}$ **? Sur la convergence de** $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{(-1)^n+n}$ **?**

La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, donc d'après le théorème de comparaison, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{(-1)^n+n}$ ne converge pas absolument. En revanche, on ne peut rien en conclure sur la convergence ou la divergence de la série.

2.2.b. Montrer que $\dfrac{(-1)^n}{(-1)^n+n} = \dfrac{(-1)^n}{n} + v_n$ **avec** $v_n \sim -\dfrac{1}{n^2}$ **quand** $n \to +\infty$**.**

On effectue un développement limité :

$$\frac{(-1)^n}{(-1)^n+n} = \frac{(-1)^n}{n}\frac{1}{1+\dfrac{(-1)^n}{n}} = \frac{(-1)^n}{n}\left(1-\frac{(-1)^n}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) =$$
$\dfrac{(-1)^n}{n} + v_n$, avec $v_n \sim -\dfrac{1}{n^2}$ quand $n \to +\infty$.

2.2.c. Déduire de la question 2.2.b. la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{(-1)^n+n}$**.**

On a que $\left(\dfrac{1}{n}\right)_n$ est une suite décroissante et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc d'après le théorème des séries alternées, $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n}$ converge. De plus, $v_n \sim -\dfrac{1}{n^2} \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2}$ converge, donc d'après le théorème de comparaison, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} v_n$ converge également. La somme de deux séries convergentes converge, donc d'après la question 2.2.b., $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{(-1)^n+n}$ converge.

Exercice 3 : (10 points) Intégrales généralisées

3.1. Nous commençons par l'étude et le calcul de $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt$.

3.1.a. Montrer que $\frac{\ln x}{x^2} = o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$ quand $x \to +\infty$. En déduire la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt$.

On a $\lim_{x \to +\infty} x^{3/2} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$ d'après les puissances comparées. Donc $\frac{\ln x}{x^2} = o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$ quand $x \to +\infty$. La fonction $t \to \frac{\ln t}{t^2}$ est localement intégrable sur $[1, +\infty[$. Or $\frac{1}{x^{3/2}} \geq 0$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2}}$ converge, d'après le théorème de comparaison, $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt$ est une intégrale convergente.

3.1.b. Quelle est la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$? La calculer.

D'après le théorème du cours, c'est une intégrale convergente. Soit $X \geq 1$. On calcule $\int_1^X \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^X = 1 - \frac{1}{X} \to 1$ quand $X \to +\infty$. Donc $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = 1$.

3.1.c. Soit $X \geq 1$. Faire une intégration par parties sur l'intégrale $\int_1^X \frac{\ln t}{t^2} dt$. En déduire la valeur de $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt$ en utilisant la question 3.1.b.

On pose $u(t) = \ln t$ et $v'(t) = \frac{1}{t^2}$. Donc $u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v(t) = -\frac{1}{t}$. L'intégration par parties donne donc $\int_1^X \frac{\ln t}{t^2} dt = \left[-\frac{\ln t}{t}\right]_1^X + \int_1^X \frac{1}{t^2} dt = -\frac{\ln X}{X} + \int_1^X \frac{1}{t^2} dt$. Or $\lim_{X \to +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$ et $\lim_{X \to +\infty} \int_1^X \frac{1}{t^2} dt = 1$, d'après la question précédente. Donc $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt = 1$.

3.2. Nous étudions maintenant $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt$.

3.2.a. Montrer que $\ln(1+x) \sim \ln x$ quand $x \to +\infty$. Donner la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt$.

$\frac{\ln(1+x)}{\ln x} = \frac{\ln x + \ln(\frac{1}{x} + 1)}{\ln x} = 1 + \frac{1}{\ln x} \ln\left(\frac{1}{x} + 1\right)$. De plus, $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln x} \ln\left(\frac{1}{x} + 1\right) = 0$, donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+x)}{\ln x} = 1$, c'est-à-dire $\ln(1+x) \sim \ln x$ quand $x \to +\infty$.

La fonction $t \to \frac{\ln(1+t)}{t^2}$ est localement intégrable sur $[1, +\infty[$. On a donc que $\frac{\ln(1+t)}{t^2} \sim \frac{\ln t}{t^2} \geq 0$ et comme $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt$ converge d'après la question 3.1., d'après le théorème de comparaison, $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt$ converge.

3.2.b. Donner la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(t+1)}$. Trouver les coefficients α et β tels que

$\dfrac{1}{t(t+1)} = \dfrac{\alpha}{t} + \dfrac{\beta}{t+1}$**. En déduire la valeur de** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(t+1)}$**.**

La fonction $t \to \dfrac{1}{t(t+1)}$ est localement intégrable sur $[1, +\infty[$. $\dfrac{1}{x(x+1)} \sim \dfrac{1}{x^2} \geq 0$ quand $x \to +\infty$. Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge, d'après le théorème de comparaison, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(t+1)}$ converge. On a $\dfrac{1}{t(t+1)} = \dfrac{1+t-t}{t(t+1)} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+1}$, donc $\alpha = 1$ et $\beta = -1$. Soit $X \geq 1$, $\displaystyle\int_1^X \frac{dt}{t(t+1)} = \int_1^X \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt = [\ln t - \ln(1+t)]_1^X = \left[\ln\left(\frac{t}{1+t}\right)\right]_1^X = \ln\left(\frac{X}{1+X}\right) + \ln 2 \to \ln 2$ quand $X \to +\infty$. Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(t+1)} = \ln 2$.

3.2.c. Soit $X \geq 1$**. Faire une intégration par parties sur l'intégrale** $\displaystyle\int_1^X \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt$**. En utilisant la question 3.2.b., calculer la valeur de** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt$**.**

On pose $u(t) = \ln(1+t)$ et $v'(t) = \dfrac{1}{t^2}$. Donc $u'(t) = \dfrac{1}{t+1}$ et $v(t) = -\dfrac{1}{t}$. L'intégration par parties donne donc $\displaystyle\int_1^X \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt = \left[-\frac{\ln(1+t)}{t}\right]_1^X + \int_1^X \frac{1}{t(t+1)} dt = \ln 2 - \frac{\ln(1+X)}{X} + \int_1^X \frac{1}{t(t+1)} dt$. Or $\displaystyle\lim_{X \to +\infty} \frac{\ln(1+X)}{X} = 0$ et en utilisant la question 3.2.b., on trouve que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt = 2\ln 2$.

3.2.d. Quelle est la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt$ **?**

La fonction $t \to \dfrac{\ln(1+t)}{t^2}$ est localement intégrable sur $]0, +\infty[$. On a vu que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt$ converge. Lorsque $x \to 0$, $\dfrac{\ln(1+t)}{t^2} \sim \dfrac{t}{t^2} = \dfrac{1}{t} \geq 0$; comme $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t}$ diverge, on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt$ diverge et donc que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt$ diverge.

3.3. Nous étudions finalement $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin t \, \frac{\ln t}{t} dt$**.**

3.3.a. En utilisant que pour $x \geq e$, $\ln x \geq 1$**, donner la nature de** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t} dt$**.**

La fonction $t \to \dfrac{\ln t}{t}$ est localement intégrable sur $[1, +\infty[$. Pour $t \geq e$, $\dfrac{\ln t}{t} \geq \dfrac{1}{t} \geq 0$. Or $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge, donc par théorème de comparaison, $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\ln t}{t} dt$ diverge. Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t} dt$ diverge.

3.3.b. La question 3.3.a. suffit-elle à donner la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin t \, \frac{\ln t}{t} dt$ **? Pourquoi ?**

On a $\left|\sin t \, \dfrac{\ln t}{t}\right| \leq \dfrac{\ln t}{t}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t} dt$ diverge. Cela ne nous permet donc pas de conclure à l'aide des théorèmes de comparaison.

3.3.c. Montrer que les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ **et** $\int_1^{+\infty} \cos t \frac{\ln t}{t^2} dt$ **sont absolument convergentes.**

On a $0 \leq \left| \frac{\cos t}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$ et comme $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est convergente, d'après le théorème de comparaison, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ est absolument convergente, donc convergente.

On a $0 \leq \left| \cos t \frac{\ln t}{t^2} \right| \leq \frac{\ln t}{t^2}$ et comme $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt$ est convergente d'après la question 3.1.a., d'après le théorème de comparaison, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \cos t \frac{\ln t}{t^2} dt$ est absolument convergente, donc convergente.

3.3.d. Soit $X \geq 1$. **En faisant une intégration par parties sur** $\int_1^X \sin t \frac{\ln t}{t} dt$ **et en utilisant la question 3.3.c., montrer que** $\int_1^{+\infty} \sin t \frac{\ln t}{t} dt$ **est une intégrale convergente.**

On pose $u(t) = \frac{\ln t}{t}$ et $v'(t) = \sin t$. Donc $u'(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{\ln t}{t^2}$ et $v(t) = -\cos t$. L'intégration par parties donne donc $\int_1^X \sin t \frac{\ln t}{t} dt = \left[-\cos t \frac{\ln t}{t} \right]_1^X + \int_1^X \frac{\cos t}{t^2} dt - \int_1^X \cos t \frac{\ln t}{t^2} dt = -\cos X \frac{\ln X}{X} + \int_1^X \frac{\cos t}{t^2} dt - \int_1^X \cos t \frac{\ln t}{t^2} dt$. Or $\lim_{X \to +\infty} -\cos X \frac{\ln X}{X} = 0$ et d'après la question 3.3.c., les deux intégrales $\int_1^X \frac{\cos t}{t^2} dt$ et $\int_1^X \cos t \frac{\ln t}{t^2} dt$ ont une limite lorsque $X \to +\infty$. Donc $\int_1^X \sin t \frac{\ln t}{t} dt$ admet une limite quand $X \to +\infty$, c'est-à-dire que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \sin t \frac{\ln t}{t} dt$ est convergente.