UNIVERSITÉ de NICE – SOPHIA ANTIPOLIS
UFR SCIENCES
Licence 2 MI

Examen d'Intégrales et Séries 2006–2007

Examen du Lundi 8 janvier 2007

Durée : 2h00
Les documents, calculatrices,... ne sont pas autorisés.

Exercice 1 : (8 points) Séries de fonctions

1.1.a. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}=\exp(1)=e$**.**

On a $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}=\exp\left((n+1)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)$. Or $(n+1)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}n\times\dfrac{1}{n}=1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}=\exp(1)=e$.

1.1.b. En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geq1}\dfrac{1}{n}\times\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}}$**.**

D'après la question précédente, $\dfrac{1}{n}\times\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{en}\geq0$. Or la série $\sum\limits_{n\geq1}\dfrac{1}{n}$ diverge donc d'après le théorème des équivalents de séries, la série $\sum\limits_{n\geq1}\dfrac{1}{n}\times\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}}$ diverge.

Soit $f_n:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ **définie pour** $n\in\mathbb{N}$ **par** $f_n(x)=\dfrac{x}{(1+x)^{n+1}}$**.**

1.2. Montrer que la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}f_n(x)$ **converge simplement sur** $\mathbb{R}^+$**.**

Si $x=0$, $f_n(0)=0$ et $\sum_{n\geq0}0$ converge.

Si $x>0$, on utilise le théorème de d'Alembert. On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{x}{(1+x)^{n+2}}\times\dfrac{(1+x)^{n+1}}{x}\right|=\dfrac{1}{1+x}<1$ car $x>0$. On en déduit donc d'après le théorème de d'Alembert sur les séries que la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}f_n(x)$ converge.

On peut ainsi définir sur $\mathbb{R}^+$ **la somme de la série de fonctions** $F(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}f_n(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x}{(1+x)^{n+1}}$**.**

1.3.a. Calculer f_n' et en déduire $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+}|f_n(x)|$ pour $n\geq 1$.

On calcule $f_n'(x)=\dfrac{1-nx}{(1+x)^{n+2}}$, ce qui donne le tableau de variation suivant pour $n\geq 1$:

x	0		$1/n$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$f_n(1/n)$	$\searrow$	0

On a donc $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+}|f_n(x)|=f_n(1/n)=\dfrac{1}{n}\times\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}}$.

1.3.b. En déduire que F ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}^+$.

F converge normalement sur $\mathbb{R}^+$ ssi la série $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+}|f_n(x)|$ converge. Or d'après la question 1.1.b., la série $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+}|f_n(x)|=\displaystyle\sum_{n\geq1}\frac{1}{n}\times\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}}$ diverge. Donc F ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}^+$.

1.3.c. Montrer que F converge normalement sur $[a,+\infty[$ avec $a>0$.

Soit $a>0$. Pour $n\geq\dfrac{1}{a}$, $\sup\limits_{x\in[a,+\infty[}|f_n(x)|=f_n(a)$. Or on a montré à la question 1.2. que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(a)$ converge, donc $\displaystyle\sum_{n\geq1/a}f_n(a)=\sum_{n\geq1/a}\sup_{x\in[a,+\infty[}|f_n(x)|$ converge et donc $\displaystyle\sum_{n\geq0}\sup_{x\in[a,+\infty[}|f_n(x)|$ converge, c'est-à-dire que F converge normalement sur $[a,+\infty[$.

1.3.d. En déduire que F est continue sur $]0,+\infty[$.

Pour tout $n\geq 0$, f_n est continue sur $[a,+\infty[$. De plus, F converge normalement donc uniformément sur $[a,+\infty[$, donc d'après le théorème de continuité des séries de fonctions, F est continue sur $[a,+\infty[$. Ceci est vrai pour tout $a>0$, donc F est continue sur $\displaystyle\bigcup_{a>0}[a,+\infty[=]0,+\infty[$.

1.4. Calculer explicitement la somme de la série $F(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x}{(1+x)^{n+1}}$, en séparant $x=0$ et $x>0$. Est-ce cohérent avec la question 1.3.d. ?

Pour $x=0$, on trouve $F(0)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}0=0$.

Pour $x>0$, on reconnaît une série géométrique et $F(x)=\dfrac{x}{x+1}\times\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x+1}}=1$.

La fonction F n'est donc pas continue en 0, ce qui est cohérent avec la question 1.3.d, où on a vu que F est continue sur $]0,+\infty[$.

Exercice 2 : (5 points) Séries entières

2.1. Rappeler le développement en série entière de la fonction $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ et son rayon. Développer en série entière la fonction $f(x)=\dfrac{x^3}{2+x}$ sous la forme $\displaystyle\sum_{n\geq0}a_nx^{n+3}$ et préciser son rayon.

On sait que $\dfrac{1}{1+x} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n$ pour $x \in]-1,1[$. On a donc que $f(x) = \dfrac{x^3}{2+x} = \dfrac{1}{2}\dfrac{x^3}{1+x/2} = \dfrac{x^3}{2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\dfrac{x}{2}\right)^n$ pour $\left|\dfrac{x}{2}\right| < 1$, c'est-à-dire $|x| < 2$. Finalement on a donc $\dfrac{x^3}{2+x} = \sum_{n\geq 0}\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^{n+3}$ pour $x \in]-2,2[$.

2.2.a. Trouver les coefficients α, β et γ tels que $\dfrac{x^3}{x+2} = x^2 + \alpha x + \beta + \dfrac{\gamma}{x+2}$.

$\dfrac{x^3}{x+2} = x^2 + \alpha x + \beta + \dfrac{\gamma}{x+2} = \dfrac{x^3 + 2x^2 + \alpha x^2 + 2\alpha x + \beta x + 2\beta + \gamma}{x+2}$, on trouve donc le système $\begin{cases} 2+\alpha = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \\ 2\beta + \gamma = 0 \end{cases}$, qui se résout en $\alpha = -2$, $\beta = 4$ et $\gamma = -8$. Finalement, on trouve que $\dfrac{x^3}{x+2} = x^2 - 2x + 4 - \dfrac{8}{x+2}$.

2.2.b. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^3}{t+2}\,dt$.

On a alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^3}{t+2}\,dt = \int_0^1 \left(t^2 - 2t + 4 - \frac{8}{t+2}\right)dt = \left[\frac{t^3}{3} - t^2 + 4t - 8\ln(t+2)\right]_0^1 = \frac{10}{3} - 8\ln\left(\frac{3}{2}\right)$.

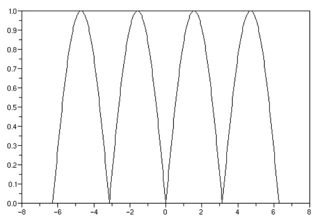
2.3. Intégrer l'égalité de la question 2.1., en citant soigneusement le théorème utilisé . En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+4)2^{n+1}}$.

On utilise le théorème d'intégration des séries entières. Le rayon de la série ici vaut 2, on peut donc intégrer la série entière entre 0 et 1 puisque $0 < 1 < 2$ et on obtient alors : $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^3}{2+t}dt = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\int_0^1 t^{n+3}dt = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+4)}$ et donc d'après la question 2.2.b, $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+4)} = \frac{10}{3} - 8\ln\left(\frac{3}{2}\right)$.

Exercice 3 : (7 points) Séries de Fourier

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique telle que $f(t) = |\sin(t)|$ pour $t \in [-\pi, \pi]$.

3.1. Dessiner cette fonction sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.



3.2.a. Calculer les coefficients de Fourier de f. On pourra utiliser la formule $\sin a \cos b = \dfrac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right)$ **et on montrera en particulier que $a_0 = \dfrac{4}{\pi}$, que**

$a_{2p} = \dfrac{4}{\pi(1-4p^2)}$ **pour tout** $p \geq 1$ **et que** $a_{2p+1} = 0$ **pour** $p \geq 0$**.**
La fonction f est paire. On sait donc que les coefficients $b_n = 0$.
Calculons les coefficients a_n. On a $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\ dt = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\ dt$ car f est paire. Comme la fonction sinus est positive sur l'intervalle $[0,\pi]$, on a $f(t) = \sin t$ sur $[0,\pi]$ et on calcule donc $a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin t\cos(nt)\ dt$.
D'après la formule $\sin t\cos(nt) = \dfrac{1}{2}\left(\sin((n+1)t) + \sin((1-n)t)\right)$ et on a donc, pour $n \neq 1$,
$a_n = -\dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{\cos((n+1)t)}{n+1} + \dfrac{\cos((1-n)t)}{1-n}\right]_0^{\pi} = -\dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \dfrac{(-1)^{n-1}}{1-n} - \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{1-n}\right) = \dfrac{1}{\pi}\left((-1)^n+1\right)\left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{1-n}\right) = \dfrac{-2}{\pi} \times \dfrac{(-1)^n+1}{n^2-1}$.
Pour $n = 1$, $\sin t\cos(t) = \dfrac{1}{2}\left(\sin(2t)\right)$ et donc $a_1 = -\dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{\cos(2t)}{2}\right]_0^{\pi} = 0$.
Finalement, on a pour n impair, $a_n = 0$, c'est-à-dire $a_{2p+1} = 0$ pour $p \geq 0$ et pour n pair, $a_n = \dfrac{-4}{\pi} \times \dfrac{1}{n^2-1}$, c'est-à-dire $a_{2p} = \dfrac{4}{\pi(1-4p^2)}$ pour tout $p \geq 1$ et $a_0 = \dfrac{4}{\pi}$.

3.2.b. En déduire la série de Fourier de f.
On a donc $S(f) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n\cos(nx) = \dfrac{2}{\pi} + \displaystyle\sum_{p\geq 1} \dfrac{4}{\pi(1-4p^2)}\cos(2px)$.

3.3.a. Expliquer pourquoi la série de Fourier de f converge et donner la valeur de sa somme (on rappellera précisément l'énoncé du théorème utilisé).
Or on remarque ici que f est intégrable sur $[-\pi,\pi]$, dérivable par morceaux sur $[-\pi,\pi]$ et continue sur $[-\pi,\pi]$. On peut donc appliquer le théorème de Dirichlet et la série de Fourier de f, $S(f)$, converge simplement vers la fonction f sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a l'égalité suivante $f(x) = \dfrac{2}{\pi} + \displaystyle\sum_{p\geq 1} \dfrac{4}{\pi(1-4p^2)}\cos(2px)$.

3.3.b. En déduire la somme de la série suivante : $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \dfrac{1}{4p^2-1}$.

En particulier pour $x = 0$, on obtient d'après la question 3.3.a., $f(0) = 0 = \dfrac{2}{\pi} + \displaystyle\sum_{p\geq 1} \dfrac{4}{\pi(1-4p^2)}$, c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{p\geq 1} \dfrac{1}{4p^2-1} = \dfrac{1}{2}$.

3.4. Calculer également $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(4p^2-1)^2}$ en précisant le résultat utilisé. On rappelle la formule $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$.

On applique l'égalité de Parseval : $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2\ dt = \dfrac{a_0^2}{2} + \displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n^2$.
On calcule $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2\ dt = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2 t\ dt = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} 1-\cos(2t)dt = \dfrac{1}{\pi}\left[t - \dfrac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\pi} = 1$.
Et on a donc l'égalité $1 = \dfrac{8}{\pi^2} + \displaystyle\sum_{p\geq 1} \dfrac{16}{\pi^2(4p^2-1)^2}$, donc $\displaystyle\sum_{p\geq 1} \dfrac{1}{(4p^2-1)^2} = \dfrac{\pi^2}{16} - \dfrac{1}{2}$.