UNIVERSITÉ de NICE – SOPHIA ANTIPOLIS
UFR SCIENCES
Licence 2 MI

Examen d'Intégrales et Séries 2006–2007

Examen de 2$^{\text{ème}}$ session du Mardi 5 Juin 2007

Durée : 2h00
Les documents, calculatrices,... ne sont pas autorisés.

Exercice 1 : *(8 points)* **Intégrales généralisées**
On cherche à étudier dans cet exercice la convergence de l'intégrale $I(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty} \sin(t)\dfrac{e^{-\alpha t}}{t^\beta}\, dt$ **pour différentes valeurs de** α **et de** β**.**

1.1. On considère le cas où $\alpha = 1$ **et** $\beta = 3$**. Donner un équivalent simple de** $\sin(t)\dfrac{e^{-t}}{t^3}$ **quand** $t \to 0$**. En déduire la nature de l'intégrale** $\int_0^1 \sin(t)\dfrac{e^{-t}}{t^3}\, dt$**, en rappelant précisément les hypothèses du résultat utilisé. Quelle est la nature de l'intégrale** $I(1,3) = \int_0^{+\infty} \sin(t)\dfrac{e^{-t}}{t^3}\, dt$ **?**

Quand $t \to 0$, $\sin(t) \sim t$ et $e^{-t} \sim 1$ et donc $\sin(t)\dfrac{e^{-t}}{t^3} \sim \dfrac{1}{t^2}$.
On a donc $\sin(t)\dfrac{e^{-t}}{t^3} \sim \dfrac{1}{t^2} \geq 0$ quand $t \to 0$. Or $\int_0^1 \dfrac{1}{t^2}\, dt$ diverge car $2 > 1$, donc d'après le théorème d'équivalence des intégrales généralisées, $\int_0^1 \sin(t)\dfrac{e^{-t}}{t^3}\, dt$ diverge.
On en déduit que $I(1,3) = \int_0^{+\infty} \sin(t)\dfrac{e^{-t}}{t^3}\, dt$ diverge.

1.2. On considère le cas où $\alpha = 1$ **et** $\beta = 1$**.**

1.2.a. Donner un équivalent simple de $\sin(t)\dfrac{e^{-t}}{t}$ **quand** $t \to 0$**. En déduire rapidement la nature de l'intégrale** $\int_0^1 \sin(t)\dfrac{e^{-t}}{t}\, dt$**.**

Quand $t \to 0$, $\sin(t)\dfrac{e^{-t}}{t} \sim 1$. La fonction est donc prolongeable par continuité en 0 et l'intégrale est convergente.

1.2.b. Vérifier que lorsque $t \to +\infty$, $\sin(t)\dfrac{e^{-t}}{t} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$**. En déduire la nature de l'intégrale** $\int_1^{+\infty} \sin(t)\dfrac{e^{-t}}{t}\, dt$**, en citant le théorème utilisé.**

Par les croissances comparées, $\lim\limits_{t\to+\infty} te^{-t} = 0$. Or $\left|\sin(t)te^{-t}\right| \leq te^{-t}$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \sin(t)te^{-t} = 0$.
On en déduit que lorsque $t \to +\infty$, $\sin(t)\dfrac{e^{-t}}{t} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

Or $\frac{1}{t^2} \geq 0$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ converge car $2 > 1$ donc par théorème de comparaisons, $\int_1^{+\infty} \sin(t)\frac{e^{-t}}{t}\, dt$ converge.

1.2.c. Quelle est la nature de $I(1,1) = \int_0^{+\infty} \sin(t)\frac{e^{-t}}{t}\, dt$?

$\int_0^1 \sin(t)\frac{e^{-t}}{t}\, dt$ converge et $\int_1^{+\infty} \sin(t)\frac{e^{-t}}{t}\, dt$ converge, donc $I(1,1) = \int_0^{+\infty} \sin(t)\frac{e^{-t}}{t}\, dt$ converge.

1.3. On considère le cas où $\alpha = 0$ et $\beta = 0$. Calculer $\int_0^X \sin(t)\ dt$ et en déduire la nature de $I(0,0) = \int_0^{+\infty} \sin(t)\ dt$.

$\int_0^X \sin(t)\ dt = [-\cos(t)]_0^X = 1 - \cos(X)$. Or $\cos(X)$ n'admet pas de limite quand $X \to +\infty$, donc $I(0,0) = \int_0^{+\infty} \sin(t)\ dt$ diverge.

1.4. On considère le cas où $\alpha = 0$ et $\beta = 1/2$. On admet que $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^{1/2}}\, dt$ converge.

1.4.a. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^{3/2}}\, dt$ est absolument convergente, en vérifiant les hypothèses du théorème utilisé.

Pour $t \in \mathbb{R}$, $|\cos(t)| \leq 1$ et $0 \leq \left|\frac{\cos(t)}{t^{3/2}}\right| \leq \frac{1}{t^{3/2}}$. Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}\, dt$ converge car $3/2 > 1$, donc d'après le théorème de comparaisons des intégrales généralisées, $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos(t)}{t^{3/2}}\right| dt$ converge et donc $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^{3/2}}\, dt$ est absolument convergente.

1.4.b. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{1/2}}\, dt$ converge à l'aide d'une intégration par parties sur $\int_1^X \frac{\sin(t)}{t^{1/2}}\, dt$. Quelle est la nature de $I(0,1/2) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{1/2}}\, dt$?

Une intégration par parties sur $\int_1^X \frac{\sin(t)}{t^{1/2}}\, dt$ donne

$$\int_1^X \frac{\sin(t)}{t^{1/2}}\, dt = \left[-\frac{\cos(t)}{t^{1/2}}\right]_1^X - \frac{1}{2}\int_1^X \frac{\cos(t)}{t^{3/2}}\, dt = \cos(1) - \frac{\cos(X)}{X^{1/2}} - \frac{1}{2}\int_1^X \frac{\cos(t)}{t^{3/2}}\, dt.$$

Or d'après la question 1.4.a., $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^{3/2}}\, dt$ est absolument convergente et donc convergente. On en déduit que $\lim_{X\to+\infty} \int_1^X \frac{\cos(t)}{t^{3/2}}\, dt$ existe. De plus, $\lim_{X\to+\infty} \frac{\cos(X)}{X^{1/2}} = 0$, donc $\lim_{X\to+\infty} \int_1^X \frac{\sin(t)}{t^{1/2}}\, dt$ existe. Finalement, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{1/2}}\, dt$ converge.

Or $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^{1/2}}\, dt$ converge, donc $I(0,1/2) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{1/2}}\, dt$ converge.

Exercice 2 : *(7 points)* **Séries de fonctions**

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ avec $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{1}{n}\text{arctan}\left(\frac{x}{n}\right)$.

2.1.a. Donner un équivalent simple de arctan(t) quand $t \to 0$. Etudier, pour $x \in \mathbb{R}^+$, la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\text{arctan}\left(\frac{x}{n}\right)$. La série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}^+$?

$\text{arctan}x \underset{x\to 0}{\sim} x$. Soit $x \in \mathbb{R}^+$, on a donc $\frac{1}{n}\text{arctan}\left(\frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}$. Or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série convergente car $2 > 1$ et $\frac{1}{n^2} \geq 0$ pour $n \geq 1$ et donc d'après le théorème d'équivalence des séries numériques, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\text{arctan}\left(\frac{x}{n}\right)$ est une série convergente.

On en déduit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

2.1.b. La série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}^+$? Si $a > 0$, la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge-t-elle normalement sur $[0, a]$?

On a $\sup_{x\in\mathbb{R}^+} \left|\frac{1}{n}\text{arctan}\left(\frac{x}{n}\right)\right| = \frac{\pi}{2n}$. Or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est une série divergente, et donc $\sum_{n\geq 1} \sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)|$ diverge. Donc, la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}^+$.

Soit $a > 0$. Pour $n \geq 1$, $x \to f_n(x)$ est une fonction croissante, donc $\sup_{x\in[0,a]} \left|\frac{1}{n}\text{arctan}\left(\frac{x}{n}\right)\right| = \frac{1}{n}\text{arctan}\left(\frac{a}{n}\right)$. Or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\text{arctan}\left(\frac{a}{n}\right)$ converge d'après la question 2.1.a. Donc la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge normalement sur $[0, a]$.

2.1.c. On considère la fonction $F(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\text{arctan}\left(\frac{x}{n}\right)$ sur $\mathbb{R}^+$. Que pouvez-vous conclure sur F au regard de la question 2.1.a. ? de la question 2.1.b. (on citera le théorème utilisé) ?

D'après la question 2.1.a., on peut dire que la fonction F est définie sur $\mathbb{R}^+$.

D'après la question 2.1.b., on peut dire que la fonction F est continue sur $\mathbb{R}^+$. En effet, les fonctions $x \to f_n(x)$ sont continues sur $[0, a]$ et la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge normalement sur $[0, a]$. D'après le théorème de continuité des séries de fonctions, la fonction F est continue sur $[0, a]$ pour tout $a > 0$ et donc elle est continue sur $\bigcup_{a>0} [0, a] = \mathbb{R}^+$.

2.2. Prouver que la série $\sum_{n\geq 1} f_n'(x)$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$. En vérifiant toutes les hypothèses du théorème utilisé, en déduire que F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $F'(x) = \sum_{n\geq 1} f_n'(x)$.

La dérivée vaut $f_n'(x) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} \times \frac{1}{1 + x^2/n^2} = \frac{1}{n^2 + x^2}$. Donc $\sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n'(x)| = \frac{1}{n^2}$ et la

série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, donc la série $\sum_{n\geq 1} \sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n'(x)|$ converge, c'est-à-dire $\sum_{n\geq 1} f_n'(x)$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$.
On utilise le théorème de dérivation des séries de fonctions. Les fonctions $x \to f_n(x)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}^+$, la série $\sum_{n\geq 1} f_n(0)$ converge d'après la question 2.1.a. et la série $\sum_{n\geq 1} f_n'(x)$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$. On en déduit que F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $F'(x) = \sum_{n\geq 1} f_n'(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+x^2}$.

Exercice 3 : *(8 points)* **Séries entières**

On considère l'équation différentielle suivante $(\mathcal{E}) \begin{cases} (1+3x)y' + 6y = \dfrac{-3}{1+3x} \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

3.1. On suppose qu'il existe une solution y de $(\mathcal{E})$ développable en série entière, c'est-à-dire telle que $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec un rayon $R > 0$.

3.1.a. Calculer a_0.
D'après la deuxième équation de $(\mathcal{E})$, on obtient que $a_0 = 0$.

3.1.b. Développer le second membre $\frac{-3}{1+3x}$ en série entière et préciser son rayon.
On développe $\frac{-3}{1+3x} = (-3)\sum_{n\geq 0}(-3x)^n = \sum_{n\geq 0}(-3)^{n+1}x^n$. C'est une série entière de rayon $R = 1/3$.

3.1.c. Déterminer a_1 et montrer que pour $n \geq 1$, $(n+1)a_{n+1} + (3n+6)a_n = (-3)^{n+1}$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = n(-3)^n$.
Si $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, alors sur $]-R, R[$, $y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$. L'équation $(\mathcal{E})$ se réécrit alors $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 6\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-3)^{n+1}x^n$, c'est-à-dire $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + 3\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 6\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-3)^{n+1}x^n$. Or pour une série entière qui vérifie $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$, on a $b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ici on en déduit que $(n+1)a_{n+1} + (3n+6)a_n = (-3)^{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
En particulier pour $n = 0$, on trouve $a_1 + 6a_0 = -3$, ce qui donne avec la question 3.1.a., $a_1 = -3$.
La récurrence vient d'être vérifiée au rang 1.
On suppose qu'au rang n, on a bien $a_n = n(-3)^n$, on trouve alors au rang $n+1$ que

$$\begin{aligned}(n+1)a_{n+1} &= (-3)^{n+1} - (3n+6)a_n = (-3)^{n+1} - 3(n+2)n(-3)^n = (-3)^{n+1} + (n+2)n(-3)^{n+1} \\ &= (n^2+2n+1)(-3)^{n+1} = (n+1)^2(-3)^{n+1}\end{aligned}$$

et donc $a_{n+1} = (n+1)(-3)^{n+1}$. On conclut par récurrence que $a_n = n(-3)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
La série y est donc égale à $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(-3)^n x^n$.

3.1.d. Quel est le rayon de la série $y(x)$ ainsi calculée ?
On utilise le critère de d'Alembert, on trouve que $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} 3\frac{n+1}{n} = 3$, le rayon de convergence vaut donc $R = 1/3$.
3.2. On cherche une expression de y à l'aide des fonctions usuelles.
3.2.a. Donner le rayon de convergence et la somme de la série $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-3)^n x^n$.

C'est une série entière de rayon $R = 1/3$ qui vaut $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-3)^n x^n = \frac{1}{1+3x}$.
3.2.b. En citant le théorème utilisé, calculer la dérivée de g et en déduire que $y(x) = xg'(x)$.
On utilise le théorème de dérivation des séries entières : en tout point $x_0 \in]-R, R[$, la fonction somme f de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon R est dérivable et la dérivée f' est la somme de la série entière $\sum_{n\geq 1} na_n x^{n-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}}(n+1)a_{n+1}x^n$ de rayon de convergence R.
Donc ici, sur $]-1/3, 1/3[$, $g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(-3)^n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} n(-3)^n x^{n-1}$ et d'après la question 3.1.c., on a $y(x) = xg'(x)$.
3.2.c. Déduire de la question précédente une expression de y sous la forme d'une fraction rationnelle.
Or $g(x) = \frac{1}{1+3x}$, donc $g'(x) = -\frac{3}{(1+3x)^2}$ et $y(x) = -\frac{3x}{(1+3x)^2}$