PARTIEL D'ANALYSE

Deug MIAS 2ème année 14 Novembre 2003

Durée 2H. Aucun document autorisé.

1. Calculer les intégrales suivantes :

$$\text{a)} \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \text{ (1 pt)} \quad ; \quad \text{b)} \int_a^{+\infty} e^{-x}\, dx \ (a \in \mathbf{R}) \text{ (1 pt)}$$

$$\text{c)} \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} \ (a > 1) \text{ (poser } x = e^t \text{, 1,5 pt)}$$

$$\text{d)} \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x(x+r)} \ (a > 0,\ r > 0) \text{ (décomposer en éléments simples, 1,5 pt)}$$

2. a) Enoncer la première formule de la moyenne (1pt).

b) Soit $g : [0,1] \mapsto \mathbf{R}$ une fonction continue. Pour $x > 0$, on pose

$$G(x) = \frac{1}{x^3} \int_{\sin x}^{x} g(t)\, dt \ .$$

Calculer $\lim\limits_{x \to 0_+} G(x)$. (On pensera à développer $\sin x$ à l'ordre trois 3pt).

3. On définit la fonction $\Phi \ : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ en posant :

$$\Phi(x) = \int_x^{3x} \frac{dt}{\sqrt{t^2+7}} \ .$$

a) Rappeler l'énoncé du théorème fondamental du calcul intégral (1 pt).

b) Calculer $\Phi'(x)$ pour $x \in \mathbf{R}$, et déterminer les zéros de Φ' (2pt).

c) Calculer pour $x > 0$, $\displaystyle\int_x^{3x} \frac{dt}{t}$. En déduire le calcul de $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x)$ (3 pt).

d) La fonction Φ est-elle paire ou impaire ? Que vaut $\Phi'(0)$?
Tracer approximativement le graphe de Φ (2pt).

4. Soit $n > 1$ un entier fixé. On pose

$$A = \sqrt{\pi(n+1/2)} \int_{\pi(n+1/2)}^{2\pi(n-1/2)} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx \ .$$

a) Enoncer la deuxième formule de la moyenne (1 pt).

b) Etablir la majoration : $A \leq 1$ (2 pt).

Corrigé.

1. a) On a
$$\int_a^X \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_a^X = -\frac{1}{X} + \frac{1}{a}\ ,$$
donc
$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{X\to+\infty} \int_a^X \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a}\ .$$
b) On a
$$\int_a^X e^{-x}dx = \Big[-e^{-x}\Big]_a^X = -e^{-X} + e^{-a}\ ,$$
donc
$$\int_a^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{X\to+\infty} \int_a^X e^{-x}dx = e^{-a}\ .$$
c). En effectuant le changement de variable $x = e^t$, donc $dx = e^t\,dt$ on a $t = \ln a$ si $x = a$, et $t = \ln X$ si $x = X$, donc
$$\int_a^X \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \int_{\ln a}^{\ln X} \frac{e^t dt}{e^t t^2} = \int_{\ln a}^{\ln X} \frac{dt}{t^2}\ .$$
Ce qui donne
$$\int_a^X \frac{dx}{x(\ln x)^2} = -\frac{1}{\ln X} + \frac{1}{\ln a}\ .$$
Alors
$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{X\to+\infty} \int_a^X \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \frac{1}{\ln a}\ .$$
Remarque : on aurait pu remarquer également, puisque $1/x$ est la dérivée de $\ln x$, que $1/(x(\ln x)^2)$ est la dérivée de $-1/\ln x$.

d) La fraction rationnelle $\dfrac{1}{x(x+r)}$ se décompose sous la forme
$$\frac{1}{x(x+r)} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x+r}\ .$$
On a facilement
$$\frac{1}{x(x+r)} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+r}\right)\ .$$
Alors
$$\int_a^X \frac{dx}{x(x+r)} = \frac{1}{r}\left[\int_a^X \frac{dx}{x} - \int_a^X \frac{dx}{x+r}\right] = \frac{1}{r}\Big[\ln x - \ln(x+r)\Big]_a^X\ .$$

On obtient donc

$$\int_a^X \frac{dx}{x(x+r)} = \frac{1}{r}\left(\ln\frac{X}{X+r} - \ln\frac{a}{a+r}\right) .$$

Lorsque X tend vers l'infini, $\dfrac{X}{X+r}$ tend vers 1, et $\ln\dfrac{X}{X+r}$ vers 0. Donc

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x(x+r)} = \lim_{X\to+\infty}\int_a^X \frac{dx}{x(x+r)} = -\ln\frac{a}{a+r} = \ln\frac{a+r}{a} .$$

2. a) Soient f_1 et g_1 deux fonctions définies de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$. Si f_1 est continue sur $[a,b]$ et si g_1 est Riemann-intégrable et positive sur $[a,b]$, il existe c dans $[a,b]$ tel que

$$\int_a^b f_1(t)g_1(t)\,dt = f_1(c)\int_a^b g_1(t)\,dt .$$

b) On prend $f_1 = g$ et $g_1 = 1$ dans la formule précédente. Les fonctions satisfont bien aux conditions voulues. Par ailleurs, si $x \geq 0$, on a $\sin x \leq x$. Il existe alors $c(x)$ dans $[\sin x, x]$ tel que

$$G(x) = \frac{g(c(x))}{x^3}\int_{\sin x}^x dt = \frac{x-\sin x}{x^3}\,g(c(x)) .$$

Mais, au voisinage de 0, on a le développement limité

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3) .$$

donc

$$\frac{x-\sin x}{x^3} = \frac{1}{6} + \circ(1) .$$

Par ailleurs

$$\sin x \leq c(x) \leq x .$$

Donc il résulte du théorème d'encadrement que $c(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0, et comme g est continue en 0, $g(c(x))$ tend vers $g(0)$. Finalement

$$\lim_{x\to 0} G(x) = \frac{g(0)}{6} .$$

3. a) Soit f une fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$. On pose, si x et c sont dans $[a,b]$

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt .$$

Alors si f est continue en x, la fonction F est dérivable en x et $F'(x) = f(x)$.

b) Soit f définie par

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+7}} .$$

Si F est une primitive de f, on a

$$\Phi(x) = F(3x) - F(x)\ .$$

Donc en dérivant les fonctions composées.

$$\Phi'(x) = 3F'(3x) - F'(x) = 3f(3x) - f(x) = \frac{3}{\sqrt{9x^2+7}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+7}}\ ,$$

et finalement

$$\Phi'(x) = \frac{3\sqrt{x^2+7} - \sqrt{9x^2+7}}{\sqrt{x^2+7}\sqrt{9x^2+7}}\ .$$

Puisque la fonction racine carrée est croissante, $\Phi'(x)$ est du signe de

$$9(x^2+7) - (9x^2+7) = 56\ .$$

La fonction Φ' ne s'annule pas. Elle est strictement positive et donc Φ est croissante.

c) On a

$$\int_x^{3x} \frac{dt}{t} = \Big[\ln t\Big]_x^{3x} = \ln 3x - \ln x = \ln 3\ .$$

On peut écrire, si $x > 0$,

$$\Phi(x) = \int_x^{3x} \frac{t}{\sqrt{t^2+7}}\,\frac{dt}{t}\ .$$

Si l'on applique la première formule de la moyenne, il existe $c(x)$ dans $[\,x, 3x\,]$ tel que

$$\Phi(x) = \frac{c(x)}{\sqrt{c(x)^2+7}} \int_x^{3x} \frac{dt}{t} = \ln 3\,\frac{c(x)}{\sqrt{c(x)^2+7}}\ .$$

Mais, puisque $c(x) \geq x$, on en déduit que $c(x)$ tend vers $+\infty$ avec x. Alors, puisque

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{c(x)}{\sqrt{c(x)^2+7}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+7/c(x)^2}} = 1\ ,$$

on en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = \ln 3\ .$$

La courbe représentative de Φ a donc une asymptote horizontale à $+\infty$.

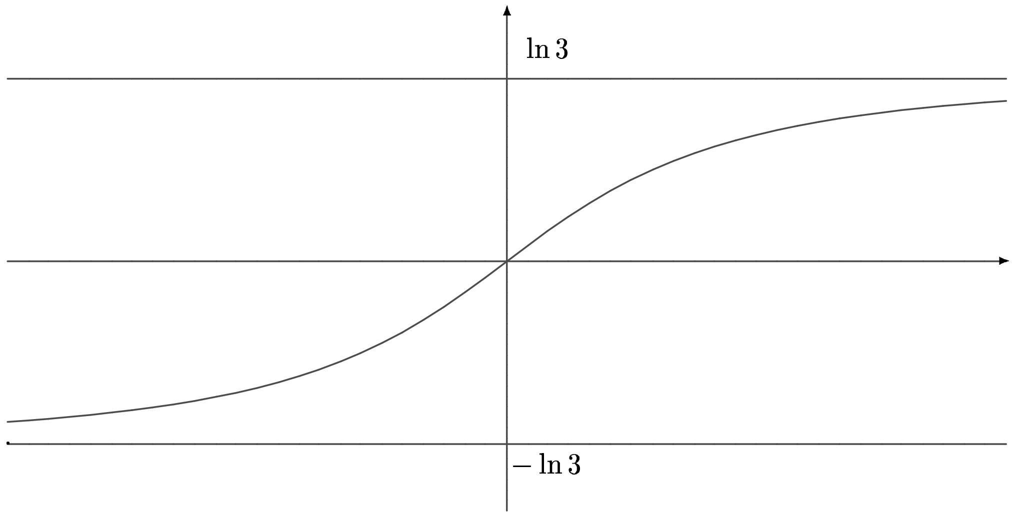
d) Calculons $\Phi(-x)$ en effectuant le changement de variable $u = -t$. On a $dt = -du$ et $t^2 = u^2$, d'où

$$\Phi(-x) = \int_{-x}^{-3x} \frac{dt}{\sqrt{t^2+7}} = \int_x^{3x} \frac{-du}{\sqrt{u^2+7}} = -\Phi(x)\ .$$

La fonction Φ est donc impaire et sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine.

On a $\Phi(0) = 0$ et $\Phi'(0) = \dfrac{3}{\sqrt{7}} - \dfrac{1}{\sqrt{7}} = \dfrac{2}{\sqrt{7}}$.

On a le graphe suivant :



Remarque : on peut calculer explicitement Φ. En effet, en effectuant le changement de variable $u = t/\sqrt{7}$, on obtient

$$\Phi(x) = \int_{x/\sqrt{7}}^{3x/\sqrt{7}} \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} .$$

Donc

$$\Phi(x) = \operatorname{argsh}(3x/\sqrt{7}) - \operatorname{argsh}(x/\sqrt{7}) ,$$

ou encore, en remplaçant $\operatorname{argsh} x$ par sa valeur $\ln(x + \sqrt{x^2+1})$,

$$\Phi(x) = \ln \frac{3x + \sqrt{9x^2+7}}{x + \sqrt{x^2+7}} .$$

4. a) Soient f et g deux fonctions définies de $[\,a,b\,]$ dans $\mathbf{R}$. Si f est décroissante positive sur $[\,a,b\,]$ et si g est Riemann-intégrable sur $[\,a,b\,]$, il existe c dans $[\,a,b\,]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(a_+) \int_a^c g(t)\,dt .$$

b) En appliquant la formule précédente avec

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad g(x) = \sin x ,$$

ce qui est licite puisque f est décroissante positive, et g est continue donc Riemann-intégrable, il existe c dans $[\,\pi(n+1/2), 2\pi(n-1/2)\,]$ tel que

$$A = \sqrt{\pi(n+1/2)}\,\frac{1}{\sqrt{\pi(n+1/2)}} \int_{\pi(n+1/2)}^{c} \sin x\,dx = -\cos c + \cos \pi(n+1/2) .$$

Mais

$$\cos \pi(n+1/2) = \cos(n\pi + \pi/2) = 0 ,$$

donc

$$A = -\cos c \leq 1 .$$