**EPREUVE D'ANALYSE**

**Deug MIAS 2ème année** Janvier 2004

*Durée 3H*

1. Pour $n \geq 1$, on pose

$$u_n = \frac{\ln(1+n^\alpha)}{n^\beta} \ .$$

Déterminer les couples $(\alpha,\beta) \in \mathbf{R}^2$ pour lesquels la série numérique $\sum u_n$ est convergente (on étudiera séparément les cas $\alpha < 0$, $\alpha = 0$ et $\alpha > 0$). Représenter le résultat sur un dessin. (4 p)

2. a) Soit $a \in \mathbf{C}$, avec $|a| < 1$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^n$. (0,5 p)

b) Rappeler l'énoncé du théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions de classe $\mathrm{C}^1$. (1,5 p)

c) On pose $I = ]\,0, +\infty\,[$ et, pour $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n} \ .$$

Montrer que $f$ est $\mathrm{C}^1$ sur $I$, et calculer $f'(x)$ à l'aide des questions a) et b). En déduire que $f$ est de la forme : $f(x) = -\ln(1-e^{-x}) + C$, où $C$ est une constante. (3,5 p)

d) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ (à l'aide de la question a) par exemple). En déduire la caleur de $C$. (1,5 p)

3. a) Rappeler le règle d'Abel pour la convergence uniforme des séries de fonctions. (1 p)

b) En déduire la continuité sur $]\,0, 2\pi\,[$ de la fonction $g$ définie par

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n+\ln(n+x)} \ .$$

On pourra écrire

$$\frac{1}{n+\ln(n+x)} = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+\ln(n+x)}\right).$$(4 p)

4. a) On considère la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2} \ .$$

a) Rappeler la définition d'une série alternée et le résultat qui permet de majorer le reste d'une telle série. (1 p)

b) Montrer que $\Phi$ est continue sur $\mathbf{R}$ et que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x)dx$ est convergente. (3 p)

## Corrigé

1. Cherchons un équivalent de $u_n$.

Lorsque $\alpha < 0$, la suite $(n^\alpha)$ converge vers zéro, et donc

$$\ln(1+n^\alpha) \sim n^\alpha \ .$$

Alors

$$u_n \sim \frac{1}{n^{\beta-\alpha}} \ ,$$

et il résulte du critère de Riemann que la série de terme général $u_n$ converge si et seulement si $\beta - \alpha > 1$.

Lorsque $\alpha = 0$, on a

$$u_n = \frac{\ln 2}{n^\beta} \ ,$$

et il résulte du critère de Riemann que la série de terme général $u_n$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

Lorsque $\alpha > 0$, on a

$$\begin{aligned} \ln(1+n^\alpha) &= \ln[n^\alpha(1+n^{-\alpha})] \\ &= \alpha \ln n + \ln(1+n^{-\alpha}) \\ &= \alpha \ln n \left(1 + \frac{\ln(1+n^{-\alpha})}{\alpha \ln n}\right) \ . \end{aligned}$$

Alors, puisque l'expression entre parenthèses tend vers 1, on a

$$\ln(1+n^\alpha) \sim \alpha \ln n \ .$$

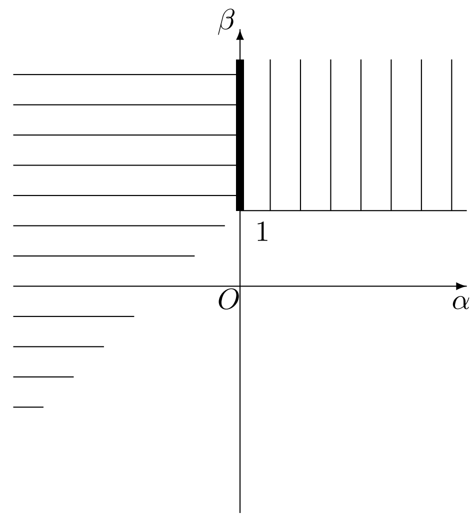
Puis

$$u_n \sim \frac{\alpha \ln n}{n^\beta} \ .$$

Or la série de terme général $\ln n/n^\beta$ converge si et seulement si $\beta > 1$. Il en est donc de même de la série de terme général $u_n$. On a le tableau suivant :

| | $u_n \sim$ | $\sum u_n$ CV $\Leftrightarrow$ | zone |
|---|---|---|---|
| $\alpha < 0$ | $\dfrac{1}{n^{\beta-\alpha}}$ | $\beta > 1+\alpha$ | $\boxed{1}$ |
| $\alpha = 0$ | $\dfrac{\ln 2}{n^\beta}$ | $\beta > 1$ | $\boxed{2}$ |
| $\alpha > 0$ | $\dfrac{\alpha \ln n}{n^\beta}$ | $\beta > 1$ | $\boxed{3}$ |

Dans le plan rapporté au repère $(O,\alpha,\beta)$, l'ensemble des couples pour lesquels la série converge est la réunion des trois zones suivantes (demi-droites du bord inférieur exclues) :
zone $\boxed{1}$, traits horizontaux
zone $\boxed{2}$, trait gras
zone $\boxed{3}$, traits verticaux




2. a) Si $a \neq 1$, on a

$$\sum_{n=1}^{N} a^n = a \sum_{n=0}^{N-1} a^n = a\, \frac{1-a^N}{1-a} \ .$$

Donc

$$\sum_{n=1}^{N} a^n = \frac{a-a^{N+1}}{1-a} \ .$$

Alors, si $|a| < 1$, la suite $(a^{N+1})$ converge vers zéro, et l'on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n = \frac{a}{1-a} \ .$$

b) Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions de classe $\mathrm{C}^1$ sur $I$. On suppose
(i) qu'il existe $c$ dans $I$ tel que la série de terme général $u_n(c)$ converge.
(ii) que la série de terme général $u_n'(x)$ converge (localement) uniformément sur $I$.
Alors
(iii) la série de terme général $u_n(x)$ converge (localement) uniformément sur $I$.
(iv) la fonction $S$ définie par

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \ ,$$

est de classe $\mathrm{C}^1$ sur $I$ et

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \ .$$

c) Posons, si $x > 0$,

$$u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n} \ .$$

Cette fonction est de classe $\mathrm{C}^1$ sur $\,]\,0, +\infty\,[\,$.

Soit $a > 0$. Tout d'abord

$$0 \leq u_n(a) \leq e^{-na} \ ,$$

et puisque $0 < e^{-a} < 1$, la série géométrique de terme général $e^{-na}$ converge. Il résulte alors du critère de comparaison que la série de terme général $u_n(a)$ converge également.
(On peut aussi utiliser la règle de d'Alembert. En effet

$$\frac{u_{n+1}(a)}{u_n(a)} = \frac{n}{n+1}\, e^{-a} \ ,$$

et cette suite converge vers $e^{-a} < 1$ donc la série de terme général $u_n(a)$ converge bien).

Si $x$ appartient à l'intervalle $\,[\,a, +\infty\,[\,$, la fonction $u_n$ est de classe $\mathrm{C}^1$ sur $\,[\,a, +\infty\,[\,$, et

$$u_n'(x) = -e^{-nx} \ ,$$

et donc

$$|u_n'(x)| = e^{-nx} \leq e^{-na} \ .$$

Comme la série géométrique de terme général $e^{-na}$ converge, il en résulte que la série de terme général $u_n'(x)$ converge normalement, donc uniformément sur $\,[\,a, +\infty\,[\,$. Alors les conditions (i) et (ii) sont vérifiées, et la fonction définie par

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \ ,$$

est de classe $\mathrm{C}^1$ sur $\,[\,a, +\infty\,[\,$. Comme ceci est vrai pour tout $a$ tel que $0 < a \leq 1$, la fonction $S$ est de classe $\mathrm{C}^1$ sur $I$, et

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-e^{-nx}) = -\sum_{n=1}^{\infty} (e^{-x})^n \ .$$

Donc, en appliquant a),

$$S'(x) = -\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \ .$$

Si l'on pose

$$u(x) = 1 - e^{-x} \ ,$$

on a alors

$$S'(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)} \ ,$$

et le membre de droite est la dérivée de la fonction $h$ définie par

$$h(x) = -\ln u(x) = -\ln(1 - e^{-x}) \ ,$$

Les fonctions $S$ et $h$ sont donc égales sur $I$ à une constante $C$ près, et

$$S(x) = -\ln(1 - e^{-x}) + C \ .$$

d) En utilisant les inégalités

$$0 \leq \frac{e^{-nx}}{n} \leq e^{-nx} \ ,$$

on obtient

$$0 \leq S(x) \leq -S'(x) \ .$$

Enfin

$$\lim_{x\to+\infty} (-S'(x)) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = 0 \ .$$

Il résulte du théorème d'encadrement que $S(x)$ admet une limite et que cette limite est nulle.

Alors

$$\lim_{x\to+\infty} S(x) = \lim_{x\to+\infty} (-\ln(1-e^{-x}) + C) = C \ .$$

On en déduit que $C = 0$ et que, si $x > 0$,

$$S(x) = -\ln(1-e^{-x}) \ .$$

3. a) Soit $(a_n)$ une suite numérique décroissante et de limite nulle, et soit $(v_n)$ une suite de fonctions de $I$ dans $\mathbf{C}$, vérifiant la propriété suivante : il existe un nombre $M$, tel que, quels que soient $x \in I$ et $N \geq 1$, on ait

$$\left|\sum_{n=1}^{N} v_n(x)\right| \leq M \ .$$

Alors la série de terme général $a_n v_n(x)$ converge uniformément sur $I$.

b) Posons $a_n = 1/n$, et pour $x \in ]\,0, 2\pi\,[$, soit $v_n$ et $h_n$ définies par

$$v_n(x) = e^{inx} \quad \text{et} \quad h_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+\ln(n+x)} \ .$$

Ces fonctions sont continues sur $]\,0, 2\pi\,[$. On a alors

$$\frac{e^{inx}}{n+\ln(n+x)} = a_n v_n(x) - h_n(x) e^{inx} \ ,$$

et l'on étudie la convergence uniforme des deux séries dont le terme général apparaît dans le membre de droite.

(1) Pour la série de terme général $a_n v_n(x)$ on peut utiliser la règle d'Abel en se plaçant sur l'intervalle $[\,\delta, 2\pi-\delta\,]$, où $0 < \delta < \pi$.

La suite $(a_n)$ est décroissante et converge vers zéro. Par ailleurs (comme dans l'exercice 2 a)

$$\sum_{n=1}^{N} e^{inx} = \frac{e^{ix} - e^{i(N+1)x}}{1-e^{ix}} \ .$$

Donc

$$\left|\sum_{n=1}^{N} e^{inx}\right| = \frac{|e^{ix} - e^{i(N+1)x}|}{|1-e^{ix}|} \ .$$

Tout d'abord, par l'inégalité triangulaire,

$$|e^{ix} - e^{i(N+1)x}| \leq |e^{ix}| + |e^{i(N+1)x}| = 2 \ .$$

D'autre part, puisque

$$1 - e^{ix} = e^{ix/2}(e^{-ix/2} - e^{ix/2}) = -2e^{ix/2} i \sin \frac{x}{2} ,$$

on a

$$|1 - e^{ix}| = 2 \left| \sin \frac{x}{2} \right| ,$$

et puisque $x/2$ appartient à l'intervalle $[\,\delta/2, \pi - \delta/2\,]$, la valeur la plus petite du sinus sur cet intervalle est atteinte en $\delta/2$. Alors

$$|1 - e^{ix}| \geq 2 \sin \frac{\delta}{2} .$$

Finalement

$$\left| \sum_{n=1}^{N} e^{inx} \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}} .$$

Si l'on appelle $M$ le membre de droite, on a bien une majoration indépendante de $N$ et de $x$, et il résulte de la règle d'Abel que la série de terme général $a_n v_n(x)$ est une série de fonctions continues sur $[\,\delta, \pi - \delta\,]$ qui converge uniformément sur $[\,\delta, \pi - \delta\,]$. Sa somme est donc une fonction continue sur cet intervalle, et comme ceci est vrai pour tout $\delta$ tel que $0 < \delta < \pi$, la somme de cette série sera continue sur $]\,0, 2\pi\,[$.

(2) On a

$$h_n(x) = \frac{\ln(n + x)}{n(n + \ln(n + x))} .$$

Donc, puisque la fonction ln est croissante, et que $\ln(n + x) \geq 0$, on obtient, si $x \in ]\,0, 2\pi\,[$,

$$|h_n(x) e^{inx}| = h_n(x) \leq \frac{\ln(n + 2\pi)}{n^2} .$$

Le membre de droite s'écrit

$$\frac{\ln(n + 2\pi)}{n^2} = \frac{\ln n}{n^2} \left( 1 + \frac{\ln\left(\frac{2\pi}{n} + 1\right)}{\ln n} \right) ,$$

et donc, puisque l'expression entre parenthèses tend vers 1,

$$\frac{\ln(n + 2\pi)}{n^2} \sim \frac{\ln n}{n^2} .$$

Comme la série de terme général $\ln n/n^2$ converge, il en sera de même de la série de terme général $(\ln(n + 2\pi))/n^2$, et la série de terme général $h_n(x)e^{inx}$ est une série de fonctions continues sur $]\,0, 2\pi\,[$ qui converge normalement, donc uniformément sur $]\,0, 2\pi\,[$. Alors la somme de cette série est continue sur $]\,0, 2\pi\,[$.

Finalement $g$ est somme de deux fonctions continues sur $]\,0, 2\pi\,[$, donc est continue sur cet intervalle.

4. a) Si $(a_n)$ est une suite décroissante de limite nulle, alors la série de terme général $(-1)^n a_n$ est dite alternée. Une telle série converge et, si $N \geq 0$,

$$|R_N| = \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n a_n \right| \leq a_{N+1} .$$

b) Soit la fonction $a_n$ définie, pour $x$ réel, par

$$a_n(x) = \frac{1}{n + x^2} \ .$$

C'est une fonction continue sur $\mathbf{R}$. Pour $x$ fixé la suite $(a_n(x))$ est une suite décroissante de limite nulle. On a donc

$$|R_N(x)| \leq a_{N+1}(x) \leq \frac{1}{N+1} \ .$$

Comme $(1/(N+1))$ est une suite de limite nulle qui ne dépend pas de $x$, il en résulte que la suite $(R_N(x))$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbf{R}$, et donc que la série de terme général $(-1)^n a_n(x)$ est une série de fonctions continues sur $\mathbf{R}$ qui converge uniformément sur $\mathbf{R}$. Par suite $\Phi$ est continue sur $\mathbf{R}$.

On a en particulier, en prenant $N = 0$

$$|R_0(x)| = |\Phi(x)| \leq a_1(x) = \frac{1}{1 + x^2} \ .$$

Mais l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ est convergente. Cela peut se démontrer soit en la calculant explicitement (elle vaut $[\arctan x]_{-\infty}^{+\infty} = \pi$), soit en disant que, à $\pm\infty$

$$\frac{1}{1+x^2} \sim \frac{1}{x^2} \ ,$$

et l'on sait que les intégrales $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}$ convergent.

Alors le critère de comparaison pour les intégrales montre que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x)dx$ converge également.