Exercices sur les séries numériques

Déterminer la nature des séries numériques suivantes :

I.

$a\,/\ \sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$ $b\,/\ \sum_{n\geq 0}\frac{n^2}{n^3+1}$ $c\,/\ \sum_{n\geq 0}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ $d\,/\ \sum_{n\geq 0}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ $e\,/\ \sum_{n\geq 2}\frac{1}{(\ln(n))^n}$ $f\,/\ \sum_{n\geq 2}\frac{1}{\ln(n^2+n+1)}$

$g\,/\ \sum_{n\geq 0}\frac{n^2}{(n+\delta)^n}\quad |\delta|<\frac{1}{2}$ $h\,/\ \sum_{n\geq 0}\frac{1+2+...+n}{1^2+2^2+...+n^2}$ $i\,/\ \sum_{n\geq 1}(1\text{-}\cos\frac{1}{n})$ $j\,/\ \sum_{n\geq 0}2^{-\sqrt{n}}$

$k\,/\ \sum_{n\geq 1}(e^{\frac{1}{n}}-e^{\frac{1}{n+a}})\quad a>0$ $l\,/\ \sum_{n\geq 1}(\sqrt[n]{\frac{n}{n+1}}-1)$

II.

Etudier la nature des séries numériques suivantes dont les termes génraux sont :

$1/u_n=\left(\frac{2n+1}{3n+4}\right)^n$; $2/u_n=\left(\frac{an}{n+1}\right)^{n^2}\ a>0$; $3/u_n=\left(1+\frac{a}{n}\right)^{-n^2}\ a\ réel$;

$4/u_n=\frac{a^n}{(1+a)(1+a)^2...(1+a)^n}\quad a>0$;

$5/\ u_n=an\ln(1+\frac{1}{n})-b\cos(\frac{1}{n})+c\sin(\frac{1}{n})\quad a,b,c\ réels$;

$6/u_n=(-1)^n(\sqrt{n^2+1}-n)$; $7/u_n=\frac{1}{n^2+1}\left[(-1)^n n+k\right]\quad k\ réel$;

$8/u_n=\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sin x}{1+ch^2x}dx$; $9/u_n=\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{\sin x}{1+x^2}dx$;

$10/u_n=\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}\right)^n$; $11/u_n=(-1)^n(\tan\frac{1}{\sqrt{n}}-\sin\frac{1}{\sqrt{n}})$; $12/\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cos\frac{1}{n}$;

$13/u_n=\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n^a}\right]\quad a>0$; $14/u_n=(-1)^n\frac{\sqrt{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}+(-1)^n}$;

$15/u_n=\sin\left[\pi\sqrt{n^2+1}\right]$; $16/u_n=\cos\left[\pi\sqrt{n^2+n+1}\right]$.

$16/u_n=\ln(n)+a\ln(n+2)+b\ln(n+3)$.

III.

a/ $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n,\quad u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-x}\sin x\,dx\quad (indication : poser\ t=x-n\pi)$.

A. El Caidi

b/ $\sum_{n\geq 2} u_n$, $\quad u_n = \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

c/ $\sum_{n\geq 2} u_n$, $\quad u_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$.

d/ $\sum u_n$, $\quad u_n = \sin\left(\frac{1}{n}+n\right)\pi$.

e/ $\sum u_n$, $\quad u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

f/ Soient $\alpha > 0$ et la suite numérique u_n définie par $u_n = \frac{(-1)^n}{\alpha n+1}$.

1. Montrer que la série numérique de terme général u_n est convergente et que:

$$\sum_{n\geq 0} u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha}.$$

En déduire : $\quad \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2,\qquad \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4},\qquad \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{1}{3}(\ln 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}).$

<u>Commentaire</u> *: Cet exercice a pour objectif d'étudier une série numérique alternée. Grâce à une expression de sa somme, on retrouve quelques résultats classiques*

IV.

Séries de Bertrand

Soient α et β deux réels

Le but de cet exercice est d'étudier les séries numériques $\sum_{n\geq 2} u_n$ avec $u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$.

1) Etude du cas $\alpha > 1$. On pose $\gamma = \frac{1+\alpha}{2}$.

Démontrer : $\quad u_n = O(\frac{1}{n^\gamma})$

En déduire la nature de la série de Bertrand dans ce cas.

2) Etude du cas $\alpha < 1$.

En déduire la nature de série de Bertrand dans ce cas.

3) Etude du cas $\alpha = 1$.

a) On considére le fonction $f_\beta : t \mapsto \frac{1}{t(\ln(t))^\beta}$ sur $]1,+\infty[$

Démontrer : $\quad \exists\ n_0 \in \mathbb{N},\ f_\beta$ décroissante sur $]\ n_0, +\infty[$

b) On suppose $\beta = 1$. En comparant avec une intégrale, démontrer que la série de Bertrand diverge.

c) On suppose $\beta > 1$. En comparant avec une intégrale, démontrer que la série de Bertrand converge.

d) Etudier le cas $\beta < 1$.

Commentaire : *Cet exercice classique traite des séries de Bertrand. Il a l'avantage, d'utiliser diverses méthodes pour étudier une série numérique (comparaison avec une série numérique, comparaison avec une intégrale).*

Solutions

I.

a / On a $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}} \sim \dfrac{1}{n^{3/2}}$, la série $\sum \dfrac{1}{n^{3/2}}$ est convergente (série de Riemann avec $\alpha = \dfrac{3}{2} > 1$), on en déduit que la série $\sum u_n$ est convergente (critère d'équivalence)

b / Critère de D'Alembert : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2} = \left[\dfrac{(n+1)!}{n!}\right]^2 \dfrac{(2n)!}{(2n+2)!}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} (n+1)^2 \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{4n+2} = \frac{1}{4} < 1,$$

la série est donc convergente.

c / Critère de D'Alembert : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}}\dfrac{2^{n^2}}{(n!)^2} = \left[\dfrac{(n+1)!}{n!}\right]^2 \dfrac{2^{n^2}}{2^{(n+1)^2}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)^2 \dfrac{1}{2^{2n+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)^2}{e^{(2n+1)\ln 2}} = 0 < 1$, la série est donc convergente.

d / La série est à termes positifs, on peut donc appliquer le critère d'équivalence :

on a $u_n = \dfrac{n^2}{n^3+1} \sim \dfrac{1}{n}$, la série harmonique $\sum \dfrac{1}{n}$ est divergente, donc la série $\sum u_n$ est divergente.

e / Critère de D'Alembert : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(\ln(n))^n}{(\ln(n+1))^{n+1}} = \left[\dfrac{\ln(n)}{\ln(n+1))}\right]^n . \dfrac{1}{\ln(n+1)}$

on a : $\quad 0 \le \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \le \dfrac{1}{\ln(n+1)} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1$, la série est donc convergente.

f / $\ln(n^2+n+1) = \ln\left[n^2(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2})\right] = 2\ln(n) + \ln(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2})$

considérons $v_n = \dfrac{1}{2\ln(n)}$, on a $\dfrac{v_n}{u_n} = \dfrac{\ln(n^2+n+1)}{2\ln(n)} = 1 + \dfrac{\ln(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}{2\ln(n)} \Rightarrow u_n \sim v_n$,

comme $\ln x < x$ pour $x > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{2\ln(n)} > \dfrac{1}{2n}$, la série $\sum \dfrac{1}{2n}$ est divergente, il en est de même pour la série $\sum v_n$ (critère de comparaison) et donc la série $\sum u_n$ est divergente (critère d'équivalence).

$$g\,/\ \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)^2}{(1+\delta)^{n+1}}.\frac{(1+\delta)^n}{n^2}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2.\frac{1}{1+\delta},\ d\,'où\ \lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+\delta}.$$

$$*\ Si\ -\frac{1}{2}<\delta<0\Rightarrow\frac{1}{2}<\delta+1<1\Rightarrow\frac{1}{1+\delta}>1\Rightarrow\sum u_n\ est\ divergente.$$

$$*\ Si\ \ 0<\delta<\frac{1}{2}\Rightarrow\delta+1>1\Rightarrow\frac{1}{1+\delta}<1\Rightarrow\sum u_n\ est\ convergente.$$

$$*\ Si\ \ \delta=0\Rightarrow u_n=n^2\ ne\ tend\ pas\ vers\ 0\ et\ la\ série\ est\ donc\ divergente.$$

$$h\,/On\,a:\ 1+2+3+\ ...+n=\frac{n(n+1)}{2}\ et\ 1^2+2^2+3^2+...n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$u_n=\frac{1+2+3+\ ...+n}{1^2+2^2+3^2+...n^2}=\frac{3}{2n+1}\sim\frac{3}{2n},\ comme\ \sum\frac{3}{2n}=\frac{3}{2}\sum\frac{1}{n}est\ divergente\ alors$$

$\sum u_n$ *est divergente (critère d'équivalence).*

$$i\,/u_n=1-\cos\frac{1}{n},\ on\,a\,au\,V_0:\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)d\,'où\,u_n=1-\cos\frac{1}{n}=1-\left(1-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})\right)\sim\frac{1}{2n^2},$$

la série $\frac{1}{2}\sum\frac{1}{n^2}$ *est convergente (série de Riemann) d'où* $\sum u_n$ *est convergente (critère d'équivalence).*

$$j\,)\,u_n=2^{-\sqrt{n}}=e^{-\sqrt{n}\ln 2},\ on\,a\ \lim_{n\to+\infty}n^2e^{-\sqrt{n}\ln 2}=0\Rightarrow\exists N:n>N,\ e^{-\sqrt{n}\ln 2}\le 1,$$

d'où $\qquad u_n=2^{-\sqrt{n}}<\frac{1}{n^2}$ *pour n assez grand.*

La série $\sum\frac{1}{n^2}$ *est convergente (série de Riemann) d'où* $\sum u_n$ *est convergente (critère de comparaison).*

$$On\ a\ \ \frac{1}{n+a}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{a}{n}}=\frac{1}{n}\left(1-\frac{a}{n}+o(\frac{1}{n})\right)=\frac{1}{n}-\frac{a}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})$$

$$d\,'où\ e^{\frac{1}{n+a}}=1+\left(\frac{1}{n}-\frac{a}{n^2}\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{n}-\frac{a}{n^2}\right)^2+o(\frac{1}{n^2})=1+\frac{1}{n}-\frac{a}{n^2}+\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})$$

$$e^{\frac{1}{n}}=1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2}),\ on\,a\,finalement\ u_n=e^{\frac{1}{n+a}}-e^{\frac{1}{n}}=\frac{a}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})\sim\frac{a}{n^2}.$$

Comme $\sum\frac{1}{n^2}$ *est convergente (série de Riemann)* $\Rightarrow\sum u_n$ *est convergente (critère d'équivalence).*

Remarquons que $u_n < 0\ \forall n$,

on a $\sqrt[n]{\dfrac{n}{n+1}} = e^{-\frac{1}{n}\ln(1+\frac{1}{n})} = e^{-\frac{1}{n}(\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n}))} = e^{-\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})} = 1-\dfrac{1}{n^2}+o(\dfrac{1}{n^2})$,

d'où $u_n = -\dfrac{1}{n^2}+o(\dfrac{1}{n^2}) \sim -\dfrac{1}{n^2}$.

Comme $\sum -\dfrac{1}{n^2}$ est convergente (série de Riemann) $\Rightarrow \sum u_n$ est convergente (critère d'équivalence).

II.

1/ La série est à termes positifs, en appliquant le critère de Cauchy :

$$\sqrt[n]{u_n} = (u_n)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{2n+1}{3n+4}\right) \to \frac{2}{3} < 1,$$

donc la série $\sum u_n$ est CV.

2/ La série est à termes positifs, en appliquant le critère de Cauchy :

$$\sqrt[n]{u_n} = (u_n)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{an}{n+1}\right)^n = \left(\frac{a}{1+1/n}\right)^n \to a^n,$$

donc $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers :

$$\begin{cases} 0 & \text{si } a<1 \quad \text{la série } \sum u_n \text{ est CV} \\ \dfrac{1}{e} & \text{si } a=1 \quad \text{la série } \sum u_n \text{ est CV} \\ +\infty & \text{si } a>1 \quad \text{la série } \sum u_n \text{ est DV}. \end{cases}$$

3/ La série est à termes positifs, en appliquant le critère de Cauchy :

$$\sqrt[n]{u_n} = (u_n)^{\frac{1}{n}} = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} \to e^{-x}$$

$$\begin{cases} \text{la série } \sum u_n \text{ est CV} & \text{si } x>0 \\ \text{la série } \sum u_n \text{ est DV} & \text{si } x<0 \end{cases}$$

si $x=0$ $u_n = 1$ et le terme général ne tend pas vers 0

la série $\sum u_n$ est DV.

A. El Caidi

4 / *La série est à termes positifs, en appliquant le critère de d'Alembert :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{(1+a)^{n+1}} \to 0 \ \ quand\ \ n \to +\infty$$

la série $\sum u_n$ *est CV .*

5 / *La série est de signe* constant

quand $n \to +\infty,\ \ \dfrac{1}{n} \to 0$, *d'où*

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$u_n = (a-b) + (c - \frac{a}{2})\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\begin{cases} si\ \ a \neq b,\ u_n\ ne\ tend\ \ pas\ vers\ \ 0\ et\ \ la\ série\ \ \sum u_n\ est\ \ DV \\ si\ \ a = b\ \ et\ \ c \neq \dfrac{a}{2},\ u_n \sim (c - \dfrac{a}{2})\dfrac{1}{n},\ la\ série\ harmonique\ est\ \ DV\ \ et\ donc\ \sum u_n\ est\ \ DV \\ si\ a = b = 2c\ \ alors\ \ u_n \sim o\left(\dfrac{1}{n^2}\right),\ la\ série\ \sum \dfrac{1}{n^2}\ est\ \ CV\ \ et\ donc\ \sum u_n\ est\ \ CV \end{cases}$$

6 / *Série alternée,* $u_n = (-1)^n v_n$

$$v_n = \sqrt{n^2+1} - n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} \to 0$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} = v_n \Rightarrow (v_n)\ est\ \ décroissante,\ donc\ \sum u_n\ est\ \ CV\ .$$

Remarquons que $\sum u_n$ *n'est pas absolument CV* $(|u_n| = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} \sim \dfrac{1}{2n})$.

$$7 /\ u_n = \frac{(-1)^n n}{n^2+1} + \frac{k}{n^2+1} = v_n + w_n$$

$$v_n = \frac{(-1)^n n}{n^2+1},\ \sum v_n\ série\ \ alternée\ \ avec\ \ \frac{n}{n^2+1} \to 0\ en\ \ décroissant\ \ donc\ \sum v_n\ est\ \ CV\ ,$$

$$w_n = \frac{k}{n^2+1} \sim \frac{1}{n^2},\ la\ \ série\ \sum \frac{1}{n^2}\ est\ \ CV\ (série\ \ de\ \ Riemann),\ donc\ \sum w_n\ \ est\ \ CV\ ,$$

la série $\sum u_n$ *est CV car somme de deux séries CV .*

8/ *La série est à termes positifs*

$$0 \le u_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sin x}{1+ch^2 x}dx \le \int_0^{\frac{1}{n}} \sin x dx \le \int_0^{\frac{1}{n}} x dx = \frac{1}{2n^2}$$

$\sum \frac{1}{n^2}$ *est une série CV* $\Rightarrow \sum u_n$ *est CV (critère de comparaison)*

9/ $n \in \mathbb{N}^*$ *alors pour* $x \in \left[0, \frac{\pi}{n}\right] \subset [0, \pi]$ *et* $\frac{1}{1+\pi^2} \le \frac{1}{1+x^2} \le 1$

$$0 \le \frac{1}{1+\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin x dx \le u_n \le \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin x dx = 1-\cos\frac{\pi}{n} \sim \frac{\pi^2}{2n^2}$$

$\sum \frac{\pi^2}{2n^2}$ *est CV* $\Rightarrow \sum u_n$ *est CV (critère d'équivalence).*

10/ $u_n = e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = e^{-n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\sqrt{n}+\frac{1}{2}+o(1)} \sim \frac{\sqrt{e}}{e^{\sqrt{n}}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\frac{\sqrt{e}}{e^{\sqrt{n}}} = 0 \Rightarrow n^2\frac{\sqrt{e}}{e^{\sqrt{n}}} \le 1$ *à partir d'un certain rang* $\Rightarrow \frac{\sqrt{e}}{e^{\sqrt{n}}} \le \frac{1}{n^2}$

$\sum \frac{1}{n^2}$ *est CV* $\Rightarrow \sum \frac{\sqrt{e}}{e^{\sqrt{n}}}$ *est CV (critère de comparaison)*

d'où $\sum u_n$ *est CV (critère d'équivalence).*

11/ $\sin\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1/2}} - \frac{1}{n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$

$\tan\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1/2}} + \frac{1}{2n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$

$|u_n| \sim \frac{1}{2n^{3/2}}$, $\sum \frac{1}{2n^{3/2}}$ *est CV* $\Rightarrow \sum u_n$ *est absolument CV donc CV.*

12/ $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cos\frac{1}{n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$

$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *est CV (série alternée avec* $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ *en décroissant*

donc $\sum u_n$ *est CV.*

13/ $u_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^a}\right) = \frac{(-1)^n}{n^a} + v_n$ *avec* $v_n \sim \frac{1}{2n^{2a}}$

$\sum \frac{(-1)^n}{n^a}$ *série altérnée CV* $\left(\frac{1}{n^a} \to 0\right.$ *en décroissant)*

donc la série $\sum u_n$ *est CV si* $a > \frac{1}{2}$.

A. El Caidi

$$14/\ u_n = (-1)^n \frac{\sqrt{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}+(-1)^n} = (-1)^n \frac{\sqrt{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)}$$

$$u_n = (-1)^n\left[\frac{1}{n^{1/2}}+o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right]\left[1-\frac{(-1)^n}{n^{1/2}}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

la série $\sum u_n$ *est somme d'une série CV et une série DV elle est donc DV .*

$$u_n = \sin\left[n\pi\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right] = \sin\left[n\pi(1+\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^4})\right] = \sin\left[n\pi+\frac{\pi}{2n}+o(\frac{1}{n^3})\right]$$

$$u_n = (-1)^n\sin\left[\frac{\pi}{2n}+o(\frac{1}{n^3})\right] = (-1)^n\left[\frac{\pi}{2n}+o(\frac{1}{n^3})\right] = \frac{(-1)^n\pi}{2n}+o(\frac{1}{n^3})$$

la série $\sum u_n$ *est somme de deux séries CV est CV .*

$$v_n = \cos\left[n\pi(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})^{1/2}\right] = \cos\left[n\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{8n}+o(\frac{1}{n^2})\right]$$

$$v_n = (-1)^{n+1}\sin\left[\frac{3\pi}{8n}+o(\frac{1}{n^2})\right] = \frac{(-1)^{n+1}\pi}{8n}+o(\frac{1}{n^3})$$

la série $\sum v_n$ *est somme de deux séries CV est CV .*

$$16/\ on\ a\ u_n = \ln n + a\ln n + a\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+b\ln n + a\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)$$

$$d'où\ u_n \sim (1+a+b)\ln n + (2a+3b)\frac{1}{n}+0(\frac{1}{n^2})\ \ si\ \ n\to+\infty,$$

la série sera donc convergente si :

$$\begin{cases}1+a+b=0\\ 2a+3b\ =0\end{cases}\Leftrightarrow a=-3\ \ et\ \ b=2;\ \text{si } non\ la\ série\ est\ divergente.$$

III.

a / En posant $t = x - n\pi$ *on a* :

$u_n = \int_0^{\pi} e^{-(t+n\pi)} \sin(t + n\pi)dt = e^{-n\pi}(-1)^n \int_0^{\pi} e^{-t} \sin t dt = K(-e^{-\pi})^n$;

la série $\sum_{n\geq 0}(-e^{-\pi})^n$ *est une série géométrique CV* $(\left|-e^{-\pi}\right| < 1)$

sa somme est donc $\frac{1}{1+e^{-\pi}}$, *on en déduit que la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est CV et sa somme est*

$\frac{K}{1+e^{-\pi}}$. *Il nous reste à calculer K , par une double* intégration *par parties on obtient*

$K = \frac{1}{2}\left(1+e^{-\pi}\right)$, *d'où* $\sum_{n\geq 0} u_n = \frac{1}{2}$.

b / La série est termes négatifs ,on a :

$u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{n^2}$; $-\sum \frac{1}{n^2}$ *est CV (série de Riemann* $\alpha = 2 < 1$)

donc la série $\sum u_n$ *est CV (critère de comparaison).*

On a $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \ln(n+1) + \ln(n-1) - 2\ln n$;

$u_2 = \ln 3 + \ln 1 - 2\ln 2$

$u_3 = \ln 4 + \ln 2 - 2\ln 3$

$u_4 = \ln 5 + \ln 3 - 2\ln 4$

$u_5 = \ln 6 + \ln 4 - 2\ln 5$

...

$u_{N-4} = \ln(N-3) + \ln(N-5) - 2\ln(N-4)$

$u_{N-3} = \ln(N-2) + \ln(N-4) - 2\ln(N-3)$

$u_{N-2} = \ln(N-1) + \ln(N-3) - 2\ln(N-2)$

$u_{N-1} = \ln(N) + \ln(N-2) - 2\ln(N-1)$

$u_N \quad = \ln(N+1) + \ln(N-1) - 2\ln(N)$

$S_N = u_2 + u_3 + u_4 + ... + u_{N-2} + u_{N-1} + u_N = -\ln 2 + \ln(N+1) - \ln(N)$

$S_N = -\ln 2 + \ln\left(\frac{N+1}{N}\right) \to -\ln 2$; *et* $\sum u_n = -\ln 2$.

c / Remarquons que $u_{2p} = \ln(1+\dfrac{1}{2p}) = \ln\left(\dfrac{1+2p}{2p}\right) = -\ln\left(\dfrac{2p}{1+2p}\right)$

$$u_{2p} = -\ln\left(1-\frac{1}{1+2p}\right) = -u_{2p+1}.$$

$\sum u_n$ *est donc une série alternée, calculons les sommes partielles :*

$S_{2p+1} = (u_2+u_3)+(u_4+u_5)+...+(u_{2p-2}+u_{2p-1})+(u_{2p}+u_{2p+1}) = 0,$

$S_{2p} = (u_2+u_3)+(u_4+u_5)+...+(u_{2p-2}+u_{2p-1})+u_{2p} = -\ln\left(\dfrac{2p}{1+2p}\right) \to 0.$

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 0 \Rightarrow$ *la série* $\sum u_n$ *est CV et sa somme est nulle.*

d / On a $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n}+n\right)\pi = \sin\left(\dfrac{\pi}{n}+n\pi\right) = (-1)^n \sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right).$

pour $n>1,\ 0<\dfrac{\pi}{n}\le\dfrac{\pi}{2}$ $\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$ *est positif*, $\sum u_n$ *est donc une série altéernée,*

et on a $\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right) > \sin\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)$ *car la fonction* sin *est croissante*

sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ *par suite* $\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$ *est décroissante, comme* $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)=0$ *la série est CV.*

e / Ecrivons $\pi\sqrt{n^2+1} = n\pi+\pi(\sqrt{n^2+1}-n) = n\pi+\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$

d'où $u_n = (-1)^n\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$, *comme* $0<\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\le\dfrac{\pi}{2}$

$\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$ *est positif*, $\sum u_n$ *est donc une série altéernée,*

et on a $\sin\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right) > \sin\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{(n+1)^2+1}+n+1}\right)$ *car la fonction* sin *est croissante*

sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ *par suite* $\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$ *est décroissante, comme* $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}=0$

la série est CV.

f/ On a $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{\alpha n+1} = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 t^{\alpha n}dt$

$$= \int_0^1\sum_{n=0}^{N}(-t^\alpha)^n dt = \int_0^1\frac{1-(-t^\alpha)^{N+1}}{1+t^\alpha}dt$$

$$= \int_0^1\frac{1}{1+t^\alpha}dt-(-1)^{N+1}\int_0^1\frac{t^{\alpha(N+1)}}{1+t^\alpha}dt$$

On a donc $\left|S_N - \int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha}dt\right| \le \int_0^1 \frac{t^{\alpha(N+1)}}{1+t^\alpha}dt \le \int_0^1 t^{\alpha(N+1)}dt = \frac{1}{\alpha(N+1)+1}$

Par passage à la limite, on obtient

$$S_N \to \int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha}dt \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha n+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha}dt.$$

- $\alpha = 1 \to \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt = \left[\ln(1+t)\right]_0^1 = \ln 2.$
- $\alpha = 2 \to \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt = \text{Arctg } 1 - \text{Arctg } 0 = \frac{\pi}{4}.$
- $\alpha = 3 \to \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}dt,$

  décomposons $\frac{1}{1+t^3}$ en éléments simples:

$$\frac{1}{1+t^3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+t} - \frac{t-2}{t^2-t+1}\right);$$ et on a

$$\frac{1}{3}\left[-\frac{t-2}{t^2-t+1}\right] = \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{2}\times\frac{2t-1}{t^2-t+1} + \frac{3}{2}\times\frac{1}{t^2-t+1}\right]$$ puis

$$t^2 - t + 1 = \left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1\right]$$

$$\frac{1}{t^2-t+1} = \frac{4}{3}\times\frac{1}{\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)^2+1\right]} = \frac{4}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{2/\sqrt{3}}{\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)^2+1\right]}$$

d'où

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^3}dt = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{1+t}dt + \frac{1}{3}\int_0^1 -\frac{1}{2}\times\frac{2t-1}{t^2-t+1}dt +$$

$$+\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\int_0^1 \frac{4}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{2/\sqrt{3}}{\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)^2+1\right]}dt$$

$$= \frac{1}{3}\left[\ln(t+1)\right]_0^1 - \frac{1}{6}\left[\ln(t^2-t+1)\right]_0^1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\text{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)\right]_0^1$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^3}dt = \frac{1}{3}\ln 2 - 0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\times 2\text{Arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

d'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}dt = \frac{1}{3}\left(\ln 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right).$$

IV.

• Si $\alpha > 1$, soit $\gamma = \dfrac{1+\alpha}{2} > 1$, on a :

$$n^{\gamma} \times \frac{1}{n^{\alpha}(\ln\ n)^{\beta}} = \frac{1}{n^{\frac{\alpha-1}{2}}(\ln\ n)^{\beta}} \to 0$$

donc pour n assez grand on a $\dfrac{1}{n^{\alpha}(\ln\ n)^{\beta}} < \dfrac{1}{n^{\gamma}}$;

comme $\sum \dfrac{1}{n^{\gamma}}$ est CV (série de Riemann avec $\gamma > 1$), alors

$\sum \dfrac{1}{n^{\alpha}(\ln\ n)^{\beta}}$ est CV (critère de comparaison des STP).

• Si $\alpha < 1$, $1-\alpha > 0$, on a :

$$n \times \frac{1}{n^{\alpha}(\ln\ n)^{\beta}} = \frac{n^{1-\alpha}}{(\ln\ n)^{\beta}} \to +\infty,$$

donc pour n assez grand on a :$\dfrac{1}{n^{\alpha}(\ln\ n)^{\beta}} > \dfrac{1}{n}$

comme $\sum \dfrac{1}{n}$ est DV (série harmonique) alors

$\sum \dfrac{1}{n^{\alpha}(\ln\ n)^{\beta}}$ est DV (critère de comparaison).

• Si $\alpha = 1$, considérons la fonction

$f_{\beta}(x) = \dfrac{1}{x(\ln\ x)^{\beta}}$; f_{β} est dérivable sur $]1, +\infty[$ et

pour tout $x > 1 : f_{\beta}'(x) = -\dfrac{(\ln\ x)^{\beta-1}}{x^2(\ln\ x)^{2\beta}}(\ln x + \beta)$;

pour $x > e^{-\beta}$, $\ln x > -\beta \Rightarrow \ln x + \beta > 0$, d'où

f_{β} est décroissante, donc pour $N > \max(2, e^{-\beta})$

$\int_N^{+\infty} f_{\beta}(x)dx$ et $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} \dfrac{1}{n(\ln\ n)^{\beta}}$ sont de même nature

(critère de comparaison d'une série et d'une intégrale).

◦ si $\beta = 1$, $\displaystyle\int_N^{+\infty} \frac{1}{x \ln\ x} dx = \lim_{x\to+\infty} \left[\ln(\ln x)\right]_N^X$

$$= \lim_{x\to+\infty} (\ln(\ln X) - \ln(\ln N)) = +\infty;$$

donc l'intégrale est DV et par suite la série $\sum \dfrac{1}{n(\ln\ n)}$ est DV.

$\circ$ si $\beta \neq 1$, $\int_N^{+\infty} \frac{1}{x(\ln\ x)^\beta} dx = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{(\ln\ x)^{1-\beta}}{1-\beta}\right]_N^X$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{(\ln\ X)^{1-\beta}}{1-\beta} - \frac{(\ln\ N)^{1-\beta}}{1-\beta}\right) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \beta < 1 \\ -\frac{(\ln\ N)^{1-\beta}}{1-\beta} & \text{si } \beta > 1 \end{cases}$$

donc $\begin{cases} \sum \frac{1}{n(\ln\ n)^\beta} \text{ est CV si } \beta > 1 \\ \sum \frac{1}{n(\ln\ n)^\beta} \text{ est DV si } \beta < 1 \end{cases}$.