U.S.T.H.B.
Faculté de Mathématiques.
Séries - 2LIC-G.P - Section C.

Séries.
Epreuve finale.

(8 janvier 2012).

Exercice 1 : (8 points)

1) Etudier la convergence absolue des séries numériques suivantes :

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \log n}{n} \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin 2n}{n\sqrt{n}}.$$

2) Soit $(u_n)_n$ une suite positive. Montrer que si $\sum_n u_n$ est convergente, alors $\sum_n u_n^2$ est aussi convergente.

3) Donner un exemple de suite réelle telle que la série $\sum_n u_n$ soit convegente, alors que la série $\sum_n u_n^2$ est divergente.

Exercice 2 : (6 points)

Donner le domaine de convergence des séries entières suivantes :

$$\text{(1)} \sum_{n \geq 0} x^n \qquad \text{(2)} \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{(3)} \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2} \qquad \text{(4)} \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Exercice 3 : (6 points)

Soit f la fonction 2π périodique définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad -\pi \leq x \leq 0 \\ 1 & si \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

1) Dessiner f sur trois périodes.

2) Ecrire la série de Fourier associée à f.

3) En déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$.

Exercice 1 :

question 1

a/ $\sum_{n\geq 1} \left|\frac{(-1)^n \log n}{n}\right| = \sum_{n\geq 1} \frac{\log n}{n} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}(\log n)^{\beta}}$

avec $\alpha = 1$ et $\beta = -1$, c'est une série de Bertrand 0,5 avec $\alpha = 1$, on regarde donc la valeur de β, et comme $\beta < 1$, alors $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(\log n)^{-1}}$ est divergente. 0,5

Conclusion : $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \log n}{n}$ ne converge pas absolument 0,5

b/ $\sum_{n\geq 1} \left|(-1)^n \sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right| = \sum_{n\geq 1} \left|\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right|$

On a $\left|\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right| \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ 0,5 et $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ est 0,5 une série de Riemann divergente, donc $\sum_{n\geq 1} \left|\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right|$ est aussi divergente.

Conclusion : $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \sin\frac{1}{\sqrt{n}}$ n'est pas absolument convergente. 0,5

c/ $\left|\frac{\sin 2n}{n\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}$ 0,5 et $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ est convergente 0,5

D'après le critère de comparaison, $\sum_{n\geq 1}\left|\frac{\sin 2n}{n\sqrt{n}}\right|$ est convergente et donc $\sum_{n\geq 1}\frac{\sin 2n}{n\sqrt{n}}$ est absolument convergente. 0,5

0,5

question 2 :

2/ On a $\sum_n u_n$ convergente, donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$

et donc $\exists M > 0 / u_n \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$ 0,5

D'autre part $u_n^2 = u_n \cdot u_n \leq M u_n$

et $\sum_n M u_n$ convergente. D'après le critère de comparaison, $\sum_n u_n^2$ est aussi convergente. 0,5

question 3

3/ $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 0,5, on a $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ convergente (1) (critère de Leibnitz)

car $\frac{1}{\sqrt{n}} > 0$, $\searrow 0$

et $u_n^2 = \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n}$ est divergente.

0,5

EXERCICE 2

1/ $\sum_{n\geq 0} x^n$. $a_n = 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$

$\Rightarrow \boxed{R = 1}$ 0,5

$\Rightarrow \sum_{n\geq 0} x^n$ converge sur $]-1, 1[$ et

diverge sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

. Pour $x = 1$, $\sum_{n\geq 0} x^n = \sum_{n\geq 0} 1$ divergente

car son terme général est égal à 1, donc ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini 0,5

. Pour $x = -1$, $\sum_{n\geq 0} x^n = \sum_{n\geq 0} (-1)^n$ divergente

car $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \neq 0$ (n'existe pas). 0,5

Conclusion le domaine de convergence de $\sum_{n\geq 0} x^n$ est $]-1, 1[$ 0,5

2/ $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$, $a_n = \frac{1}{n!}$ et $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$ 0,5

$\Rightarrow R = \infty$ 0,5 $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge sur $\mathbb{R}$ 0,5

Conclusion : le domaine de convergence de $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est $\mathbb{R}$.

Rmq: $\sum_{n\geq 0} x^n$ est une série géométrique convergente ssi $|x| < 1$ d'où $\boxed{R = 1}$.

3/ $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2}$, $a_n = \frac{1}{n^2} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$

$\Longrightarrow \boxed{R = 1}$ (0,5) $\Longrightarrow$ convergence sur $]-1, 1[$

• Pour $x = 1$, $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2} = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ convergente car c'est la série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$ (0,5)

• Pour $x = -1$, $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2} = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ convergente, car $a_n = \frac{1}{n^2} > 0$, $\searrow 0$, alors d'après le critère de Leibnitz, $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ est CV (0,5)

<u>Conclusion</u> : Le domaine de convergence de $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ est $[-1, 1]$ (0,5)

4/ $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $\qquad U_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

$$\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \left|\frac{x^{2n+3}}{2n+3} \cdot \frac{2n+1}{x^{2n+1}}\right| = \frac{2n+1}{2n+3} |x|^2$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = x^2 < 1 \Longleftrightarrow |x| < 1$$

si $|x| < 1$, on a la convergence absolue et si $|x| > 1$, la série est divergente.

et donc $\boxed{R = 1}$ (0,5)

• Pour $x = 1$, $U_n(1) = \frac{1}{2n+1} \sim \frac{1}{2n}$ et $\sum\limits_{n} \frac{1}{2n}$ DV, donc $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ diverge pour $x = 1$. (0,5)

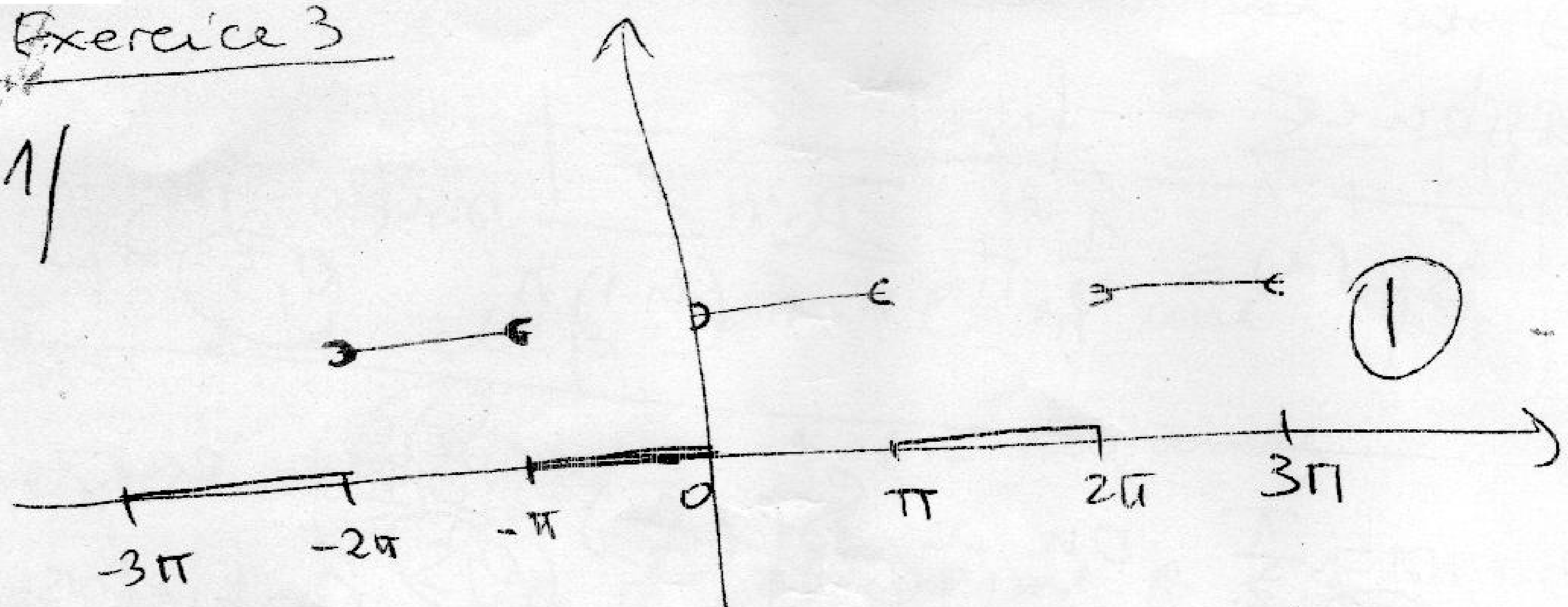
• Pour $x = -1$, $U_n(-1) = \frac{-1}{2n+1}$ et $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{-1}{2n+1}$ DV

<u>conclusion</u>

$D_C =]-1, 1[$ (0,5)

Exercice 3

1/



1

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \Rightarrow \boxed{\omega = 1}$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} dx = \frac{1}{\pi}\cdot\pi = \boxed{1}$$ (0,5)

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos n\omega x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} = 0$$ (0,5)

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin n\omega x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{-1}{n\pi}\left[(-1)^n - 1\right]$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{2}{n\pi} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$ (1) $= 0,5 + 0,5$

1/ D'où la série de Fourier $S_f(x)$ associée à f :

$$\boxed{S_f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n\geq 1} \frac{2}{(2n-1)\pi} \sin(2n-1)x} \quad 0{,}5 \quad +0{,}5$$

Pour $x = \frac{\pi}{2}$, on a $S_f(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2})$ car f est continue en ce point. On a alors :

0,25 0,5

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(2n-1)\pi/2}{(2n-1)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\pi} \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{2n-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

D'où $\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{2n-1} = \frac{-\pi}{4}}$

0,75