Travaux Diriges 3 (3/11/12)

Tests de Convergence II

1. `Test des Séries Alternées` Déterminez si la série converge.

(**a**) $\frac{2}{1}-\frac{1}{1}+\frac{2}{2}-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}+\frac{2}{4}-\frac{1}{4}$ (**b**) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (**c**) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos(n\pi)$

2. `Convergence absolue` Déterminez si la série converge.

(**a**) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{2^n}$ (**b**) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-n^2}$ (**c**) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)}{n}$ (**d**) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1$

(**e**) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}+\cdots$ (**f**) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$

3. `Utilisation des développements limités` Déterminez si la série converge.

(**a**) $\sum_{n=1}^{\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ (**b**) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e}-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ (**c**) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2-\cos\frac{1}{n}}}$

4. `Estimation de la somme d'une série`

(1) Approximez la somme de la série avec une erreur inférieure à 10^{-3}:

(**a**) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n^3-1}$ (**b**) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$ (**c**) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$

(2) Il est connu que $\pi = 4-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\frac{4}{7}+\frac{4}{9}+\cdots$. Montrez que la série indiquée converge. Déterminez théoriquement le nombre de termes nécéssaires pour que la somme partielle approxime π avec 2 chiffres significatifs corrects. Comparez la somme partielle avec la valeur exacte. Quelle est votre conclusion?

(3) Le cosinus de $\theta = 1$ radian est égal à ls somme de la série $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\cdots$. Calculez $\cos 1$ avec une précision de 0.01%.

(4) Chaque seconde, un ordinateur additionne un million de termes de la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$. En comparant avec $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$, estimez la somme partielle aprés un million d'années.

(5) Calculez la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$ avec une erreur inférieure à 0.0001.

(6) Quelle erreur fait-on en approximant $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n2^n}$ par la somme des douze premiers termes S_{12}.

(7) Quelle erreur fait-on en approximant $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^n n}$ par la somme des 5 premiers termes.