TD #3 Solutions

Ex1 ⓐ $a_n = \frac{2}{(n+1)/2} = \frac{4}{n+1}$ n impair

$= -\frac{1}{n/2} = -\frac{2}{n}$ n pair

$\Big\}$ Serie alternée

prenons n pair : $b_n = |a_n| = \frac{2}{n}$

donc $n+1$ impair et $b_{n+1} = \frac{4}{n+2}$

$\Big\}$ $b_{n+1} > b_n$ (calculez $b_{n+1} - b_n$ on trouve >0)

la suite b_n n'est pas decroissante $\Rightarrow$ on ne peut pas appliquer le test des séries alternées.

ⓑ $a_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} = (-1)^n b_n$

$b_n > 0$, $b_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}} = b_n$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

donc la serie converge

ⓒ $a_n = \frac{1}{n}\cos(n\pi) = (-1)^n \frac{1}{n}$

$b_n = \frac{1}{n}$ satisfait les 3 hypotheses du test des series alternées

$\Rightarrow$ donc la serie converge.

Ex2 ⓐ $a_n = \frac{\cos n}{2^n} \Rightarrow |a_n| = \frac{|\cos n|}{2^n} = b_n$

$0 \leq b_n \leq \underbrace{\frac{1}{2^n} = c_n}_{\text{converge, serie geometrique avec } |r| = \frac{1}{2} < 1}$ $\Rightarrow \sum b_n$ converge (test de comparaison direct)

$\sum |a_n|$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge

ⓑ $|a_n| = e^{-n^2} = b_n$ Utilisons le test de Cauchy

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to\infty} (e^{-n^2})^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0 < 1 \Rightarrow \sum b_n$ converge

$\sum |a_n|$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge.

ⓒ $a_n = \frac{1}{n}\sin\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right) = (-1)^{n+1}\frac{1}{n} = (-1)^{n+1} b_n$

$\underbrace{b_n = \frac{1}{n}}_{\text{serie harmonique}} \rightarrow$ la serie ne converge pas absolument toutefois $\sum a_n$ converge par le test des series alternées.

$\Longrightarrow$ $\sum a_n$ converge conditionnellement.

(d) $a_n = \sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1 = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n\sqrt{n}}+\sqrt{n}} = (-1)^n b_n$

$b_n = \frac{1}{\sqrt{n+(-1)^n\sqrt{n}}+\sqrt{n}}$ qd $n \to \infty$ $b_n \sim c_n = \frac{1}{2\sqrt{n}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{c_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}}+1} = 1$

$\sum c_n$ diverge $\Longrightarrow$ $\sum b_n$ diverge (test de comparaison de la limite)

donc $\sum a_n$ ne converge pas <u>absolument</u>.

(e) $|a_n| = \frac{1}{2^n}$ serie geométrique, $|r| = \frac{1}{2} < 1$, convergente

donc $\sum a_n$ est une série absolument convergente

(f) $|a_n| = \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n} \overset{\text{qd } n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} = b_n$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = 1 \Longrightarrow \sum|a_n|$ et $\sum b_n$ sont de même nature (equivalentes)

$\sum b_n$ diverge (serie de Rieman, $p = \frac{1}{2} < 1$) $\Longrightarrow \sum |a_n|$ diverge

$\sum a_n$ n'est pas absolument convergente.

Ex 3 (a) $a_n = n \,\mathrm{Ln}\left(1+\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1-1=0 \Longrightarrow$ la serie $\sum a_n$ peut converger

on utilise les développements Limités suivant :

$\mathrm{Ln}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots$ et $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$

$a_n = n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) - \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{24n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$

$= \underbrace{\frac{7}{24}\cdot\frac{1}{n^2}}_{\text{converge}} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^3}\right)}_{\text{converge absolument}}$ donc $\sum a_n$ converge.

(b) $a_n = \frac{1}{e} - \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{e} - e^{-1} = 0$, la serie peut converger.

On utilise le développement Limité $\mathrm{Ln}(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$

$$a_n = \frac{1}{e} - \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} - e^{n\,Ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{e} - e^{n\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{3n^3}-\cdots\right)} = \frac{1}{e} - e^{\left(-1-\frac{1}{2n}-\frac{1}{3n^2}-\cdots\right)}$$

$$= \frac{1}{e} - e^{-1}e^{-\frac{1}{2n}-\frac{1}{3n^2}-\cdots} = \frac{1}{e}\left(1-e^{-\frac{1}{2n}-\frac{1}{3n^2}-\cdots}\right)$$

$$= \frac{1}{e}\left(1-\left[1-\frac{1}{2n}-\frac{1}{3n^2}-\cdots+\frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2n}-\frac{1}{3n^2}-\cdots\right)^2+\cdots\right]\right) \qquad e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

$$= \frac{1}{e}\left(\underbrace{\frac{1}{2n}}_{\text{diverge}} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\text{converge absolument}}\right)$$ donc $\sum a_n$ diverge.

c $a_n = \dfrac{1}{n^{2-\cos\frac{1}{n}}}$ qd $n \to \infty$ $\cos\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2n^2} + \cdots \sim 1$

donc $a_n \sim \dfrac{1}{n^{2-1}} = \dfrac{1}{n} = b_n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^{2-\cos\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} n^{\cos\frac{1}{n}-1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{(\cos\frac{1}{n}-1)Ln\,n} = \lim_{n\to\infty} e^{\left(-\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)Ln\,n} = e^0 = 1$$

serie harmonique

$\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont de même nature. $\sum b_n$ diverge $\Rightarrow \sum a_n$ diverge

Ex4

1 $\boxed{a}$ $a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{1}{2n^3-1} = (-1)^{n+1} b_n$

$$|R_n| \leq |b_{n+1}| \leq 10^{-3} \iff \frac{1}{2(n+1)^3-1} \leq 10^{-3} \iff n \geq 8$$

$$S_8 = 1 - \frac{1}{15} + \frac{1}{53} - \frac{1}{127} + \frac{1}{249} - \frac{1}{431} + \frac{1}{685} - \frac{1}{1023} = 0.9465$$

$$S_8 - |R_8| \leq S \leq S_8 + |R_8| \qquad \text{avec } R_8 = 10^{-3}$$

$\boxed{b}$ $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n!}$ $\quad |R_n| \leq b_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!} \leq 10^{-3}$

$(n+1)! \geq 3 \implies n \geq 7$ (On essaye des valeurs de n)

$$S \simeq S_7 = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} \simeq -0.6321$$

2 $\pi = 4\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ serie alternée, $b_n = \dfrac{1}{2n+1} \geq 0$, $b_{n+1} \leq b_n$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

donc la serie converge.

- 2 chiffres significatifs correct $\iff$ erreur relative $\leq 0.5\times10^{-2}$

$$e_r \leq \frac{b_{n+1}}{\pi} \leq 0.5\times10^{-2} \iff \frac{1}{2n+3} \leq \pi(0.5\times10^{-2})$$

On ne connait pas π ; on cherche à l'estimer ! Pour cela, on utilise quelques termes de la serie : $\pi \simeq 4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right) \simeq 2.97$

$$2n+3 \geqslant \frac{10^2}{0.5\pi} = 67.34 \Longleftrightarrow n \geqslant 33$$

il faut donc 33 termes de la serie pour seulement 2 chiffres significatifs corrects de π !!

$$S_{33} = 4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\cdots \frac{1}{33}\right) \simeq 3.07 \simeq 3.1$$

on arrondi

2 chiffs significatifs.

3 $\cos 1 = 1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\frac{1}{8!}-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}$

$$\frac{|R_n|}{\cos 1} \leqslant \frac{|a_{n+1}|}{\cos 1} = \frac{(\cos 1)^{-1}}{[2(n+1)]!} \leqslant \frac{0.01}{100} = 10^{-4} \Longleftrightarrow (n+1)! \geqslant \frac{5000}{\cos 1} \simeq \frac{5000}{0.54}$$

on utilise quelques termes de la serie

$$(n+1)! \geqslant 9254 \Longleftrightarrow n+1 \geqslant 8 \Longleftrightarrow n \geqslant 7$$

$$\cos 1 \simeq S_7 = 1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\frac{1}{8!}-\frac{1}{10!}+\frac{1}{12!}-\frac{1}{14!} = 0.54030$$

stop

4 Nombre de termes à additionner sur ordinateur $= N = \underbrace{10^6}_{\text{1 million années}} \times \underbrace{365}_{\text{jour}} \times \underbrace{24}_{\text{heure}} \times \underbrace{3600}_{\text{sec}} \times \underbrace{10^6}_{\text{puissance ordinateur}}$

$N = 3.1536 \times 10^{18}$

$$\int_2^{N+1} f(x)\,dx \leqslant S_N \leqslant a_2 + \int_2^N f(x)\,dx \qquad f(x) = \frac{1}{x\ln x}$$

$$\int_2^{N+1} \frac{dx}{x\ln x} \leqslant S_N \leqslant \frac{1}{2\ln 2} + \int_2^N \frac{dx}{x\ln x}$$

$$\ln(\ln(N+1)) - \ln(\ln 2) \leqslant S_N \leqslant \frac{1}{2\ln 2} + \left(\ln(\ln N) - \ln(\ln 2)\right)$$

$$4.1182516 \leqslant S_N \leqslant 4.8396 \quad !!$$

5 $a_n = \frac{1}{n^6} = f(n)$ avec $f(x) = \frac{1}{x^6}$

$$|R_N| < \int_N^\infty f(x)\,dx = \int_N^\infty \frac{1}{x^6}\,dx < 0.0001 \Longleftrightarrow \frac{1}{5N^5} < 10^{-4}$$

$$\Longleftrightarrow N \geqslant 5 \qquad S \simeq S_5 = 1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6} = 1.01730$$

stop

6 $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n+2}{(n+1)2^{n+1}} \cdot \frac{n\,2^n}{n+1} = \frac{1}{2}\,\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{2} < 1$ (facile à verifier)

$$|R_N| < \frac{a_{N+1}}{1-r} = \frac{a_{13}}{1-r} = \frac{(13+1)/13\times 2^{13}}{1-1/2} = 2.63\times 10^{-4}$$

7 $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\ln n} \leqslant \frac{1}{\ln 5} = r \qquad \forall\, n > 5$

$$|R_N| < \frac{r^6}{1-r} = \frac{(1/\ln 5)^6}{1-1/\ln 5} = 0.15$$