USHTB, Génie Mécanique — 2LIC ST J
1er Semestre 2012-2013 — Séries (TL01)

Travaux Diriges 4 (10/11/12)

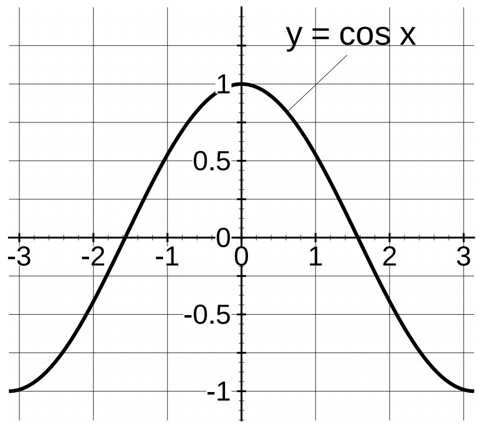
Polynômes de Taylor et Séries Entières

1. Polynômes de Taylor Trouvez le polynôme de Taylor d'ordre n centré en a.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $a = 2$, $n = 4$ **(b)** $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $a = 0$, $n = 5$ **(c)** $\sin(\pi x)$, $a = 0$, $n = 3$

2. Graphe d'un polynôme de Taylor Utilisez les polynômes de MacLaurin $P_n(x)$ de la fonction $f(x) = \cos x$ pour compléter le tableau suivant. Représentez les polynômes et la fonction sur le même graphe. (Remarque: Les polynômes $P_0(x)$ et $P_2(x)$ sont appelées *Approximation constante* et *Approximation quadratique* respectivement). Comparez $P_0(x)$ et $P_1(x)$. Expliquez.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\cos x$							
$P_0(x)$							
$P_2(x)$							
$P_4(x)$							



3. Approximation par les polynômes de Taylor

(1) Estimez l'erreur si $P_4(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!}$ est utilisé pour évaluer $\cos x$ en $x = 0.3$.

(2) Pour quelle valeur de n peut-on approcher $f(x) = \ln(1+x)$ par son polynôme de MacLaurin $P_n(x)$ au point $x = 0.5$ si l'erreur ne doit pas dépasser 0.0001?

(3) Pour quelles valeurs de x peut-on remplacer $f(x) = \sin x$ par son polynôme $P_3(x)$ avec une précision de 0.01?

4. Séries entières Déterminez le rayon R et l'intervalle de convergence de chaque série:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{10^n}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (2n)!\left(\frac{x}{2}\right)^n$ **(d)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n}\,3^n}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x+2)^n}{n2^n}$ **(f)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}x^n$ **(g)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} x^n$