SERIES NUMERIQUES
Exercices et corrections

Exercice 1

Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \left(\dfrac{2n+1}{3n+4}\right)^n$

Correction

La série est à termes positifs. On applique la règle de Cauchy

$$\sqrt[n]{u_n} = (u_n)^{1/n} = \left(\frac{2n+1}{3n+4}\right) \to \frac{2}{3} < 1 \quad \text{quand } n \to +\infty$$

La série de terme général $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge

Exercice 2

Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \left(\dfrac{an}{n+1}\right)^{n^2}$ (a réel positif)

Correction

La série est à termes positifs. On applique la règle de Cauchy

$$\sqrt[n]{u_n} = (u_n)^{1/n} = \left(\frac{an}{n+1}\right)^n = \left(\frac{a}{1+1/n}\right)^n \to a^n \quad \text{quand } n \to +\infty$$

car $\dfrac{a}{1+1/n} \to a$ quand $n \to +\infty$

$\sqrt[n]{u_n}$ tend vers

$$\begin{cases} 0 \text{ si } a < 1\text{: La série de terme général } \sum\limits_{n\geq 0} u_n \text{ converge} \\ 1/e \text{ si } a = 1\text{: La série de terme général } \sum\limits_{n\geq 0} u_n \text{ converge} \\ +\infty \text{ si } a > 1\text{: La série de terme général } \sum\limits_{n\geq 0} u_n \text{ diverge} \end{cases}$$

Exercice 3

Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^{-n^2}$ (x réel)

Correction

La série est à termes positifs. On applique la règle de Cauchy

$$\sqrt[n]{u_n} = (u_n)^{1/n} = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}$$

$\sqrt[n]{u_n}$ tend vers e^{-x}

$$\begin{cases} \text{la série de terme général } \sum\limits_{n\geq 0} u_n \text{ converge si } x > 0 \\ \text{la série de terme général } \sum\limits_{n\geq 0} u_n \text{ diverge si } x < 0 \end{cases}$$

si $x = 0$ $u_n = 1$ $\forall n$ le terme général ne tend pas vers zéro, la série de terme général $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ diverge

SERIES NUMERIQUES
Exercices et corrections

Exercice 4

Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{a^n}{(1+a)(1+a)^2.....(1+a)^n}$ (a réel positif)

Correction

La série est à termes positifs. On applique la règle de d'Alembert

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{(1+a)^{n+1}} = 0 \quad \text{quand } n \to +\infty$$

La série de terme général $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge

Exercice 5

Etudier la nature de la série de terme général $u_n = a n \ln(1+\frac{1}{n}) - b\cos(\frac{1}{n}) + c\sin(\frac{1}{n})$ (a, b, c réels)

Correction

la série est de signe constant

lorsque $n \to +\infty$, alors $\frac{1}{n} \to 0$

$$\ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

$$\cos(\frac{1}{n}) = 1 + o(\frac{1}{n})$$

$$\sin(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$$

$$u_n = (a-b) + (c - \frac{a}{2})\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$$

$$\begin{cases} \text{si } a \neq b,\ u_n \text{ ne tend pas vers zéro. La série } \sum_{n\geq 0} u_n \text{ diverge} \\ \text{si } a = b \text{ et } c \neq \frac{a}{2} \text{ alors } u_n \sim (c-\frac{a}{2})\frac{1}{n} \text{ série harmonique. La série } \sum_{n\geq 0} u_n \text{ diverge} \\ \text{si } a = b = 2c \text{ alors } u_n = o(\frac{1}{n^2}). \text{ La série } \sum_{n\geq 0} u_n \text{ converge} \end{cases}$$

Exercice 6

Etudier la nature de la série de terme général $u_n = (-1)^n(\sqrt{n^2+1} - n)$

Correction

Série alternée

$$|u_n| = \sqrt{n^2+1} - n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} \sim \frac{1}{2n}$$

La série ne converge pas absolument

Le terme général $u_n \to 0$ quand $n \to +\infty$

posons $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} < 0 \text{ si } x \in [0, +\infty[$$

La suite $f(n)$ est décroissante

La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est semi-convergente, d'après le critère de Leibniz pour les séries alternées.

SERIES NUMERIQUES
Exercices et corrections

Exercice 7

Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^2+1}\left[(-1)^n n + k\right]$ (k réel)

Correction

$$u_n = \frac{(-1)^n n}{n^2+1} + \frac{k}{n^2+1}$$

$|u_n| \sim \dfrac{1}{n}$ donc la série ne converge pas absolument

u_n est la somme de deux termes

La série de terme général $v_n = \dfrac{(-1)^n n}{n^2+1}$ est une série alternée dont le terme général tend vers zéro en décroissant donc est semi-convergente

La série de terme général $w_n = \dfrac{k}{n^2+1}$ est équivalente à $\dfrac{k}{n^2}$ donc convergente

La série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge

Exercice 8

Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sin x}{1+\operatorname{ch}^2 x}\,dx$

Correction

$$0 \leq \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sin x}{1+\operatorname{ch}^2 x}\,dx \leq \int_0^{\frac{1}{n}} \sin x\,dx \leq \int_0^{\frac{1}{n}} x\,dx = \frac{1}{2n^2}$$

La série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge

Exercice 9

Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin x}{1+x^2}\,dx$

Correction

$n \in \mathbb{N}^*$ alors $\left[0, \dfrac{\pi}{n}\right] \subset [0, \pi]$ et $\dfrac{1}{1+\pi^2} \leq \dfrac{1}{1+x^2} \leq 1$

$$0 \leq \frac{1}{1+\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin x\,dx \leq u_n \leq \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin x\,dx = 1-\cos\frac{\pi}{n} \sim \frac{\pi^2}{2n^2} \text{ qui converge}$$

la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge

Exercice 10

Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \left(\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}\right)^n$

Correction

$$u_n = e^{-n\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})} = e^{-n\left[\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})\right]} = e^{-\sqrt{n}+\frac{1}{2}+o(1)} \sim \frac{\sqrt{e}}{e^{\sqrt{n}}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \frac{\sqrt{e}}{e^{\sqrt{n}}} = 0$$

donc $n^2 u_n \le 1$ à partir d'un certain rang

et $u_n \le \dfrac{1}{n^2}$ pour n assez grand

La série $\sum\limits_{n\ge 0} u_n$ converge

Exercice 11

Etudier la nature de la série de terme général $u_n = (-1)^n(\tan\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \sin\dfrac{1}{\sqrt{n}})$

Correction

$$\sin\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1/2}} - \frac{1}{6n^{3/2}} + o(\frac{1}{n^{3/2}})$$

$$\tan\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1/2}} + \frac{1}{2n^{3/2}} + o(\frac{1}{n^{3/2}})$$

$$|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^{3/2}}$$

La série $\sum\limits_{n\ge 0} u_n$ est absolument convergente donc convergente

Exercice 12

Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cos\dfrac{1}{n}$

Correction

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cos\frac{1}{n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

La série de terme général $\sum\limits_{n\ge 0} u_n$ converge

SERIES NUMERIQUES
Exercices et corrections

Exercice 13

Etudier la nature de la série de terme général $u_n = (-1)^n \dfrac{\sqrt{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n} + (-1)^n}$

Correction

$$u_n = (-1)^n \frac{\sqrt{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n} + (-1)^n} = (-1)^n \frac{\sqrt{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}\,(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})}$$

$$u_n = (-1)^n \left[\frac{1}{n^{1/2}} + O(\frac{1}{n^{3/2}})\right]\left[1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O(\frac{1}{n})\right]$$

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^{3/2}})$$

somme de deux séries convergentes et d' une série divergente,

alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ diverge

Exercice 14

Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^a}\right)$ (a donné > 0)

Correction

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^a}\right) = \frac{(-1)^n}{n^a} + v_n \text{ avec } v_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^{2a}}$$

La série de terme général $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge si $a > \dfrac{1}{2}$

Exercice 15

Etudier la nature des séries de terme général $u_n = \sin\left[\pi\sqrt{n^2 + 1}\right]$ puis $v_n = \cos\left[\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right]$

Correction

$$u_n = \sin\left[n\pi\sqrt{1 + \frac{1}{n}}\right] = \sin\left[n\pi(1 + \frac{1}{2n^2} + O(\frac{1}{n^4})\right] = \sin\left[n\pi + \frac{\pi}{2n} + O(\frac{1}{n^3})\right]$$

$$u_n = (-1)^n \sin\left[\frac{\pi}{2n} + O(\frac{1}{n^3})\right] = (-1)^n\left[\frac{\pi}{2n} + O(\frac{1}{n^3})\right]$$

$$u_n = \frac{(-1)^n\pi}{2n} + O(\frac{1}{n^3})$$

somme d' une série semi – convergente et d' une série convergente

La série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est convergente

$$v_n = \cos\left[\pi n(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})^{1/2}\right] = \cos\left[\pi n + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8n} + O(\frac{1}{n^2})\right]$$

$$v_n = (-1)^{n+1}\sin\left[\frac{3\pi}{8n} + O(\frac{1}{n^2})\right] = \frac{(-1)^{n+1}3\pi}{8n} + O(\frac{1}{n^3})$$

La série $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ est convergente