Convergence de séries à termes positifs

Exercice 1 - Quelques convergences - *L2/Math Spé* - ⋆

1. On a $\lim_{n\to\infty} n\sin(1/n) = 1$, et la série est grossièrement divergente.
2. Par croissance comparée, on a $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$, et la série est grossièrement divergente. On pouvait aussi appliquer le critère de d'Alembert.
3. On a :
$$n^2 u_n = \exp\left(2\ln n - \sqrt{n}\ln 2\right) = \exp\left(-\sqrt{n}\left(\ln 2 - 2\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)\right).$$
Il résulte de $\lim_\infty \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0$ que
$$\lim_{n\to\infty} n^2 u_n = 0,$$
et par comparaison à une série de Riemann, la série est convergente.
4. Puisque $\ln(1+x) \sim_0 x$, on obtient
$$u_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n},$$
et la série est donc divergente.
5. En utilisant le développement limité du cosinus, ou l'équivalent $1-\cos x \sim_0 \frac{x^2}{2}$, on voit que :
$$u_n \sim_{+\infty} \frac{\pi^2}{2n^2},$$
et la série est convergente.
6. On a $(-1)^n + n \sim_{+\infty} n$ et $n^2+1 \sim_{+\infty} n^2$, et donc
$$\frac{(-1)^n+n}{n^2+1} \sim_{+\infty} \frac{1}{n}.$$
Par comparaison à une série de Riemann, la série $\sum_n u_n$ est divergente.
7. Par croissance comparée des suites géométriques et la suite factorielle, le terme général ne tend pas vers 0, sauf si $a=0$. La série $\sum_n u_n$ est donc convergente si et seulement si $a=0$.
8. On écrit tout sous forme exponentielle :
$$ne^{-\sqrt{n}} = \exp(\ln n - \sqrt{n}).$$
On a alors
$$\frac{\exp(\ln n - \sqrt{n})}{\exp(-2\ln n)} = \exp(3\ln n - \sqrt{n}) \to 0$$
et donc
$$ne^{-\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
La série est convergente.

9. On écrit simplement

$$\ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right) = \ln\left(1-\frac{2}{n^2+n+1}\right) \sim_{+\infty} \frac{-2}{n^2}.$$

La série est donc convergente.

10. On vérifie aisément que

$$u_n \sim_{+\infty} \frac{2\ln n}{(4/\sqrt{2})^n}.$$

Puisque $4/\sqrt{2}>2$, on obtient

$$u_n =_{+\infty} o\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

et donc la série est convergente.

Exercice 2 **- Des critères ! -** *L2/Math Spé* - ⋆

1. Une série dont le terme général est constitué de puissances et de factorielles est très bien adaptée à l'utilisation du critère de D'Alembert. Dans le cas particulier ce cette question, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{a(n+1)}} \times \frac{n^{an}}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{an} \times \frac{1}{(n+1)^{a-1}}.$$

Or, on peut écrire

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{an} = \exp\left(-an\ln(1+1/n)\right) = \exp(-a+o(1))$$

et donc ce terme converge vers e^{-a}. On distingue alors trois cas :
– Si $a>1$, u_{n+1}/u_n tend vers 0, la série $\sum_n u_n$ converge.
– Si $a=1$, u_{n+1}/u_n tend vers $e^{-1}\in[0,1[$, et donc la série $\sum_n u_n$ converge.
– Si $a<1$, u_{n+1}/u_n tend vers $+\infty$, et donc la série $\sum_n u_n$ diverge.

2. Les séries dont le terme général porte une puissance $n-$ième sont bien adaptées à l'utilisation du critère de Cauchy. On a ici :

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{n-1}{2n+1} \to 1/2.$$

La série converge.

3. C'est un peu plus dur. On sépare les termes pairs et impairs. On a :

$$\sqrt[2p]{u_{2p}} = \frac{1}{2},$$

et par application du critère de Cauchy, la série de terme général u_{2p} converge. D'autre part,

$$\sqrt[2p+1]{u_{2p+1}} = 2,$$

et par application du critère de Cauchy, la série de terme général u_{2p+1} diverge. Ecrivant la STG u_n comme somme d'une série convergente et d'une série divergente, on obtient que la série de terme général u_n diverge.

4. On va utiliser la règle de d'Alembert. Pour cela, on écrit :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha}\times\exp\big(n\big(\ln(\ln(n+1))-\ln\ln n\big)\big)\times\frac{\ln(n+1)}{n+1}$$
Or, la fonction $x\mapsto\ln(\ln x)$ est dérivable sur son domaine de définition, de dérivée $x\mapsto\frac{1}{x\ln x}$. On en déduit, par l'inégalité des accroissements finis, que
$$|\ln(\ln(n+1))-\ln\ln(n)|\le\frac{1}{n\ln n}.$$
Il en découle :
$$0\le\frac{u_{n+1}}{u_n}\le\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha}\times\exp\left(\frac{n}{n\ln n}\right)\times\frac{\ln(n+1)}{n+1}$$
On en déduit facilement, par les théorèmes de composition des limites et par le fait que $\ln(n+1)/(n+1)$ tend vers 0, que la limite de u_{n+1}/u_n est nulle. Par la règle de d'Alembert, la série de terme général u_n est convergente.

Exercice 3 - Développements limités - *L2/Math Spé* - $\star$

1. Le terme général u_n est positif, et de $\mathrm{ch}(1/n)=1+1/2n^2+o(1/n^2)$, on déduit que $u_n\sim\dfrac{1}{\sqrt{2}n}$. Par conséquent, la série est divergente.
2. On a :
$$u_n=\exp\left(-n^2\ln\left(1+\frac1n\right)\right)=\exp(-n)\exp(1/2+o(n))\sim e^{-n}.$$
On en déduit que $n^2u_n\to0$ et la série de terme général u_n converge.
3. On passe bien sûr à l'écriture en fonction du logarithme et de l'exponentielle, puis on écrit le développement limité du sinus et du logarithme. On obtient :
$$u_n=\exp\left(-\frac{1}{6n^{2-\alpha}}+o\left(\frac{1}{n^{2-\alpha}}\right)\right).$$
Trois cas sont à distinguer :
   - Si $\alpha<2$, on a $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6n^{2-\alpha}}=0$, donc $\lim u_n=1$: la série de terme général u_n est grosièrement divergente (son terme général ne tend pas vers 0).
   - Si $\alpha=2$, on a $\lim_{n\to\infty}u_n=e^{-1/6}$ qui est un réel non nul, ce qui prouve que la série de terme général u_n est grosièrement divergente.
   - Si $\alpha>2$, on a :
$$n^2u_n=\exp\left(-\frac{1}{6n^{2-\alpha}}\left(1-12\frac{\ln n}{n^{\alpha-2}}+o(1)\right)\right)\to0,$$
et par conséquent la série $\sum u_n$ converge.

4. On effectue un développement du terme général u_n :

$$\begin{aligned} u_n &= n\left(1+\frac{a}{n^2}\right)^{1/3} - n\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{1/2} \\ &= n\left(1+\frac{a}{3n^2}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) - n\left(1+\frac{3}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{a}{3}-\frac{3}{2}\right)+O\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

Si $a \neq 9/2$, $u_n \sim \frac{1}{n}\left(\frac{a}{3}-\frac{3}{2}\right)$ et la série diverge. Si $a = 9/2$, $u_n = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$, et la série $\sum u_n$ converge.

5. On réalise un développement limité du terme général :

$$e^{\frac{1}{n}} - a - \frac{b}{n} = (1-a) + \frac{1-b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Si $a \neq 1$, alors $e^{\frac{1}{n}} - a - \frac{b}{n} \to (1-a) \neq 0$ et la série diverge. Si $a = 1$ et $b \neq 1$, alors $e^{\frac{1}{n}} - a - \frac{b}{n} \sim_{+\infty} \frac{1-b}{n}$ et la série diverge. Si $a = 1$ et $b = 1$, alors $e^{\frac{1}{n}} - a - \frac{b}{n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et la série converge.

6. Il faut faire un développement limité du terme général. On a :

$$(n+1)^{1+1/n} = n^{1+1/n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+1/n} = ne^{\frac{\ln n}{n}+\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

Or :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

On en déduit :

$$(n+1)^{1+1/n} = n + \ln n + o(\ln n).$$

De même,

$$(n-1)^{1-1/n} = n - \ln n + o(\ln n).$$

Finalement, on obtient que :

$$u_n \sim \frac{2\ln n}{n^\alpha}.$$

D'après l'étude des séries de Bertrand, cette série converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Exercice 4 - Séries de Bertrand - *L2/Math Spé* - $\star$

On sépare trois cas suivant les valeurs de α :

– $1 < \alpha$: on fixe γ un réel tel que $1 < \gamma < \alpha$. La comparaison du comportement du logarithme et des polynômes en $+\infty$ montre que :

$$\lim_{n\to\infty} n^\gamma \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = 0.$$

Par comparaison à une série de Riemann, la série est convergente.

- $\alpha < 1$: on fixe γ un réel tel que $\alpha < \gamma < 1$. La comparaison du comportement du logarithme et des polynômes en $+\infty$ montrer que :
$$\lim_{n\to\infty} n^\gamma \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = +\infty.$$
Par comparaison à une série de Riemann, la série est divergente.
- $\alpha = 1$. Remarquons d'abord que si $\beta < 0$, la série est divergente car son terme général est supérieur à $1/n$. Si $\beta \geq 0$, la décroissance de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^\beta}$ sur $[2, +\infty[$ nous autorise à comparer à une intégrale. On a, par les encadrements classiques pour $k \geq 3$:
$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} \leq \frac{1}{k(\ln k)^\beta} \leq \int_{k-1}^k \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}.$$
On somme ces inégalités pour k allant de 3 à n :
$$\int_3^{n+1} \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} \leq \sum_{k=3}^n \frac{1}{k(\ln k)^\beta} \leq \int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}.$$
Il faut maintenant intégrer la fonction. Si $\beta \neq 0$, on trouve :
$$\frac{1}{1-\beta}\left(\frac{1}{\ln^{\beta-1}(n+1)} - \frac{1}{\ln^{\beta-1} 3}\right) \leq \sum_{k=3}^n \frac{1}{k(\ln k)^\beta} \leq \frac{1}{1-\beta}\left(\frac{1}{\ln^{\beta-1}(n)} - \frac{1}{\ln^{\beta-1} 2}\right).$$
Pour $\beta < 1$, le terme de droite tend vers $+\infty$, et la série est divergente. Pour $\beta > 1$, le terme de gauche tend vers une limite finie, et la série est convergente (une série à terme positif est convergente si, et seulement si, elle est majorée). Pour $\beta = 1$, la fonction s'intègre en $\ln(\ln x)$, et le terme à droite de l'inégalité tend là encore vers $+\infty$. La série est divergente.

Exercice 5 - Inclassables - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

1. Pour tout entier naturel N, on a :
$$S_N = \sum_{n=1}^N u_n = \sum_{k=1}^{E(\sqrt{N})} \frac{1}{k^2}.$$
La suite (S_N) est donc croissante, et majorée par la somme de la série convergente $\sum_1^\infty 1/k^2$. On en déduit que la série $\sum u_n$ est convergente.
2. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a :
$$0 \leq u_n \leq \frac{a}{1+n^2}.$$
La série à terme général positif $\sum u_n$ est convergente.

Exercice 6 - Cas limite de la règle de d'Alembert - *L2/Math Spé* - ⋆

1. Cette série est bien adaptée à l'utilisation du critère de d'Alembert. On calcule donc
$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\times\frac{n^n}{a^n n!}\\ &= a\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\\ &= a\exp\left(-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= a\exp\left(-n\times\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right).\end{aligned}$$
On obtient donc que u_{n+1}/u_n converge vers a/e. Par application de la règle de d'Alembert, si $a>e$, la série est divergente. Si $a<e$, la série est convergente. Le cas $a=e$ est un cas limite où le théorème de d'Alembert ne permet pas de conclure directement.
2. On pousse un peu plus loin le développement précédent. On obtient
$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= e\exp\left(-n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)\\ &= e\exp\left(-1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= 1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$
En particulier, pour n assez grand, $\frac{u_{n+1}}{u_n}\geq 1$, et donc la suite (u_n) est croissante. Elle ne converge donc pas vers zéro, et la série $\sum_n u_n$ est divergente.

Exercice 7 - Cas limite de la règle de d'Alembert - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

1. On a :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2n+1}{2n+2}=1-\frac{1}{2n+2}.$$
La suite u_{n+1}/u_n converge donc vers 1. En outre, on a :
$$\frac{(n+1)u_{n+1}}{nu_n}=\frac{2n+1}{2n}\geq 1.$$
Par conséquent, la suite nu_n est croissante, et comme u_n est positive, on a :
$$nu_n\geq u_1\implies u_n\geq\frac{u_1}{n}.$$
La série de terme général (u_n) est divergente (minorée par une série divergente).
2. On a de même :
$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{2n-1}{2n}\to 1.$$
D'autre part, un calcul immédiat montre que :
$$\frac{(n+1)^\alpha v_{n+1}}{n^\alpha v_n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha\left(1-\frac{3}{2n+2}\right).$$

Effectuons un développement limité de cette quantité au voisinage de $+\infty$ afin d'obtenir la position par rapport à 1. On a :

$$\frac{(n+1)^\alpha v_{n+1}}{n^\alpha v_n}=1+\frac{2\alpha-3}{2n+2}+o(1/n).$$

Pour n assez grand, $\frac{(n+1)^\alpha v_{n+1}}{n^\alpha v_n}-1$ a le signe de $\frac{2\alpha-3}{2n+2}$, qui est négatif puisqu'on a supposé $\alpha<3/2$. Soit n_0 un rang à partir duquel l'inégalité est vraie. On a, pour $n>n_0$:

$$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}}{v_{n_0}}&=\frac{v_{n+1}}{v_n}\frac{v_{n-1}}{v_{n-2}}\dots\frac{v_{n_0+1}}{v_{n_0}}\\ &\leq\frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha}\frac{(n-1)^\alpha}{n^\alpha}\dots\frac{n_0^\alpha}{(n_0+1)^\alpha}\\ &\leq\frac{n_0^\alpha}{(n+1)^\alpha}.\end{aligned}$$

On a donc obtenu :

$$0\leq v_{n+1}\leq v_{n_0}\frac{n_0^\alpha}{(n+1)^\alpha}.$$

Prenons maintenant $\alpha\in]1,3/2[$. Par comparaison à une série de Riemann, la série de terme général (v_n) converge. On vient donc de voir deux phénomènes très différents de ce qui peut se passer dans le cas limite de la règle de d'Alembert. Le second résultat est un cas particulier de ce que l'on appelle règle de Raabe-Duhamel.

Exercice 8 - Un cran au dessus ! - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

1. Il faut savoir que la suite des sommes partielles de la série harmonique est équivalente à $\ln n$. On utilise ici seulement la minoration, qui se démontre très facilement par comparaison à une intégrale :

$$1+\frac12+\dots+\frac1n\geq\int_1^{n+1}\frac{dx}{x}=\ln(n+1).$$

   On peut obtenir une estimation précise du dénominateur également en faisant une comparaison à une intégrale. Le plus facile est toutefois d'utiliser la majoration brutale suivante :

$$\ln(n!)=\ln(1)+\dots+\ln(n)\leq n\ln n.$$

   Il en résulte que $u_n\geq\frac1n$, et la série $\sum u_n$ est divergente.
2. On majore sous l'intégrale. En utilisant $\sin x\leq x$, on obtient (on suppose $n\geq 2$) :

$$0\leq u_n\leq\int_0^{\pi/n}\frac{x^3}{1+x}dx\leq\int_0^{\pi/n}x^3dx\leq\frac{\pi^4}{4n^4}.$$

   La série $\sum u_n$ est convergente.

Exercice 9 - Série des inverses des nombres premiers - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

1. Si la suite (V_n) est convergente, notons v sa limite. Il est clair que $v \geq 1$ puisque, pour chaque k, $\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}} \geq 1$. Alors, par composition des limites, $(\ln(V_n))$ converge vers $\ln(v)$ (le point clé est ici de remarquer que v est strictement positif, pour que $(\ln(V_n))$ admette bien une limite finie). La réciproque se prouve en composant avec l'exponentielle.
2. Étudions donc la suite $(\ln(V_n))$. On a
$$\ln(V_n) = \sum_{k=1}^{N} \ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}\right) = \sum_{k=1}^{N} -\ln\left(1-\frac{1}{p_k}\right).$$
Dire que la suite $(\ln(V_n))$ est convergente équivaut donc à dire que la série de terme général $-\ln\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$ est convergente. Mais on a
$$-\ln\left(1-\frac{1}{p_k}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{p_k}.$$
Puisque $\frac{1}{p_k}$ est positif, alors la convergence de la série de terme général $-\ln\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$ est équivalente à la convergence de la série $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{p_k}$. Ainsi, utilisant le résultat de la première question, la suite (V_n) converge si et seulement si la série $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{p_k}$ converge.
3. Il suffit de remarquer que $0 < \frac{1}{p_k} < 1$ pour tout entier k et donc que, d'après la formule pour une somme géométrique, on a
$$\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}} = \sum_{j\geq 0}\frac{1}{p_k^j}.$$
4. Si on développe le produit $\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{j\geq 1}\frac{1}{p_k^j}\right)$, on fait apparaitre la somme des inverses des entiers dont la décomposition en produit de facteurs premiers ne fait apparaitre que des nombres premiers inférieurs ou égaux à p_n. En particulier, si $j \leq n$, sa décomposition en produit de facteurs premiers ne fait apparaitre que des nombres inférieurs ou égaux à n donc à p_n (le $n-$ième nombre premier est évidemment supérieur ou égal à n). En particulier, on obtient
$$V_n \geq \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}.$$
5. D'après la question précédente, puisque la série $\sum_j \frac{1}{j}$ est divergente, il en est de même de la suite (V_n). Ceci entraine la divergence de la série $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{p_k}$.
6. Si $\alpha \leq 1$, alors $\frac{1}{p_k^\alpha} \geq \frac{1}{p_k}$. On en déduit que la série $\sum_k \frac{1}{p_k^\alpha}$ est divergente. Si $\alpha > 1$, alors $\frac{1}{p_k^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$. La série $\sum_k \frac{1}{p_k^\alpha}$ est alors convergente.

Exercice 10 - Valeur absolue et sinus - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

Du fait que $|\sin n| \leq 1$, on a :
$$\frac{|\sin(n)|}{n} \geq \frac{\sin^2 n}{n} = \frac{1-\cos(2n)}{2n}.$$
Maintenant, par une transformation d'Abel, il est bien connu que la série de terme général $\frac{\cos(2n)}{2n}$ est convergente. Le terme général de la série étudiée s'écrit donc comme somme du

terme général d'une série convergente et du terme général d'une série divergente. On en déduit que la série de terme général $\frac{|\sin n|}{n}$ est divergente.

Convergence de séries à termes quelconques

Exercice 11 - Pour commencer ! - *L2/Math Spé* - $\star$

1. On a :
$$|u_n| \leq \frac{1}{n^2},$$
et la série converge absolument.
2. La série est alternée, et le module du terme général décroît vers 0 à partir d'un certain rang : la série converge par application du critère des séries alternées.
3. Il s'agit d'une série alternée bien cachée. En effet, n^2 a la parité de n, et $\cos(k\pi) = (-1)^k$. Le terme général vaut donc $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n \ln n}$. La série converge par application immédiate du critère spécial des séries alternées.

Exercice 12 - Convergence absolue - *L2/Math Spé* - $\star$

On va montrer que cette série est absolument convergente. Puisque f est continue sur le segment $[0,1]$, elle y est bornée par M, et on a :
$$|u_n| \leq \frac{M}{n} \int_0^1 t^n dt \leq \frac{M}{n(n+1)}.$$
La série de terme général (u_n) est absolument convergente.

Exercice 13 - Une erreur classique... - *L2/Math Spé* - $\star$

1. Ceci est une conséquence directe du critère des séries alternées. La série est alternée, et la valeur absolue du terme général décroît vers zéro.
2. On écrit que
$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).\end{aligned}$$
3. Notons $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$, $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $w_n = -\frac{1}{n}$ et $t_n = \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$. Notons U_n, V_n, W_n et T_n leurs sommes partielles respectives. Alors (V_n) est convergente, (W_n) est divergente, et (T_n) est convergente. En effet, $|t_n| \sim_{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ et la série $\sum_n t_n$ est absolument convergente. Donc (U_n) est somme de deux suites convergentes et d'une suite divergente. Elle est donc divergente. Autrement dit, la série de terme général u_n est divergente.

4. Bien que $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \sim_{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, l'une des deux séries converge et l'autre diverge.

Exercice 14 - Décomposition - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

1. Le développement limité de u_n donne :
$$u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1} - \frac{1}{2(2n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{(-1)^n}{2n+1} + v_n,$$
où $v_n \sim \frac{1}{8n^2}$. Maintenant, la série alternée $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge par application du critère spécial des séries alternées, et la série $\sum v_n$, à terme général de signe constant, converge elle aussi (série de Riemann). La série $\sum u_n$ est convergente comme somme de deux séries convergentes.
2. Faisons un développement limité du terme général u_n au voisinage de $+\infty$:
$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}} - \frac{1}{2n^{3\alpha/2}} + v_n,$$
où $v_n = o\left(n^{-3\alpha/2}\right)$. La série $\sum \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}}$ converge d'après le critère spécial des séries alternées. La série u_n a donc le même comportement que la série de terme général :
$$w_n = -\frac{1}{2n^{3\alpha/2}} + v_n.$$
Maintenant, $w_n \sim_\infty \frac{-1}{2n^{3\alpha/2}}$ qui ne change pas de signe. Autrement dit, le comportement de la série de terme général u_n est le même que celui de la série de terme général $\frac{1}{n^{3\alpha/2}}$. On en déduit que la série diverge pour $0 < \alpha \leq \frac{2}{3}$ et converge pour $\alpha > 2/3$.
3. Remarquons d'abord que si $\alpha = \beta$, u_n n'est pas défini pour n impair. Supposons donc $\alpha \neq \beta$.
   - Si $\alpha < \beta$, écrivons $u_n = \frac{1}{n^\beta(1+(-1)^n n^{\alpha-\beta})}$. Ainsi, u_n est définie pour $n \geq 2$, et positif ; en outre, $u_n \sim \frac{1}{n^\beta}$. La série converge dans ce cas si et seulement si $\beta > 1$.
   - Si $\alpha > \beta$, le terme dominant n'est plus le même, et on écrit désormais :
   $$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha(1+(-1)^n n^{\beta-\alpha})}.$$
   On voit ainsi que u_n est bien définie pour $n \geq 2$, et c'est une série alternée. On a $|u_n| \sim \frac{1}{n^\alpha}$, en conséquence :
     - Pour $\alpha > 1$, $\sum u_n$ est absolument convergente.
     - Pour $\alpha \leq 0$, $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

   Il reste ainsi à étudier le cas où $0 < \alpha \leq 1$. On effectue un développement limité du terme général :
   $$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{n^{2\alpha-\beta}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha-\beta}}\right) = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + v_n.$$

La série $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge d'après le critère spécial des séries alternées. D'autre part, $v_n \sim_\infty \frac{-1}{n^{2\alpha-\beta}}$. D'après la règle de comparaison à une série à terme constant, elle converge si, et seulement si, $2\alpha-\beta>1$. Finalement, pour $0<\alpha\leq 1$,

– si $2\alpha-\beta>1$, $\sum u_n$ converge (somme d'une série convergente et d'une série convergente).
– si $2\alpha-\beta\leq 1$, $\sum u_n$ diverge (somme d'une série divergente et d'une série convergente).

Exercice 15 - En deux étapes - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

Pour $|b|\leq 1$, la suite (b^n), qui est bornée, est négligeable devant $2^{\sqrt{n}}$. Par conséquent, $(2^{\sqrt{n}}+b^n)\sim_{+\infty} 2^{\sqrt{n}}$, et $u_n\sim a^n$. On en déduit alors que, pour $|a|\geq 1$, le terme général u_n ne tend pas vers 0 : la série $\sum_n u_n$ est donc divergente ; Pour $|a|<1$, la série $\sum_n u_n$ est absolument convergente car $|u_n|\sim_n |a^n|$, le terme de droite étant le terme général d'une série convergente. Si maintenant $|b|>1$, alors la suite $(2^{\sqrt{n}})$ est négligeable devant (b^n) (faire le quotient en passant par la notation exponentielle). On en déduit que $u_n\sim_{+\infty}\frac{2^{\sqrt{n}}a^n}{b^n}$. Posons $v_n=\frac{2^{\sqrt{n}}|a|^n}{|b|^n}$, et étudions la suite (v_n) en appliquant le critère de d'Alembert. On a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{|a|}{|b|}2^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}.$$

Puisque $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ tend vers 0 (multiplier par la quantité conjuguée), on en déduit que $\lim_{n\to+\infty}\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{|a|}{|b|}$. Si $|a|<|b|$, alors la série $\sum_n v_n$ converge, et la série $\sum_n u_n$ est absolument convergente. Si $|a|\geq|b|$, alors $(|u_n|)$ tend vers $+\infty$, et la série $\sum_n u_n$ est divergente.

Exercice 16 - Transformation d'Abel - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

1. On écrit successivement :

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^q u_kv_k &= \sum_{k=p}^q (s_k-s_{k-1})v_k\\ &= \sum_{k=p}^q s_kv_k-\sum_{k=p}^q s_{k-1}v_k\\ &= \sum_{k=p}^q s_kv_k-\sum_{k=p-1}^{q-1} s_kv_{k+1}\\ &= \sum_{k=p}^{q-1} s_k(v_k-v_{k+1})+s_qv_q-s_{p-1}v_{p-1}.\end{aligned}$$

2. On va appliquer le critère de Cauchy pour démontrer la convergence de la série. Pour cela, fixons $\varepsilon>0$ et soit N un entier tel que, pour $n\geq N$, on a $|v_n|\leq\varepsilon$. Soient $p,q\geq N$. Fixons aussi $M>0$ tel que $|s_n|\leq M$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. D'après l'écriture que nous avons obtenue à la première question et l'inégalité triangulaire, on a

$$\left|\sum_{k=p}^q u_kv_k\right|\leq M\varepsilon+M\varepsilon+\sum_{k=p}^{q-1}|s_k(v_k-v_{k+1})|.$$

Puisque $|s_k| \leq M$ et que $v_k - v_{k+1} \geq 0$, on trouve

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=p}^{q} u_k v_k\right| &\leq M\varepsilon + M\varepsilon + M\sum_{k=p}^{q-1}(v_k - v_{k+1})\\ &\leq M\varepsilon + M\varepsilon + M(v_p - v_q)\\ &\leq 3M\varepsilon.\end{aligned}$$

D'après le critère de Cauchy, la série est convergente.

3. En utilisant la question précédente, il suffit de prouver que la suite (S_n) définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$$

est bornée. Pour cela, on écrit $\sin(k\theta) = \Im m(e^{ik\theta})$ et on utilise la somme d'une série trigonométrique :

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = \Im m\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}\right).$$

Mais on a, pour $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} &= \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}\\ &= \frac{e^{i\frac{(n+1)}{2}\theta}}{e^{i\theta/2}} \times \frac{e^{-i(n+1)\theta/2} - e^{+i(n+1)\theta/2}}{e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}}\\ &= e^{in\theta/2}\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.\end{aligned}$$

Revenant à S_n, on trouve, pour $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$,

$$S_n = \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Ceci est bien bornée indépendamment de n par $\frac{1}{|\sin(\theta/2)|}$. Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors bien sûr $S_n = 0$.

Exercice 17 - Décomposition - avec Abel - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

1. On a, au voisinage de $+\infty$,

$$\sin\left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}\right) = \frac{\sin n}{n^{1/3}} - \frac{\sin^3 n}{6n} + v_n,$$

où $v_n = O\left(\frac{1}{n^{5/3}}\right)$. D'après la règle d'Abel, $\sum \frac{\sin n}{n^{1/3}}$ converge. D'autre part, on peut écrire :

$$\sin^3 n = \frac{3}{4}\sin n - \frac{1}{4}\sin 3n.$$

Mais, toujours d'après la règle d'Abel, les séries $\sum \frac{\sin n}{n}$ et $\sum \frac{\sin 3n}{n}$ convergent, et donc $\sum \frac{\sin^3 n}{n}$ converge. Enfin, la série de terme générale v_n est absolument convergente, puisque $|v_n| \leq n^{-5/3}$ pour une constante M. Finalement, on a prouvé que la série est convergente.

2. On fait le développement du terme général au voisinage de $+\infty$:
$$u_n = \frac{(-1)^n \cos n}{\sqrt{n}} + (-1)^{n+1} \frac{\cos n \sin n}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{(-1)^n \cos n}{\sqrt{n}} + +v_n,$$
où $v_n = O(1/n^2)$. La série de terme général v_n est donc absolument convergente. D'autre part, la série de terme général $\frac{(-1)^n \cos n}{\sqrt{n}}$ est convergente (faire une transformation d'Abel). On en déduit que la série $\sum u_n$ est convergente comme somme de deux séries convergentes.

Exercice 18 - Terme général donné par un produit - *L2/Math Spé/Oral Centrale* - ⋆⋆

On va commencer par étudier la suite $\ln(u_n)$. On a, en effectuant un développement limité du logarithme,
$$\begin{aligned}\ln(u_n) &= \sum_{q=2}^{n} \ln\left(1 + \frac{(-1)^q}{\sqrt{q}}\right)\\ &= \sum_{q=2}^{n} \left(\frac{(-1)^q}{\sqrt{q}} - \frac{1}{q} + O(1/q^{3/2})\right).\end{aligned}$$
Or, les séries $\sum_{q=2}^n \frac{(-1)^q}{\sqrt{q}}$ et $\sum_{q=2}^n O(1/q^{3/2})$ convergent par, respectivement, le critère des séries alternées et par convergence absolue et comparaison à une série de Riemann. D'autre part, il est bien connu (par comparaison à une intégrale) que
$$\sum_{q=2}^{n} \frac{1}{q} = \ln n + \lambda + o(1)$$
où $\lambda \in \mathbb{R}$. On en déduit que
$$\ln(u_n) = -\ln n + \alpha + o(1)$$
soit, en prenant l'exponentielle,
$$u_n = \frac{\alpha}{n} \exp(o(1)).$$
On a donc $u_n \sim_{+\infty} \frac{\alpha}{n}$, et la série de terme général u_n est donc divergente.

Exercice 19 - Reste d'une série alternée - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

1. Il suffit de prouver que
$$\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x+2}}.$$
Mais on a
$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} &= \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})}.\end{aligned}$$

Le même calcul donne

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x+2}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}\sqrt{x+2}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}.$$

Chaque terme apparaissant au dénominateur de la deuxième égalité étant supérieur au terme correspondant de la première égalité, on obtient bien le résultat voulu.

2. On va prouver que la série $\sum_{n\geq 1} R_n$ vérifie le critère des séries alternées. D'après le critère des séries alternées lui-même, on sait que R_n est du signe de son premier terme, c'est-à-dire que R_n est du signe de $(-1)^n$. On a bien affaire à une série alternée. De plus, toujours d'après le critère des séries alternées, on sait que $|R_n|\leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. Ainsi, $(|R_n|)$ tend vers 0. Reste à prouver que $(|R_n|)$ décroît vers 0. Pour cela, on remarque que

$$\begin{aligned}|R_n| &= \frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}-\dots\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}-\frac{1}{\sqrt{n+k+1}}\right).\end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned}|R_{n+1}| &= \frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\frac{1}{\sqrt{n+3}}-\dots\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+k+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+k+2}}\right).\end{aligned}$$

On trouve donc

$$|R_n|-|R_{n+1}|=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}-\frac{2}{\sqrt{n+k+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+k+2}}\right).$$

D'après le résultat de la première question, on a $|R_{n+1}|\leq |R_n|$. On peut donc appliquer le critère des séries alternées. La série $\sum_n R_n$ est convergente.

Exercice 20 - Critère de Cauchy - *Math Spé* - ⋆⋆⋆

Pour chaque entier $k\geq 1$, on va considérer les entiers n tels que :

$$2k\pi-\frac{\pi}{3}\leq \ln n\leq 2k\pi+\frac{\pi}{3}.$$

Pour de tels entiers, on a $\cos(\ln n)\geq 1/2$. Posons donc :

$$n_k=E\left(\exp\left(2k\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right),\ m_k=E\left(\exp\left(2k\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right),S_k=\sum_{n=n_k+1}^{m_k}\frac{\cos\ln n}{n}.$$

Si la série convergeait, on aurait $S_k\to 0$ pour $k\to\infty$. Montrons que ceci est faux. En effet, on a :

$$S_k\geq \sum_{k=n_k+1}^{m_k}\frac{1}{2m_k}\geq\frac{m_k-n_k}{2m_k}.$$

D'autre part, on sait que

$$n_k \leq \exp(2k\pi - \pi/3) \text{ et } \exp(2k\pi + \pi/3) - 1 \leq m_k \leq \exp(2k\pi + \pi/3).$$

On en déduit que

$$\frac{m_k - n_k}{2m_k} \geq \frac{e^{2k\pi+\pi/3} - e^{2k\pi-\pi/3} - 1}{e^{2k\pi+\pi/3} - 1}.$$

Par passage à la limite, on trouverait :

$$0 \geq \frac{1 - e^{-2\pi/3}}{2},$$

ce qui est faux !

Exercice 21 - Un cran au-dessus ! - *Math Spé* - ⋆⋆⋆

1. On écrit $e = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k!}$ et $\frac{1}{e} = \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{k!}$. On décompose alors $n!e$ en $a_n + b_n$, où :

$$a_n = \sum_{k\leq n} \frac{n!}{k!} \text{ et } b_n = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\dots(n+p)}.$$

Observons que a_n est un entier. En outre, si $k \leq n-2$, $n!/k!$ est un entier pair (car il est divisible par $n(n-1)$ qui est pair). On en déduit que a_n est de parité opposée à n, et $\cos(\pi a_n) = (-1)^{n+1}$. Utilisant la formule de trigonométrie habituelle, on obtient $\sin(e\pi n!) = (-1)^{n+1}\sin(\pi b_n)$. Remarquons ensuite que la suite (b_n) est positive, décroissante, et qu'elle tend vers 0 grâce à la majoration :

$$b_n \leq \sum_{p\geq 1} \frac{1}{(n+1)^p} \leq \frac{1}{n}.$$

Il en est de même de la suite $\sin(\pi b_n)$, et donc la série de terme général $\sin(n!e\pi)$ converge par application du criète des séries alternées.
Un raisonnement similaire montre qu'au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\sin(n!\pi/e) \sim \frac{\pi}{n}.$$

Cette série diverge.

2. Observons d'abord que la série converge absolument si $\alpha > 1$, et diverge grossièrement si $\alpha \leq 0$. Posons $I_p = \{n \in \mathbb{N};\ E(\sqrt{n}) = p\}$. Posons $v_p = \sum_{n\in I_p} u_n = \sum_{r=0}^{2p} \frac{(-1)^p}{(p^2+r)^\alpha}$. De l'encadrement :

$$\frac{2p+1}{(p^2+2p)^\alpha} \leq |v_p| \leq \frac{2p+1}{p^{2\alpha}},$$

on tire que $|v_p| \sim \frac{2}{p^{2\alpha-1}}$. Lorsque $\alpha \leq 1/2$, la suite (v_p) ne tend pas vers 0, et le critère de Cauchy ne peut pas être respecté pour la série $\sum u_n$ qui est donc divergente. Si maintenant $\alpha > 1/2$, on a au voisinage de $+\infty$:

$$v_p = \frac{2(-1)^p}{p^{2\alpha-1}} + O\left(\frac{1}{p^{2\alpha}}\right).$$

Ceci prouve que la série de terme général v_p est (semi-)convergente. Posons enfin, pour n et p des entiers, $U_n = \sum_{k=1}^n u_n$ et $V_p = \sum_{k=1}^p v_p$. Si $p_n = E(\sqrt{n})$, l'inégalité triangulaire donne :

$$|U_n - V_{p_n}| \leq v_{p_n}.$$

On passe à la limite quand n tend vers $+\infty$ pour prouver que la série converge !

Exercice 22 - Convergence d'une série dont le terme général est un produit - *L2/Math Spé* - ⋆⋆⋆

On a

$$\begin{aligned}\ln(u_n) &= \sum_{q=2}^n \ln\left(1+\frac{(-1)^q}{\sqrt{q}}\right)\\ &= \sum_{q=2}^n \frac{(-1)^q}{\sqrt{q}} - \frac{1}{2q} + O\left(\frac{1}{q^{3/2}}\right).\end{aligned}$$

On reconnait ici deux séries convergentes et une série divergente dont l'estimation des sommes partielles est bien connue. Précisément, on $\sum_{q=2}^n \frac{(-1)^q}{\sqrt{q}}$ qui admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$, $\sum_{q=2}^n O\left(\frac{1}{q^{3/2}}\right)$ aussi et $\sum_{q=2}^n \frac{1}{q} = \ln(n) + D_n$, où (D_n) admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$. On peut donc écrire que :

$$u_n = -\frac{1}{2}\ln n + C_n$$

avec (C_n) qui admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$, que l'on note C. Prenons l'exponentielle, on trouve que

$$u_n = \frac{\exp(C_n)}{\sqrt{n}} \sim \frac{e^C}{\sqrt{n}}.$$

La série de terme général (u_n) est donc divergente.

Calculs de somme

Exercice 23 - Avec des racines - *L2/Math Spé* - ⋆

On a affaire à une série télescopique un peu compliquée. Les simplifications se font sur l'écriture de 3 termes consécutifs. On prouve donc que la série converge, et que sa somme fait : $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 24 - Exponentielle ! - *L2/Math Spé* - ⋆

On va se ramener au fait que :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} = \frac{1}{e}.$$

Pour cela, on va décomposer le polynôme X^3 dans la base $1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2)$. En raisonnant d'abord avec le terme de plus haut degré, puis celui juste après, etc..., on trouve :

$$X^3 = X(X-1)(X-2) + 3X(X-1) + X.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1}\frac{n^3}{n!} &= \sum_{n\geq 1}\frac{n(n-1)(n-2)}{n!}+3\sum_{n\geq 1}n(n-1)n!+\sum_{n\geq 1}\frac{n}{n!}\\ &= \sum_{n\geq 3}\frac{1}{(n-3)!}+\sum_{n\geq 2}\frac{3}{(n-2)!}+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n-1)!}\\ &= 5e.\end{aligned}$$

Exercice 25 - Elimination imprévue - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

Il faut utiliser la formule suivante :

$$\arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)=\arctan\left(\frac{1}{k}\right)-\arctan\left(\frac{1}{k+1}\right),$$

qu'on peut prouver par exemple en appliquant la fonction tangente des deux côtés de l'égalité et utiliser la formule $\tan(a-b)=\dots$. On en déduit, par procédé standard d'élimination :

$$\sum_{k=1}^{n}\arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)=\arctan(1)-\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)\to\frac{\pi}{2}.$$

Exercice 26 - Série harmonique alternée - *L2/Math Spé* - ⋆

1. Remarquons d'abord par récurrence sur n que la dérivée n-ième de $f(t)=\ln(1+t)$ est :
$$f^{(n)}(t)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+t)^n}.$$
On va appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à cette fonction entre 0 et 1. Remarquons que si $t\in[0,1]$, on a :
$$\left|f^{(n)}(t)\right|\leq(n-1)!$$
On a donc :
$$\left|f(1)-f(0)-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{n!}\right|\leq\frac{1}{n},$$
ce qui en remplaçant les dérivées successives en zéro donne :
$$\left|\ln(2)-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right|\leq\frac{1}{n}.$$
Faire tendre n vers $+\infty$ donne le résultat.
2. Avec l'indication, il vient :
$$U_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=\int_0^1\left(\sum_{k=1}^{n}(-t)^{k-1}\right)dt=\int_0^1\frac{1-(-t)^n}{1+t}dt.$$
Or, $\int_0^1\frac{dt}{1+t}=\ln 2$, et
$$\left|\int_0^1\frac{(-t)^n}{1+t}dt\right|\leq\int_0^1 t^n dt=\frac{1}{n+1}.$$
Il vient $|U_n-\ln 2|\leq\dfrac{1}{n+1}$, ce qui est bien le résultat attendu.

Exercice 27 - **Par regroupement !** - *Math Spé* - ⋆⋆⋆

Contrairement à ce qu'on pourrait penser à première vue, la série n'est pas alternée. On peut prouver sa convergence à l'aide d'un développement limité du terme général. Toutefois, ceci ne permet pas de calculer la somme. Pour ce dernier problème, il faut regrouper deux par deux (astuce !). En effet, on a :

$$v_n = u_{2n} + u_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n} = \frac{-1}{2n(2n+1)}.$$

On ne change pas la nature d'une série DONT LE TERME GÉNÉRAL TEND VERS 0 en regroupant un nombre BORNÉ de termes. Ainsi, les séries de terme général u_n et v_n sont de même nature, et en plus elles ont même somme. Or, il est clair que la série de terme général v_n est convergente (comparaison à une série de Riemann). En outre, on peut calculer la somme de cette série. Or,

$$v_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n}.$$

On a donc :

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{p=2}^{2n+1} \frac{1}{p} - \sum_{1}^{n} \frac{1}{p}.$$

Utilisant $\sum_1^n \frac{1}{p} = \ln n + \gamma + o(1)$, ($\gamma$ est la constante d'Euler), on a :

$$V_n = \ln(2n+1) - 1 - \ln(n) + o(1).$$

Ainsi,

$$V_n \to \ln(2) - 1.$$

Estimation des sommes partielles et du reste

Exercice 28 - **Très vite !** - *L2/Math Spé* - ⋆

1. On appliquer par exemple la règle de d'Alembert (ce qui est légitime puisqu'on a affaire à une série à termes positifs). Observant que
$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{1}{25} \times \frac{2k-1}{2k+1} \to \frac{1}{25}$$
on en déduit que la série de terme général u_n est convergente.
2. L'équation précédente montre qu'en réalité
$$\frac{u_{k+1}}{u_k} \leq \frac{1}{25}.$$
Par récurrence, on obtient que
$$u_{n+k+1} \leq 25^k u_{n+1}.$$
Ainsi,
$$R_n \leq u_{n+1} \times \sum_{k=0}^{+\infty} 25^{-k} = \frac{25}{24} u_{n+1}.$$

3. Dès $n = 2$, on a $R_n < 0,001$. Une valeur approchée à 10^{-3} près est donc donnée par $u_1 + u_2 \simeq 0,202$.

Exercice 29 - Développement asymptotique de la série harmonique - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

1. Puisque la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante, on a, pour tout $k \geq 2$,
$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}. \tag{1}$$
Sommant cette relation pour k allant de 2 à n, puis ajoutant 1, on obtient :
$$1 + \int_2^{n+1} \frac{dt}{t} \leq H_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{t}.$$
Calculant l'intégrale, on trouve :
$$1 + \ln(n+1) - \ln(2) \leq H_n \leq \ln(n) + 1.$$
On en déduit que $H_n / \ln n \to 1$, et donc $H_n \sim \ln n$.
2. Nous avons
$$\begin{aligned} v_n &= H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) \end{aligned}$$
ce qui démontre que $v_n \sim_{+\infty} -\frac{1}{2(n+1)^2}$. On en déduit que la série $\sum_n v_n$ est convergente. De plus, revenant à la définition $v_n = u_{n+1} - u_n$, on voit que les sommes partielles se télescopent et que
$$\sum_{k=1}^{n} v_k = u_n - u_1.$$
3. On reprend la même méthode que pour prouver la divergence de la série harmonique, à savoir que l'on compare à une intégrale. En effet, pour tout k, on a :
$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2}.$$
Sommant cette inégalité pour k allant de n à $+\infty$, on trouve
$$\frac{1}{n} = \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \leq R_n \leq \int_{n-1}^{+\infty} \frac{t}{2t^2} = \frac{1}{(n-1)^2}.$$
On trouve finalement $R_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$.

4. Soit donc w_n tel que $H_n = \ln n + \gamma + w_n$. On sait que $(w_n) \to 0$. D'autre part, on a :

$$t_n = w_{n+1} - w_n = -\frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

d'après la question 2., soit $t_n \sim \frac{-1}{2n^2}$. On applique le critère de comparaison des séries à termes positifs : la série de terme général t_n est convergente, et on a

$$\sum_{k=n}^{+\infty} w_{k+1} - w_k \sim_{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{-1}{2k^2}.$$

Or, puisque (w_n) tend vers 0, on a

$$\sum_{k=n}^{N} w_{k+1} - w_k = w_{N+1} - w_n \to -w_n \text{ pour } N \to +\infty.$$

Ainsi, utilisant le résultat de la question précédente, on trouve

$$-w_n \sim_{+\infty} -\frac{1}{2n}, \text{ ce qui s'écrit aussi } w_n = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ceci est bien le résultat demandé.

Exercice 30 - Somme et développement asymptotique de la série des inverses des carrés - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

1. (a) On sait que $\frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha}$ pour $t \in [k, k+1]$. On intègre cette inégalité entre k et $k+1$ et on trouve la partie gauche de l'inégalité demandée. De même, on sait que $\frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$ pour $t \in [k-1, k]$, et on intègre cette inégalité.

   (b) On somme ces inégalités pour k allant de n à $+\infty$, et on trouve :

   $$\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \leq S_n \leq \int_{n-1}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha},$$

   soit encore

   $$\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leq S_n \leq \frac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}}.$$

   Puisque

   $$\frac{(n-1)^{\alpha-1}}{n^{\alpha-1}} \to 1,$$

   on en déduit le résultat demandé.

2. Une intégration par parties donne

$$\int_0^\pi f(t)\sin\big((2n+1)t/2\big)dt = (-1)^{n+1}\frac{2}{2n+1}f(\pi) + \frac{2}{2n+1}\int_0^\pi f'(t)\cos\big((2n+1)t/2\big).$$

Or,

$$\left|\int_0^\pi f'(t)\cos\big((2n+1)t/2\big)dt\right| \leq \int_0^\pi |f'(t)|dt,$$

et donc on a

$$\int_0^\pi f(t)\sin\big((2n+1)t/2\big)dt \to 0.$$

3. C'est un calcul classique. On écrit $\cos(kt) = \Re e(e^{ikt})$ et on utilise la somme d'une série géométrique de raison différente de 1 (puisque $t \in]0,\pi]$). On obtient
$$\begin{aligned} A_n(t) &= \frac{1}{2} + \Re e\left(\frac{e^{it} - e^{i(n+1)t}}{1-e^{it}}\right) = \frac{1}{2} + 2\Re e\left(e^{i(n+1)t/2}\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sin(nt/2)\cos((n+1)t/2)}{\sin(t/2)}. \end{aligned}$$
Une petite formule de trigo donne
$$A_n(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sin(t/2)} \times \big(\sin((2n+1)t/2) + \sin(-t/2)\big)$$
ce qui finalement donne le résultat.

4. On calcule l'intégrale en faisant deux intégrations par parties :
$$\begin{aligned} \int_0^\pi (at^2+bt)\cos(nt)dt &= \left[(at^2+bt)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi (2at+b)\frac{\sin(nt)}{n}dt \\ &= 0 - \left[(2at+b)\frac{-\cos(nt)}{n^2}\right]_0^\pi - \int_0^\pi 2a\frac{\cos(nt)}{n^2}dt \\ &= \frac{-(2a\pi+b)(-1)^n + b}{n^2}. \end{aligned}$$
Ceci vaudra $1/n^2$ pour $b = -1$ et $a = 1/2\pi$. On déduit alors
$$\int_0^\pi (at^2+bt)A_n(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)dt + S_n = S_n - \frac{\pi^2}{6}.$$

5. On a donc prouvé que
$$S_n - \frac{\pi^2}{6} = \int_0^\pi f(t)A_n(t)dt,$$
avec $f(t) = \frac{at^2+bt}{\sin(t/2)}$. Pour conclure, il s'agit de prouver que f est de classe C^1 en 0. Clairement, f est de classe C^1 sur $]0,\pi]$. Pour prouver que f est dérivable en 0 et que sa dérivée y est continue, on peut appliquer le théorème de prolongement d'une dérivée. On remarque ainsi que, pour $t \in]0,\pi]$,
$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{(2at+b)\sin(t/2) - \frac{1}{2}(at^2+bt)\cos(t/2)}{4\sin^2(t/2)} \\ &= \frac{(2at+b)(t/2+o(t^2)) - frac12(at^2+bt)(1-t^2/2+o(t^2))}{t^2+o(t^2)} \\ &= \frac{\frac{a}{2}t^2+o(t^2)}{t^2+o(t^2)} \to \frac{a}{2}. \end{aligned}$$
Par le théorème de prolongement d'une dérivée, f est de classe C^1 en 0. On peut alors appliquer le résultat des questions précédentes.

6. On a
$$S_n-\frac{\pi^2}{6}=-\sum_{k\geq n+1}\frac{1}{n^2}=-\frac{1}{n}$$
d'après la première question.

Exercice 31 - Somme de logarithmes - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

Pour $k\geq 1$, puisque la fonction $\ln^2$ est croissante sur $[1,+\infty[$, on a
$$\ln^2(k)\leq\int_k^{k+1}\ln^2(t)dt\leq\ln^2(k+1).$$
En sommant ces inégalités de $k=1$ jusque $k=n$, on trouve
$$u_n\leq\int_1^{n+1}\ln^2(t)dt\leq u_{n+1}-\ln^2(1),$$
ce qui s'écrit encore
$$\int_1^n\ln^2(t)dt\leq u_n\leq\int_1^{n+1}\ln^2(t)dt.$$
On calcule ensuite $\int_1^x\ln^2(t)dt$ par une intégration par parties
$$\begin{aligned}\int_1^x\ln^2(t)dt &= \left[t\ln^2(t)\right]_1^x-2\int_1^x\ln(t)dt\\ &= x\ln^2(x)-2[t\ln t-t]_1^x\\ &= x\ln^2(x)-2x\ln x+2x-2.\end{aligned}$$
Ainsi, on trouve
$$n\ln^2(n)-2n\ln n+2n-2\leq u_n\leq(n+1)\ln^2(n+1)-2(n+1)\ln(n+1)+2(n+1)-2.$$
Ceci prouve que $u_n\sim_{+\infty}n\ln^2(n)$. Ainsi, $\frac{1}{u_n}\sim_{+\infty}\frac{1}{n\ln^2(n)}$. Mais la série $\frac{1}{n\ln^2(n)}$ est convergente (c'est une série de Bertrand convergente, pour prouver la convergence, on compare à une intégrale, et on utilise que $\int_2^x\frac{dt}{t\ln^2 t}=-\frac{1}{\ln x}+\frac{1}{\ln 2}$ admet une limite quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 32 - Décroissance très rapide à l'infini - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

L'idée est qu'une fonction vérifiant une telle propriété décroit très vite vers 0 en $+\infty$, plus vite que n'importe quelle fonction e^{-Mx}. Concrètement, avec des quantificateurs, cela se traduit comme suit. Soit $M>0$. Alors il existe $A>0$ tel que, pour tout $x\geq A$, on a $\frac{f'(x)}{f(x)}\leq -M$. Pour $A\leq x\leq y$, on a en intégrant puis en passant à l'exponentielle, que $f(y)\leq f(x)e^{-M(y-x)}$. Si on fixe $x=A$ et si $y=n$ est un entier, on obtient que $0\leq f(n)\leq Ce^{-Mn}$, où C est une constante. Ceci prouve que la série est convergente.
Cherchons désormais un équivalent du reste. Pour $n\geq A$ et $p\geq 0$, on a
$$f(n+p)\leq f(n)e^{-Mp}.$$
Si on somme ceci pour p de 0 à $+\infty$, on trouve
$$f(n)\leq R_n\leq f(n)\sum_{p=0}^{+\infty}e^{-pM}=\frac{f(n)}{1-e^{-M}}.$$

Fixons désormais $\varepsilon > 0$. Si M est choisi de sorte que $\frac{1}{1-e^{-M}} \leq \varepsilon$, alors on peut trouver A tel que, pour tout $n \geq A$, on a

$$f(n) \leq R_n \leq (1+\varepsilon)f(n).$$

Ceci prouve que $f(n) \sim_{+\infty} R_n$.

Produit de Cauchy et permutation des termes

Exercice 33 - Somme d'une série par produit de Cauchy - *L2/Math Spé* - $\star$

L'exercice repose sur la définition de l'exponentielle par une série : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\exp(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}.$$

1. Pour chaque $n \geq 0$, w_n est positif et satisfait

   $$w_n \leq 2^{-n}\exp(4).$$

   Puisque la série de terme général $2^{-n}\exp(4)$ est convergente, il en est de même de la série de terme général w_n.
2. Écrivons le produit de Cauchy de $\sum_{k\geq 0}\frac{b^k}{k!}$ par $\sum_{k\geq 0} a^k$, où a et b sont des réels. Ces deux séries sont absolument convergentes, et on a :

   $$\exp(b) \times \frac{1}{1-a} = \left(\sum_{k\geq 0}\frac{b^k}{k!}\right) \times \left(\sum_{k\geq 0} a^k\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

   où u_n est défini par

   $$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{b^k}{k!}a^{n-k} = a^n \sum_{k=0}^n \frac{(b/a)^k}{k!}.$$

   Pour $a = 1/2$ et $b = 2$, on trouve $w_n = u_n$. Ainsi, on a

   $$\sum_{n\geq 0} w_n = \exp(2) \times \frac{1}{1-1/2} = 2\exp(2).$$

Exercice 34 - Somme d'une série et produit de Cauchy - *L2/Math Spé* - $\star$

D'après la formule classique pour les séries géométriques, on a

$$\frac{1}{1-a} = \sum_{n\geq 0} a^n \text{ et } \frac{1}{1-b} = \sum_{n\geq 0} b^n.$$

Ces deux séries sont absolument convergentes puisque $|a| < 1$ et $|b| < 1$. On peut faire le produit de Cauchy et donc on obtient que

$$\frac{1}{1-a} \times \frac{1}{1-b} = \sum_{n\geq 0} w_n \text{ avec } w_n = \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k}.$$

Si $a = b$, on trouve directement que $w_n = \sum_{k=0}^n a^n = (n+1)a^n$. Si $a \neq b$, alors il faut utiliser la factorisation

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \times \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$$

qui donne le résultat.

Exercice 35 - Séries semi-convergentes et produit de Cauchy - *Math Spé/Agreg interne* - ⋆⋆

1. La convergence de $\sum u_n$ se démontre par une simple application du critère des séries alternées. La série ne converge pas absolument, par application du critère de Riemann.
2. Le terme général de la série produit de Cauchy est donné par :

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n+1-k)}}.$$

   Soit $u(x) = (x+1)(n+1-x)$. Sa dérivée est $u'(x) = n - 2x$. Une étude rapide montre donc que sur $[0, n]$, u atteint son minimum en $n/2$. On obtient donc

$$|v_n| \geq n \times \frac{1}{\sqrt{(n/2+1)(n/2+1)}} \geq C > 0.$$

   Ainsi, v_n ne tend pas vers 0 et le produit de Cauchy de ces deux séries ne converge pas.
3. Il est d'abord clair que σ est une bijection de $\mathbb{N}$. En effet, tout nombre est ou bien pair, et donc de la forme 2p, ou bien impair, et ce sous cas se divise en congru à 1 modulo 4 ou congru à 3 modulo 4. Posons

$$w_n = u_{\sigma(3n)} + u_{\sigma(3n+1)} + u_{\sigma(3n+2)} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} - \frac{1}{\sqrt{4n+2}} - \frac{1}{\sqrt{4n+4}},$$

   de sorte que

$$w_n \sim \frac{C}{\sqrt{n}}$$

   avec $C < 0$. Ainsi, la série de terme général w_n diverge. Or,

$$\sum_{n=1}^{N} w_n = \sum_{n=1}^{3N} u_{\sigma(n)}.$$

   La série de terme général $u_{\sigma(n)}$ est donc aussi divergente.

Applications

Exercice 36 - Formule de Stirling - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

Un petit calcul prouve que :

$$v_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1.$$

On effectue un développement limité de v_n -il faut pousser le développement du logarithme jusqu'à l'ordre 3 - et on a :

$$v_n = \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série de terme général v_n est donc convergente. Maintenant, écrivant $\ln(u_{n+1}/u_n) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ et donc

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N-1} v_n &= \sum_{n=1}^{N-1} \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)\\ &= \ln(u_N) - \ln(u_1).\end{aligned}$$

Ainsi, la suite $\ln(u_n)$ converge vers un réel l, et en passant à l'exponentielle, on trouve que la suite (u_n) converge vers un réel C strictement positif. Revenant à la définition de (u_n), ceci donne le résultat.

Exercice 37 - Etude d'une suite récurrente - *L2/Math Spé* - ⋆⋆⋆

1. La fonction $x \mapsto \sin x$ envoie $]0,\pi]$ dans $]0,1] \subset]0,\pi]$. On en déduit que $u_n \in]0,\pi]$ pour tout n. En outre, la fonction sin est croissante sur $]0,\pi]$, ce qui prouve que la suite (u_n) est monotone, et on a $\sin x \leq x$, ce qui entraîne que la suite est décroissante. Comme elle est minorée (par 0), elle converge vers une solution de $\sin x = x$ dans $[0,\pi]$: il n'y qu'une seule solution à cette équation, 0, et donc la suite (u_n) converge vers 0.
2. Puisque $u_n \to 0$, $\sin u_n \sim u_n$ et donc $u_{n+1}/u_n \sim 1$. Ceci donne encore :
$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n + u_{n+1}}{u_n} = 2.$$
3. Puisque u_n tend vers 0, il est légitime de calculer le développement limité de $\sin u_n$ quand n tend vers $+\infty$:
$$u_{n+1} = \sin u_n = u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3).$$
On en déduit que
$$\frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^3} = \frac{1}{6} + o(1),$$
ce qui est le bon résultat.
4. On met tout au même dénominateur, et on factorise :
$$\begin{aligned}\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} &= \frac{(u_n - u_{n+1})}{u_n^2 u_{n+1}} \frac{(u_n + u_{n+1})}{u_{n+1}}\\ &\sim \frac{(u_n - u_{n+1})}{u_n^3} \frac{(u_n + u_{n+1})}{u_n}\\ &\sim \frac{1}{3}.\end{aligned}$$
5. Posons $v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$. La question précédente dit que $v_n \sim 1/3$. Par la règle de comparaison des sommes partielles des séries divergentes à terme positif, on a :
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \sim_{N\to\infty} \sum_{1}^{N} \frac{1}{3} = \frac{N}{3}.$$

Maintenant, la série qui apparait à gauche est télescopique, et on obtient :

$$\frac{1}{u_{n+1}^2}-\frac{1}{u_1^2}\sim\frac{N}{3}.$$

Prenant la racine carrée, et par théorème de composition des limites, on obtient bien le résultat demandé !

Exercice 38 - **Irrationalité** - *Math Spé/L2/Agreg interne* - $\star\star$

Notons S_n la somme partielle $S_n=\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^k}{(2k)!}$. Par le critère des séries alternées,

$$S_{2n-1}<\cos(1)<S_{2n}=S_{2n-1}+\frac{1}{(4n)!}.$$

On multiplie ces deux inégalités par $(4n-2)!$ pour trouver

$$(4n-2)!S_{2n-1}<(4n-2)!\cos(1)<(4n-2)!S_{2n-1}+\frac{1}{4n(4n-1)}.$$

Posons $N=(4n-2)!S_{2n-1}$ qui est un entier. On a donc

$$N<(4n-2)!\cos(1)<N+1.$$

Or, si $\cos(1)$ était irrationnel et s'écrivait donc p/q, pour n assez grand, $(4n-2)!\cos(1)$ serait entier (car $(4n-2)!$ est un multiple de q si $4n-2\geq q$). $(4n-2)!\cos(1)$ serait donc un entier strictement compris entre deux entiers consécutifs. C'est absurde !

Révisions

Exercice 39 - **Vrai/Faux** - *L2/Math Spé* - $\star\star$

1. Faux ! Prendre $u_n=1/n^2$.
2. Faux ! Prendre $u_{2n}=1/n^2$ et $u_{2n+1}=2/n^2$. On a toujours $u_{2n+1}>u_{2n}$, et pourtant la série converge.
3. Vrai ! Pour $n>n_0$, on a $0\leq u_n\leq 1$ et donc $0\leq u_n^2\leq u_n\leq 1$. On a convergence par majoration (le terme général est positif).
4. Faux ! Prendre $u_n=\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{n\ln n}$.
5. Vrai ! On a convergence absolue, car à partir d'un certain rang, $|u_n|\leq 2/n^2$.

Si vous trouvez une erreur, une faute de frappe, etc... dans ces exercices, merci de la signaler à geolabo@bibmath.net Venez poursuivre le dialogue sur notre forum :

http://www.bibmath.net/forums