

INTERROGATION 2

Physique 3.

Groupe

Nom:.....

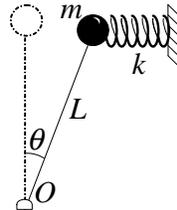
Prénom:.....

Questions

Le système ci-contre peut tourner librement autour du point O . ($\theta \ll 1$.)

La boule est supposée ponctuelle et la tige sans masse. ($\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$.)

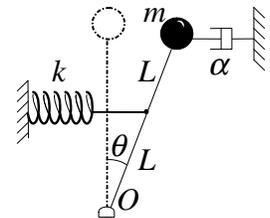
1. Trouver l'énergie cinétique T , l'énergie potentielle U , et l'énergie totale E .
2. Trouver l'équation du mouvement à l'aide de l'équation de conservation.
3. Trouver la pulsation propre ω_0 sachant que $m=1\text{kg}$, $L=1\text{m}$, $k=36\text{N/m}$, $g=10\text{m/s}^2$.



Le système précédent est modifié comme le montre la figure ci-contre.

Le système est soumis à présent à un frottement de coefficient α . ($\theta \ll 1$.)

1. Trouver l'énergie cinétique T , l'énergie potentielle U , et le Lagrangien \mathcal{L} .
2. Trouver la fonction de dissipation \mathcal{D} puis l'équation du mouvement en utilisant \mathcal{L} .
3. Trouver la nature du mouvement sachant que $\alpha=4\text{N.s/m}$.
4. Trouver le temps τ au bout duquel l'amplitude est divisée par 2 si $\alpha=2\text{N.s/m}$.



Réponses

1. $T = \frac{1}{2}m(L\dot{\theta})^2$. (0,25)

$$U = U_{ressort} + U_m \approx \frac{1}{2}k(L \sin \theta)^2 - mg(L - L \cos \theta) \quad (0,25) \approx \frac{1}{2}k(L\theta)^2 - \frac{1}{2}mgL\theta^2. \quad (0,25)$$

$$E = T + U = \frac{1}{2}mL^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(kL^2 - mgL)\theta^2 \quad (0,25)$$

2. L'équation de conservation $\frac{dE}{dt} = 0$ (0,25) nous donne $mL^2\ddot{\theta} + (kL^2 - mgL)\theta\dot{\theta} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{kL - mg}{mL}\dot{\theta} = 0$. (0,5)

3. La pulsation propre est donc $\omega_0 = \sqrt{\frac{kL - mg}{mL}}$ (0,25). A.N: $\omega_0 = \sqrt{26}\text{rad/s}$. (2)

1. $T = \frac{1}{2}m(2L\dot{\theta})^2$. (0,25)

$$U = U_{ressort} + U_m \approx \frac{1}{2}k(L \sin \theta)^2 - mg(2L - 2L \cos \theta) \quad (0,25) \approx \frac{1}{2}k(L\theta)^2 - mgL\theta^2. \quad (0,25)$$

$$\mathcal{L} = T - U = 2mL^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(kL^2 - 2mgL)\theta^2 \quad (0,25)$$

2. $\mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha v^2 = \frac{1}{2}\alpha(2L\dot{\theta})^2$ (0,25). L'équation du mouvement est $\frac{d}{dt}(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\theta}} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \frac{kL - 2mg}{4mL}\theta = 0$. (0,5)

3. La nature du mouvement est donnée par le signe de $\lambda^2 - \omega_0^2$. (0,25)

$$\lambda = \frac{\alpha}{2m} \quad (0,5), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{kL - 2mg}{4mL}} \quad (0,5). \quad \text{A.N: } \lambda^2 - \omega_0^2 = 4 - 4 = 0. \quad (0,5) \Rightarrow \text{Le mouvement est en régime critique.} \quad (0,5)$$

4. Le temps nécessaire est τ tel que $Ae^{-\lambda(t+\tau)} = \frac{1}{2}Ae^{-\lambda t} \Rightarrow \tau = \frac{\ln 2}{\lambda}$. (0,5) A.N: $\tau = \frac{\ln 2}{1} \approx 0,7\text{s}$. (0,5)