ENPEI

ROUIBA LE 21/01/2001

ANALYSE II - PREMIER PARTIEL

(Sans documents – <u>Durée 2h00</u>)

Les exercices I, II et III sont obligatoires . Deux parmi les autres exercices (de l'exercice IV à l'exercice XI) sont laissés au choix de l'étudiant.

1) Calculer l'intégrale suivante $I = \int \frac{dx}{\cos x - \cos 3x}$

II-) Intégrer l'équation différentielle suivante $(x^2 \cos x - y)dx + xdy = 0$

III-) Intégrer l'équation $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = 0$ ayant pour solution particulière $y_1 = x$

IV-) Calculer l'intégrale $M = \int x^2 \sqrt{x^2 + 9}\, dx$

V-) Trouver la courbe intégrale de l'équation différentielle $y' = \frac{1 - 3x - 3y}{1 + x + y}$

passant par le point M(1,1)

VI-) Intégrer l'équation $y' - \frac{2xy}{1 + x^2} = 4\sqrt{\frac{y}{1 + x^2}}\, Arctgx$

VII-) Une fois résolue l'équation homogène correspondant à l'équation $y' + \frac{xy}{1 - x^2} = Arc\sin x + x$
déterminer l'intégrale de cette dernière équation en utilisant la méthode de la variation de LAGRANGE.

VIII-) Résoudre l'une (et une seule - au choix) des deux équations suivantes

- $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x$
- $y''' - 5y'' + 6y' = x^2 + x + 1$

IX-) Résoudre l'équation d'EULER : $x^2 y'' - 3xy' + 4y = \frac{x^3}{2}$, $y(1) = \frac{1}{2}$, $y(4) = 0$

X-) Calculer le volume du corps obtenu à la suite de la rotation (autour de l'axe Oy) de la surface délimitée par

* la droite $x=0$; * la droite $y=2x$; * et la partie de la circonférence $(x-3)^2+(y-9)^2=9$

(Faire un schéma de ce corps).

XI-) Déterminer d'une part l'équation de la courbe α orthogonale à la courbe β d'équation $y^3=3x^2$ et passant par le point M(4,6) et d'autre part, l'équation de l'enveloppe aux courbes orthogonales à cette courbe β. Faire un schéma (très approximatif dans le plan Oxy) compte tenu des résultats obtenus.

CORRIGE DE L'ANALYSE II- PARTIEL N°1

EX. I - $I = \int \frac{dx}{\cos x - \cos 3x}$; on a ici cosx-cos3x=cosx-(cos2x.cosx-sin2x.sinx)

cosx-cos3x=cosx{1-cos²x+3sin²x}=4sin²x.cosx

Pour obtenir ce dernier résultat on peut appliquer aussi la formule

$$\text{cosa-cosb}= 2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{b-a}{2}$$

qui dans notre cas s'écrit : $\cos x - \cos 3x = 2\sin 2x.\sin x = 2(2\sin x conx)\sin x = 4\sin^2 x\cos x$

Donc en reportant on aura :

$$4I = \int \frac{dx}{\sin^2 x\cos x}$$

Pour calculer cette dernière intégrale on peut opérer de plusieurs manières dont on cite les deux démarches les plus simples :

1ère démarche :

$$4I = \int \frac{dx}{\sin^2 x\cos x} = \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \left\{\begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \\ \cos^2 x = 1 - t^2 \end{matrix}\right\} = \int \frac{dt}{t^2(1-t^2)} = \int\left[\frac{1}{t^2} + \frac{1}{1-t^2}\right]dt$$

soit $4I = -\frac{1}{t} + \int\left[\frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t}\right]dt = -\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right]dt$ car a=b=1/2

Donc on trouve

$$I = -\frac{1}{4\sin x} + \frac{1}{8}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) + C = -\frac{1}{4\sin x} + \frac{1}{8}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) + C$$

2ème démarche :

$$4I = \int \frac{dx}{\sin^2 x\cos x} = \int \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)dx}{\sin^2 x\cos x} = \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x} + \int \frac{dx}{\cos x}$$

On a ici $$\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x} = \int \frac{d\sin x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin x}$$

et

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \left\{\begin{matrix} t = tg\frac{x}{2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{matrix}\right\} = \int \frac{2dt}{1-t^2} = \int\left[\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right]dt = \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) = \ln\left(\frac{1+tg\frac{x}{2}}{1-tg\frac{x}{2}}\right)$$

Remarquons ici que

$$\ln\left(\frac{1+tg\frac{x}{2}}{1-tg\frac{x}{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+tg\frac{x}{2}}{1-tg\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)$$

Ainsi en reportant ces valeurs des intégrales on retrouve le résultat trouvé à la 1ère démarche.

Remarque : Les transformations t=shx et t=tg(x/2) si elles sont opérées au départ elles conduisent à des calculs presque inextricables.

CORRIGE DE L'ANALYSE II- PARTIEL N°1

EX. II- $\left[x^2\cos x - y\right]dx + xdy = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} M(x,y) = x^2\cos x - y \\ N(x,y) = x \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial M}{\partial y} = -1 \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = 1 \end{Bmatrix}$

L'équation différentielle n'étant donc pas une différentielle totale on calcule par conséquent les deux quantités suivantes :

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{x^2\cos x - y}(-1-1) = h(x,y) \qquad et \qquad \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{-2}{x} = f(x)$$

On cherchera donc un facteur intégrant ne dépendant que de la variable x :

$$\mu = e^{\int f(x)dx} = e^{\int \frac{-2dx}{x}} = e^{\ln\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x^2}$$

Multiplions l'équation différentielle proposée par $\mu(x)$ et posons après cela :

* Soit $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{x}{x^2} = \dfrac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad u = \dfrac{y}{x} + \varphi(x) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2} + \varphi'(x) = \dfrac{1}{x^2}(x^2\cos x - y)$

d'où $\varphi'(x)=\cos x$ et donc $\varphi(x)=\sin x+C_1$. Puisque u est une constante , on trouve alors l'intégrale générale de l'équation proposée : **y=x(C-sinx)**

* Soit

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x - \frac{y}{x^2} \quad \Rightarrow \quad u = \sin x + \frac{y}{x} + \varphi(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x} + \varphi'(y) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \varphi'(y) = 0$$

d'où $\varphi(y)=C_1$ et donc **y=x(C-sinx)**

EX. III-

$$\begin{cases} y'' - \dfrac{y'}{x} + \dfrac{y}{x^2} = 0 \\ y_1 = x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y_2 = x\int \frac{e^{-\int \frac{-dx}{x}}}{x^2} = x\int \frac{dx}{x} = x\ln x \quad \Rightarrow \quad y = C_1x + C_2x\ln x = x(C_1 + C_2\ln x)$$

EX. IV- $M = \int x^2\sqrt{x^2+9} = \int \dfrac{x^2(x^2+9)dx}{\sqrt{x^2+9}} = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\sqrt{x^2+9} + \lambda\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$

Dérivons les deux derniers membres :

$$\frac{x^4 + 9x^2}{\sqrt{x^2+9}} = (3Ax^2 + 2Bx + C)\sqrt{x^2+9} + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\frac{x}{\sqrt{x^2+9}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+9}}$$

soit $x^4 + 9x^2 = (3Ax^2 + 2Bx + C)(x^2+9) + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + \lambda$; d'où par identification on trouve : A=1/4 , B=0 , C=9/8 , D=0 et λ=-81/8 et par conséquent :

$$M = \left(\frac{3}{4}x^3 + \frac{9}{8}x\right)\sqrt{x^2+9} - \frac{81}{8}\ln\left(x + \sqrt{x^2+9}\right) + C$$

EX. V- $y' = \dfrac{1-3x-3y}{1+x+y} \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad Poser \quad x + y = u$ et donc

$$u' - 1 = \frac{1-3u}{1+u} \quad \Rightarrow \quad \frac{2-2u}{1+u} = \frac{du}{dx} \quad \Rightarrow \quad -2dx = \frac{1+u}{u-1}du = \left[1 + \frac{2}{u-1}\right]du$$

On aura donc $-2x = u + \ln(u-1)^2 + C \qquad soit \qquad 3x + y + \ln(x+y-1)^2 = C$

Pour la courbe passant par M(1,1) on aura : C=4 et par conséquent l'équation de cette courbe sera

$3x+y+\ln(x+y-1)^2=4$

CORRIGE DE L'ANALYSE II- PARTIEL N°1

EX. VI - $y'-\dfrac{2xy}{1+x^2}=4\sqrt{\dfrac{y}{1+x^2}}arctgx$ *Posons* $y=uv \Rightarrow y'=u'v+uv'$

D'où $u'v+uv'-\dfrac{2xuv}{1+x^2}=4\sqrt{\dfrac{uv}{1+x^2}}arctgx \Rightarrow u'v+u\left(v'-\dfrac{2xv}{1+x^2}\right)=4\sqrt{\dfrac{uv}{1+x^2}}arctgx$

Choisissons v telle que la parenthèse du premier membre soit nulle

$\dfrac{dv}{v}=\dfrac{xdx}{1+x^2} \Rightarrow v=1+x^2$ (il n'est pas nécessaire d'introduire ici la constante d'intégration)

Donc on aura $u'v=4\sqrt{\dfrac{uv}{1+x^2}}arctgx \Rightarrow u'=\dfrac{4\sqrt{u}arctgx}{1+x^2} \Rightarrow \dfrac{du}{2\sqrt{u}}=\dfrac{2arctgx}{1+x^2}dx$

Soit $u=(Arctg^2x+C)^2 \Rightarrow y=uv=(Arctg^2x+C)^2(1+x^2)$

EX. VII - $y'+\dfrac{xy}{1-x^2}=\arcsin x+x$ Intégrons l'équation homogène correspondante :

$y'+\dfrac{xy}{1-x^2}=0 \Rightarrow \dfrac{dy}{y}=-\dfrac{xdx}{1-x^2} \Rightarrow \ln\tilde{y}=\dfrac{1}{2}\ln(1-x^2)+\ln C \Rightarrow \tilde{y}=C\sqrt{1-x^2}$

Telle est la solution générale de l'équation homogène. Pour trouver la solution générale de l'équation proposée usant de la méthode de variation de la constante. Pour cela on cherchera y sous la forme :

y=C(x) $\sqrt{1-x^2} \Rightarrow y'=C'\sqrt{1-x^2}-\dfrac{xC}{\sqrt{1-x^2}}$. Substituons ce dernier résultat dans l'équation de départ : $C'\sqrt{1-x^2}-\dfrac{xC}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{xC}{1-x^2}\sqrt{1-x^2}=\arcsin x+x$

d'où $C'=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow C(x)=\dfrac{1}{2}(\arcsin x)^2-\sqrt{1-x^2}+\lambda$

Ainsi donc l'intégrale de l'équation proposée est $y=\left[\dfrac{1}{2}(\arcsin x)^2-\sqrt{1-x^2}+C\right]\sqrt{1-x^2}$

EX.VIII –

1ère équation : $y''+y'-2y=\cos x-3\sin x \Rightarrow k^2+k-2=0 \Rightarrow \begin{cases}k_1=1\\k_2=-2\end{cases}$

d'où l'intégrale générale de l'équation homogène correspondante : $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$

Comme α=δ , β=1 et donc α+βi=i n'est pas racine de l'équation caractéristique on posera donc :

y*=Acosx+Bsinx $\Rightarrow y^{*\prime}=-A\sin x+B\cos x \Rightarrow y^{*\prime\prime}=-A\cos x-B\sin x$

Reportons :

$(-A\cos x-B\sin x)+(-A\sin x+B\cos x)-2(A\cos x+B\sin x)=\cos x-3\sin x \Rightarrow \begin{cases}-3A+B=1\\A+3B=3\end{cases}$

soit A=0 et B=1 et donc $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}+\sin x$

2ème équation : y'''-5y''+6y'=x²+x+1 ⇒ k³-5k²+6k=0 ⇒ k(k²-5k+6)=0 ⇒ $k_1=0$, $k_2=2$ et $k_3=3$; la solution générale de l'équation homogène sera ; $\tilde{y}=C_1+C_2e^{2x}+C_3e^{3x}$

Comme α+iβ=0 est solution (simple) de l'équation caractéristique on doit chercher $\bar{y}$ (solution particulière) sous la forme

CORRIGE DE L'ANALYSE II- PARTIEL N°1

(Suite de l'EX. VIII) :

$$\bar{y} = x(Ax^2 + Bx + C) \quad \Rightarrow \quad \bar{y}' = 3Ax^2 + 2Bx + C \quad , \quad \bar{y}'' = 6Ax + 2B \quad et \quad \bar{y}''' = 6A$$

Reportons dans l'équation de départ :

$6A - 5(6Ax + 2B) + 6(3Ax^2 + 2Bx + C) = x^2 + x + 1$; d'où il vient $\begin{cases} 6A - 10B + 6C = 1 \\ -30A + 12B = 1 \\ 18A = 1 \end{cases}$ et donc

A=1/18 , B=2/9 et C=13/27 . L'intégrale générale demandée sera alors

$$y = C_1 + C_2e^{2x} + C_3e^{3x} + \frac{x^3}{18} + \frac{2x^2}{9} + \frac{13x}{27}$$

EX. IX –

$$\begin{cases} x^2y'' - 3xy' + 4y = \dfrac{x^3}{2} \\ y(1) = \dfrac{1}{2} \quad et \quad y(4) = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Posons} \quad x = e^t \quad \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = e^{-t}\dfrac{dy}{dt} = e^{-t}\dot{y} \\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\ddot{y} - \dot{y}\right) \end{cases}$$

Reportons :

$$\ddot{y} - 4\dot{y} + 4y = \frac{e^{3t}}{2} \quad \Rightarrow \quad k^2 - 4k + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = 2 \text{ (racine double)} .$$

Comme $\alpha + i\beta = 3$ n'est pas racine de l'équation caractéristique on adoptera comme forme générale de l'équation homogène $\bar{y} = e^{2t}(C_1 + C_2t)$. Recherchons la solution générale de l'équation non homogène en posant : $\tilde{y} = Ae^{3t}$ On aura alors $\dot{\tilde{y}} = 3Ae^{3t}$ *et* $\ddot{\tilde{y}} = 9Ae^{3t}$

Reportons $9Ae^{3t} - 12Ae^{3t} + 4Ae^{3t} = \dfrac{e^{3t}}{2} \quad \Rightarrow \quad A = \dfrac{1}{2}$. Ainsi donc l'intégrale générale de l'équation différentielle sera :

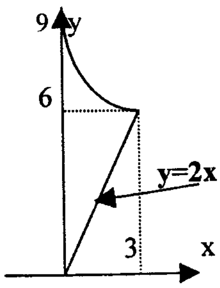
$$y = e^{2t}(C_1 + C_2t) + \frac{e^{3t}}{2} = x^2(C_1 + C_2\ln x) + \frac{x^3}{2}$$

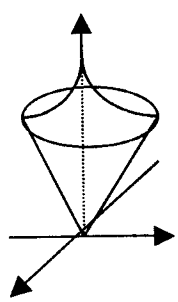
Pour x=1 $\Rightarrow$ y(1)=1/2 $\Rightarrow$ $C_1+0.5=0.5$ $\Rightarrow$ $C_1=0$

Pour x=4 $\Rightarrow$ y(4)=0 $\Rightarrow$ $16C_2\ln4+(64/2)=0$ $\Rightarrow$ $C_2=-1/(\ln2)$ d'où

$$y = \frac{-x^2}{\ln 2}\ln x + \frac{x^3}{2}$$

EX. X -





On a $V=V_1+V_2$ où

* V_1 est le volume de la partie du corps obtenu à la suite de la rotation du triangle autour de Oy
* V_2 est le volume obtenu à la suite de la rotation du quart de la circonférence.

On a dans ce cas $V_1 = 2\pi\dfrac{3x6}{2}\dfrac{3}{3} = 18\pi$

CORRIGE DE L'ANALYSE II- PARTIEL N°1

Suite de l'EX. X- :

Le volume engendré à la suite de la rotation du quart de la circonférence est

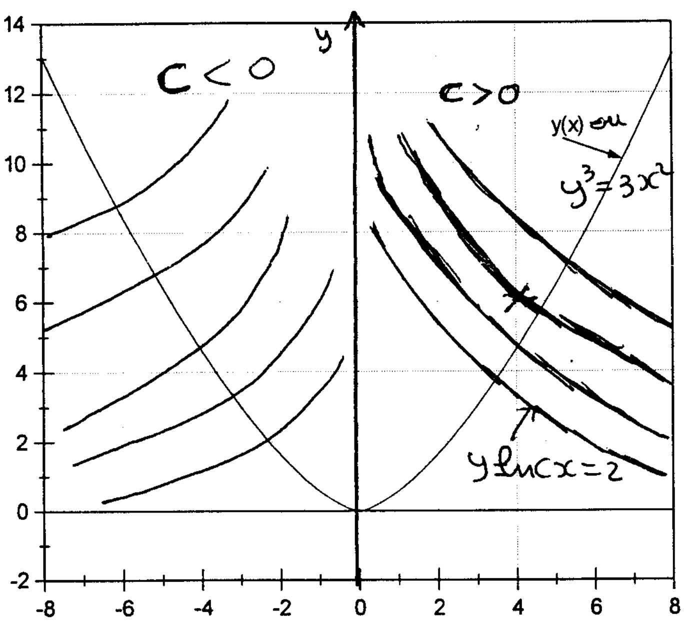
$$V_2 = \pi 3^2 x 3 - 2\pi \frac{\pi 3^2}{4}\left(3 - \frac{4x3}{3\pi}\right) = 27\pi - \frac{9\pi}{2}(3\pi - 4)$$

Reportons dans l'expression de V :

$$V = V_1 + V_2 = 18\pi + 27\pi - \frac{9\pi}{2}(3\pi - 4) \approx 45\pi - 9x2{,}7\pi \approx 20{,}7\pi$$

EX. XI –

On a $y^3=3x^2$. Dérivons : $3y^2y'=6x$. Remplaçons maintenant y' par -1/y' dans cette dernière équation : $-\frac{y^2}{y'} = 2x$. En inversant et en séparant les variables on trouve après intégration :



$$\frac{1}{y} = \frac{1}{2}\ln Cx \qquad \Rightarrow \quad y\ln Cx = 2$$

Telle est l'équation de la famille des courbes orthogonales à la courbe d'équation $y^3=3x^2$. Parmi cette famille de courbes, celle qui passe par le point (4,6) est pour laquelle on a

6ln4C=2 soit :

$$C = \frac{1}{4}\sqrt[3]{e}$$

Recherche da l'enveloppe de cette dernière famille de courbes orthogonales. Pour cela dérivons par rapport à C l'équation de cette famille ; on aura

$$y\frac{1}{Cx}x = 0 \qquad soit \quad \frac{y}{C} = 0$$

Comme $y \neq 0$ et C doit être une constante finie , on peut affirmer qu'une telle famille de courbes n'a pas d'enveloppe.

ECOLE NATIONALE PREPARATOIRE AUX ETUDES D'INGENIORAT

2ème Année Préparatoire **Année universitaire 2000/2001**

PARTIEL N°2

Module : Analyse II **Date : Mardi 08/05/2001** **Durée : 2h30**

	Exercice 1	Exercice 2	Exercice 3	Exercice 4	Exercice 5
Barème	3	5	5	3	4

Exercice 1 :

Intégrer le système d'équations différentielles suivant :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 4x+6y \\ \frac{dy}{dt} &= -3x-5y \\ \frac{dz}{dt} &= -3x-6y-5z \end{aligned}\right\}$$

Exercice 2 :

Soit la fonction f(x,y) définie par

$$f(x,y)=\begin{cases} x\,arctg\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 & si \quad x\neq 0 \\ 0 & si \quad x=0 \end{cases}$$

Etude de la continuité de cette fonction f sur R^2. Quelles sont ses dérivées partielles ? Ces dernières sont-elle continues ?.

Exercice 3 :

Soit donnée la forme différentielle suivante

$$\Omega = y^2zdx + 2xyzdy - 2xy^2dz$$

1° Démontrer que cette forme différentielle n'est pas exacte . Trouver pour cette forme un facteur intégrant de la forme $\lambda(z)$ et tel que $\lambda(1)=1$.

2° Intégrer la forme différentielle totale $\lambda(z)\Omega$ ainsi obtenue.

Exercice 4 :

La fonction z(x,y) des deux variables indépendantes (x,y) est définie (sous forme implicite) par l'équation $x\cos y + y\cos z + z\cos x = 1$

Donner l'expression de d^2z pour le système de valeurs $x=0$, $y=1$ *et* $z=0$.

Exercice 5 :

On considère la fonction f définie par $(x,y)\to f(x,y)=\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}$

1° Déterminer les points stationnaires de la fonction f lorsque les variables x et y sont liées par la contrainte $g(x,y)=x^2+y-1=0$

2° Préciser pour chacun des points stationnaires trouvés s'il s'agit d'un maximum , d'un minimum ou d'un col.

M.D.N. – E.N.P.E.I
D^{T} MATHEMATIQUES
ANALYSE II

CORRIGE " ANALYSE II - PARTIEL 2 "

<u>Exercice 1 :</u>

$$\frac{dx}{dt} = 4x + 6y \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = -3x - 5y \quad ; \quad \frac{dz}{dt} = -3x - 6y - 5z$$

Equation caractéristique

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & 0 \\ -3 & -5-\lambda & 0 \\ -3 & -6 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(5+\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 \\ -3 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -5 \\ (4-\lambda)(-5-\lambda)+18=0 \end{cases}$$

d'où

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = -2 \\ \lambda_3 = 1 \end{cases} \qquad 0.5$$

- Pour λ_1=-5 on aura le système :

$$\begin{vmatrix} 9 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} P_1 = 0 \\ P_2 = 0 \\ P_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \\ z_1 = e^{-5t} \end{cases} \qquad 0.5$$

- Pour λ_1=-2 on aura le système :

$$\begin{vmatrix} 6 & 6 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ -3 & -6 & -3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} P_1 + P_2 = 0 \\ P_1 + 2P_2 + P_3 = 0 \\ Pour \quad P_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_2 = -1 \\ \\ P_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = e^{-2t} \\ y_2 = -e^{-2t} \\ z_2 = e^{-2t} \end{cases} \qquad 0.5$$

- Pour λ_1=-2 on aura le système :

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \\ -3 & -6 & -6 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} P_1 + 2P_2 = 0 \\ P_1 + 2P_2 + 2P_3 = 0 \\ Pour \quad P_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1 = -2 \\ \\ P_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -2e^{t} \\ y_2 = e^{t} \\ z_2 = 0 \end{cases}$$

0.5

Ainsi la solution générale sera

$$x = Ae^{-2t} - 2Be^{t} \quad ; \quad y = -Ae^{-2t} + Be^{t} \quad et \quad z = Ae^{-2t} + Ce^{-5t} \qquad 1$$

avec A,B et C des constantes

<u>Exercice 2</u> :

Pour $x \neq 0$, la fonction f(x,y) est continue car elle est le produit de deux fonctions continues. 1

Lorsque $(x,y) \to (0,y_0)$ $\to$ $arctg(y_0/x) < \pi/2$ et donc $|f(x,y)| < x(\pi/2)$; d'où $f(x,y) \to 0$ pour $x \to 0$ sur R^2

Toujours pour $x \neq 0$, cette fonction est dérivable et les dérivées seront :

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = arctg\left(\frac{y}{x}\right)^2 + x\left(-\frac{2y^2}{x^3}\right)\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^4} = arctg\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{2x^2y^2}{x^4+y^4}$$

0.5 +0.5

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x\frac{2y}{x^2}\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^4} = \frac{2x^3y}{x^4+y^4}$$

Ces deux dérivées sont continues en tout point du domaine $x\neq 0$.
La fonction f(x,y) est-elle dérivable en $(0,y_0)$?

1) Si $y_0\neq 0 \Rightarrow \dfrac{f(x,y_0)-f(0,y_0)}{x-0} = arctg\left(\dfrac{y_0}{x}\right)^2 \to \dfrac{\pi}{2} \quad si \quad x\to 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial f(0,y_0)}{\partial x} = \dfrac{\pi}{2}$

Si $y_0=0 \Rightarrow \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} \to 0 \quad si \quad x\to 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0$ 1

Donc la dérivée de f(x,y) par rapport à x est continue dans R^2- (0,0) . 0.5

2) Malgré le fait que :

Si $y_0\neq 0, \quad \dfrac{f(0,y_0+h)-f(0,y_0)}{h} \to 0 \quad si \quad h\to 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial f(0,y_0)}{\partial y} = 0$

et si $y_0=0$, $\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0$ on a néanmoins (en utilisant les coordonnées polaires) 1

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3y}{x^4+y^4} = \lim_{\rho\to 0} \frac{2(\rho\cos\varphi)^3(\rho\sin\varphi)}{(\rho\cos\varphi)^4+(\rho\sin\varphi)^4} = \frac{\cos^3\varphi\sin\varphi}{\cos^{4\varphi}+\sin^4\varphi} \neq 0 \quad si \quad \varphi\neq 0 \quad et \quad \varphi\neq\frac{\pi}{2}$$

Par conséquent la dérivée de f(x,y) par rapport à la variable y est continue partout dans R^2 sauf en (0,0).

0.5

Exercice 3 :

Pour $\Omega=y^2zdx+2xyzdy-2xy^2dz$ pn a $P(x,y,z)=y^2z$, $Q(x,y,z)=2xyz$ et $R(x,y,z)=-2xy^2$; d'où :

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{\partial P}{\partial y} = 2yz; & \dfrac{\partial P}{\partial z} = y^2; & \dfrac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial z} = 2xy; & \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2yz; & \dfrac{\partial Q}{\partial y} = 2xz \\ \dfrac{\partial R}{\partial x} = -2y^2; & \dfrac{\partial R}{\partial y} = -4xy; & \dfrac{\partial R}{\partial z} = 0 \end{array}\right\}$$

On notera ici qu'au moins $\dfrac{\partial P}{\partial z} \neq \dfrac{\partial R}{\partial x}$ et donc Ω n'est pas une différentielle exacte. 1

Soit donc $\Omega_1=\mu\Omega=P_1dx+Q_1dy+R_1dz$ avec $P_1=y^2z\mu(z)$, $Q_1=2xyz\mu(z)$ et $R_1=-2xy^2\mu(z)$.
Ecrivons

$\dfrac{\partial P_1}{\partial y} = \dfrac{\partial Q_1}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad 2yz\mu(z) = 2yz\mu(z) \quad ne \quad donnera \quad rien$

$\dfrac{\partial P_1}{\partial z} = \dfrac{\partial R_1}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad y^2\mu(z)+y^2z\mu'(z) = -2y^2\mu(z) \quad \Rightarrow \quad z\mu'+3\mu$ (1)

Equation à variables séparables

$\dfrac{\partial Q_1}{\partial z} = \dfrac{\partial R_1}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad 2xy\mu+2xyz\mu' = -4xy\mu \quad \Rightarrow \quad z\mu'+3\mu = 0$ On retrouve ici (1) et donc la

seule condition est $z\mu'+3\mu=0 \Rightarrow \dfrac{\mu'}{\mu} = -\dfrac{3}{z}$ soit en intégrant $\ln|\mu|=-3\ln|z|+\ln\lambda$ c'est à dire

$\mu(z)=\lambda z^{-3}$. Comme $\mu(1)=1$ on aura alors $\lambda=1$. Donc $\mu(z) = \dfrac{1}{z^3}$. 2

Reportons ce résultat dans l'expression de $\Omega_1=df$ et intégrons :

On a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{y^2}{z^2} \Rightarrow f(x,y,z)=\dfrac{xy^2}{z^2}+\varphi(y,z) \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{2xy}{z^2}=\dfrac{2xy}{z^2}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \Rightarrow \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=0$

et donc $\varphi(y,z)=C_1$ est constante. Enfin on a (2)

$$f(x,y,z)=\frac{xy^2}{z^2}+C_1$$

Exercice 4 :

Posons F(x,y,z)=xcosy+ycosz+zcosx-1=0 . Calcul de la différentielle dF :

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz \quad , \text{ soit :}$$

$$dF=(\cos y-z\sin x)dx+(-x\sin y+\cos z)dy+(-y\sin z+\cos x)dz=0$$

D'où il vient

* $(\cos y-z\sin x)+(-y\sin z+\cos x)\dfrac{\partial z}{\partial x}=0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{z\sin x-\cos y}{\cos x-y\sin z}$ (0.5)
* $(-x\sin y+\cos z)+(-y\sin z+\cos x)\dfrac{\partial z}{\partial y}=0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x\sin y-\cos z}{\cos x-y\sin z}$ (0.5)

Calcul des dérivées partielles secondes de z(x,y).

• $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\sin x+z\cos x\right)(\cos x-y\sin z)-(z\sin x-\cos y)\left(-\sin x-y\cos z\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)}{(\cos x-y\sin z)^2}$$

Comme

$$\frac{\partial z(0,1)}{\partial x}=\frac{-\cos 1}{1}=-\cos 1 \qquad et \qquad \frac{\partial z(0,1)}{\partial y}=-1$$

On aura

$$\frac{\partial^2 z(0,1)}{\partial x^2}=\frac{(0)(1)-(-\cos 1)(\cos 1)}{1}=\cos^2 1$$ (0.5)

• $$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\left(x\cos y+\sin z\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)(\cos x-y\sin z)-(x\sin y-\cos z)\left(-\sin z-y\cos z\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)}{(\cos x-y\sin z)^2}$$

soit

$$\frac{\partial^2 z(0,1)}{\partial y^2}=\frac{(0)(1)-(-1)(-1)}{1}=-1$$ (0.5)

• $$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\sin x+\sin y\right)(\cos x-y\sin z)-(z\sin x-\cos y)\left(-\sin z-y\cos z\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)}{(\cos x-y\sin z)^2}$$

soit

$$\frac{\partial^2 z(0,1)}{\partial x \partial y} = \frac{(\sin 1)(1) - (-1)(1)}{1} = \sin 1 + 1$$ 0.5

Reportons ces trois dernières dérivées partielle dans la différentielle d'ordre deux de la fonction z(x,y) :

$$d^2 z(0,1) = \frac{\partial^2 z(0,1)}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z(0,1)}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z(0,1)}{\partial y^2} dy^2 = \cos^2 1 dx^2 + 2(\sin 1 + 1)dxdy - dy^2$$ 0.5

Exercice 5 :

Formons l'équation complémentaire (équation de LAGRANGE) :

$$F(x,y) = f(xy) - \lambda g(x,y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \lambda\left(x^2 + y - 1\right)$$

Détermination des points critiques :

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0 & \Rightarrow & \dfrac{2}{9}x - 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0 & \Rightarrow & \dfrac{y}{2} - \lambda = 0 \\ g(x,y) = 0 & \Rightarrow & x^2 + y - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{lllllll} \lambda = \dfrac{1}{9} & \Rightarrow & y = \dfrac{2}{9} & \Rightarrow & x = \dfrac{\sqrt{7}}{3} \\ \lambda = \dfrac{1}{9} & \Rightarrow & y = \dfrac{2}{9} & \Rightarrow & x = \dfrac{-\sqrt{7}}{3} \\ x = 0 & \Rightarrow & y = 1 & \Rightarrow & \lambda = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$ 1.5

On a donc trois points stationnaires : (0,1) , $\left(\frac{-\sqrt{7}}{3}, \frac{2}{9}\right)$ *et* $\left(\frac{\sqrt{7}}{3}, \frac{2}{9}\right)$. Cherchons la nature de ces points en étudiant le signe d^2F.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{2}{9} - 2\lambda \quad ; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$$ 1

d'où $\quad d^2F = \left(\frac{2}{9} - 2\lambda\right)dx^2 + \frac{dy^2}{2}$

* On a pour le point critique (0,1) et $\lambda=1/2$: $d^2F = \left(\frac{2}{9} - 1\right)dx^2 + \frac{dy^2}{2} = \frac{-7}{9}dx^2 + \frac{dy^2}{2}$. Il est facile de vérifier ici que d^2F n'a pas un signe constant et par conséquent on peut affirmer que le (0,1) est un col. On a en ce point f(x,) qui prend la valeur $f(0,1)=1/4$. 0.5

* Pour le point $\left(\frac{-\sqrt{7}}{3}, \frac{2}{9}\right)$ avec $\lambda=1/9$ on aura : $d^2F = \left(\frac{2}{9} - \frac{2}{9}\right)dx^2 + \frac{dy^2}{2} > 0$. Par conséquent ce point est un minimum : $f\left(\frac{-\sqrt{7}}{3}, \frac{2}{9}\right) = \frac{8}{81}$ **0.5**

* Pour le point $\left(\frac{\sqrt{7}}{3}, \frac{2}{9}\right)$ on aura de même $d^2F>0$ ce qui permet de dire que ce point est un minimum. **0.5**

ECOLE NATIONALE PREPARATOIRE AUX ETUDES D'INGENIORAT

$2^{ème}$ Année Préparatoire **Année universitaire 2000/2001**

SYNTHESE

Module : Analyse II **Date : Dimanche 24/06/2001** **Durée : 2h00**

	Exercice 1	Exercice 2	Exercice 3	Exercice 4
Barème	4	5	5	6

Exercice 1 :

Calculer l'intégrale curviligne $\int_{(C)} (2a-y)dx + xdy$ où la courbe C est le premier arc de la cycloïde donnée par

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

parcouru dans le sens horaire (le paramètre t étant croissant). En déduire la valeur de l'intégrale

$$\oint_{C_1} (2a - y)dx + xdy$$ où $C_1 = C \cup segment MO$ où $M(2a\pi, 0)$ et $O(0,0)$.

Exercice 2 :

Soient donnés la fonction des deux variables $f(x,y) = \sin\frac{\pi x}{2y}$ et le domaine D situé au premier quadrant (du plan xOy) et délimité par : $y \le x$, $y \le 2$ *et* $y^2 \ge x$.

a) Calculer (une fois le domaine D tracé) :

$$A = \iint_D f(x,y)dxdy$$

b) Calculer le moment d'inertie Ix du domaine D par rapport à l'axe Ox .

Exercice 3 :

Etudier la nature des séries suivantes définies par leur terme général

3-1 $a_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\frac{n}{2n-1}\right)^n$

3-2 $b_n = \frac{n^3 + 5n^2}{n!}$ (pour cette série en déduire la somme)

3-3 $c_n = (-1)^n \left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$ (Indication : Utiliser le développement limité)

Exercice 4 :

Développer en série de FOURIER la fonction $f(x)=x(\pi-x)$ sur $[0,\pi]$ .En déduire les sommes des séries numériques suivantes

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$

ECOLE NATIONALE PREPARATOIRE AUX ETUDES D'INGENIORAT

2ème Année Préparatoire

Année Scolaire : 2001/2002

Partiel n°1

Module : ...ANALYSE II....... Semestre : ... 1er ...Date : Dim. 25-11-2001... Durée : ..2h00 ....

BAREME	4 POINTS PAR EXERCICE

I- **Calculer les intégrales indéfinies suivantes :**

1) $$I_1 = \int \frac{dx}{x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1}$$

2) $$I_2 = \int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + A}$$ *a) pour* $A = 0$ *b) pour* $A = 3$

II- **Calculer l'intégrale définie suivante**

$$I_3 = \int_a^b \frac{\sin^{3/2} x}{\sin^{3/2} x + \cos^{3/2} x} dx$$

III- **Calculer les intégrales généralisées suivantes une fois la convergence de chacune d'elles est démontrée :**

1) $$I_4 = \int_0^{\infty} \frac{x}{x^4 + 1} dx$$

2) $$I_5 = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx$$

Indication pour ce dernier exercice 2) :

Démontrer au départ que $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x) dx$.

CORRECTION "PARTIEL N°1 - ANALYSE II"

I-1) Calcul de

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1}$$

On a ici

$$x^5+x^4+2x^3+2x^2+x+1=(x+1)(x^2+1)^2$$

Posons donc

$$\frac{1}{x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

D'où il vient

$1=A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x+1)(x^2+1)+(Dx+E)(x+1)$

soit $1=A(x^4+2x^2+1)+(Bx+C)(x^3+x^2+x+1)+(Dx^2+(D+E)x+E)$

On aura donc :

coefficient de x^4: $0=A+B$; coefficient de x^3 : $0=B+C$

coefficient de x^2: $0=2A+B+C+D$; coefficient de x : $0=B+C+D+E$

constante : $1=A+E+C$. La résolution de ces cinq équation donne

$$A = \frac{1}{4} \;;\; B = -\frac{1}{4} \;;\; C = \frac{1}{4} \;;\; D = -\frac{1}{2} \;;\; E = \frac{1}{2}$$

Donc il vient

$$I_1 = \int \left\{ \frac{1}{4(x+1)} + \frac{-x+1}{4(x^2+1)} + \frac{-x+1}{2(x^2+1)^2} \right\} dx$$

$$I_1 = \frac{\ln|x+1|}{4} - \frac{1}{8}\int \frac{2xdx}{x^2+1} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2+1} - \frac{1}{4}\int \frac{2xdx}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

$$I_1 = \frac{\ln|x+1|}{4} - \frac{1}{8}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + \frac{arctgx}{4} - \frac{1}{4}\int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2dx}{(x^2+1)^2}$$

$$I_1 = \frac{\ln|x+1|}{4} - \frac{\ln(x^2+1)}{8} + \frac{arctgx}{4} + \frac{1}{4(x^2+1)} + \frac{arctgx}{2} - \frac{1}{4}\int x\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$

On a la dernière intégrale qui se calcule comme suite:

$$\int x\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = -\int xd\frac{1}{x^2+1} = -\frac{x}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1} = -\frac{x}{x^2+1} + arctgx$$

D'où en reportant dans I_1 et en regroupant les mêmes termes on obtient

$$I_1 = \frac{1}{4}\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{arctgx}{2} + \frac{x+1}{4(x^2+1)} + C$$

I-2) Calcul de

$$I_2 = \int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + A}$$

a) Cas où A=0 . On effectue le changement de variable $t=tg(x/2)$ on obtient :

$$I_2 = \int \frac{dx}{2\sin x - \cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{t^2+4t-1} = 2\int \frac{dt}{(t+2)^2-5} = \frac{2}{\sqrt{5}}\int \frac{d\left(\frac{t+2}{\sqrt{5}}\right)}{\left(\frac{t+2}{\sqrt{5}}\right)^2 - 1}$$

CORRECTION "PARTIEL N°1 - ANALYSE II"

$$I_2 = \frac{2}{\sqrt{5}} \int \frac{dX}{X^2-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \left(\frac{1}{X-1} - \frac{1}{X+1} \right) dx = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{X-1}{X+1} \right| + C = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{tg(x/2)+2-\sqrt{5}}{tg(x/2)+2+\sqrt{5}} \right| + C$$

b) Cas où A=3 . On aura une fois la transformation t=tg(x/2) adoptée :

$$I_2 = \int \frac{dx}{2\sin x - \cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 3} = \int \frac{2dt}{t^2+4t-1+3(t^2+1)} = \int \frac{2dt}{4t^2+4t+2}$$

$$I_2 = \int \frac{2dt}{(2t+1)^2+1} = \int \frac{d(2t+1)}{(2t+1)^2+1} = arctg(2t+1) + C = arctg(2tg(x/2)+1) + C$$

II) Calcul de I_3

$$I_3 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{3/2} x \cdot dx}{\sin^{3/2} x + \cos^{3/2} x} = \left\{ \begin{array}{c} x = \frac{\pi}{2} - y \\ \sin x = \cos y \\ \cos x = \sin y \\ dx = -dy \end{array} \right\} = -\int_{\pi/2}^{0} \frac{\cos^{3/2} y.dy}{\sin^{3/2} y + \cos^{3/2} y} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{3/2} y.dy}{\sin^{3/2} y + \cos^{3/2} y}$$

Ainsi $\quad I_3 + I_3 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{3/2} x.dx}{\sin^{3/2} x + \cos^{3/2} x} + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{3/2} x.dx}{\sin^{3/2} x + \cos^{3/2} x} = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$

d'où $\quad I_3 = \frac{\pi}{4}$

III-1) Calcul de I_4 . Nature de convergence :

$\lim_{x \to \infty} x^2 \frac{x}{x^4+1} = 1$: comme p=3 et la limite est égale à 1 on a I_4 qui converge . Donc

$$I_4 = \lim_{M \to \infty} \int_0^M \frac{xdx}{x^4+1} = \lim_{M \to \infty} \int_0^M \frac{dx^2}{2((x^2)^2+1)} = \lim_{M \to \infty} \frac{1}{2} arctg(x^2) \Big|_0^M = \frac{\pi}{4}$$

2) Soit p un nombre réel répondant à : 0<p<1 . On a

$$K = \lim_{x \to 0^+} x^p \ln(\sin x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{x^{-p}} = \left\{ \begin{array}{cc} \lim ite & de \\ type & \frac{0}{0} \end{array} \right\} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-px^{-p-1}}$$

$$K = \lim_{x \to 0^+} -\frac{1}{p} x^{1+p} \frac{\cos x}{\sin x} = -\frac{1}{p} \lim_{x \to 0^+} x^p \cos x = 0$$

k étant une quantité finie et p<0 alors l'intégrale I_5 est convergente

$$I_5 = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx = \left\{ \begin{array}{c} x = \frac{\pi}{2} - y \\ dx = -dy \end{array} \right\} = -\int_{\pi/2}^{0} \ln(\cos y) dy = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos y) dy = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x) dx = I_5$$

C.Q.F.D. Passons au calcul de cette intégrale. On a :

CORRECTION "PARTIEL N°1 - ANALYSE II"

$$2I_5 = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)dx + \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)dx = = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x.\cos x)dx = \int_0^{\pi/2} \ln\frac{\sin 2x}{2}dx = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2x)dx - \frac{\pi}{2}\ln 2$$

Calculons l'intégrale du dernier membre :

$$R = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2x)dx = \left\{\begin{matrix} 2x = u \\ dx = du/2 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin u)du = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \ln(\sin u)du + \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin u)du$$

Comme on a

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin u)du = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin\left(v + \frac{\pi}{2}\right)d\left(v + \frac{\pi}{2}\right) = I_5$$

il vient alors (en reportant ce dernier résultat dans l'intégrale R):

$$R = I_5$$

Donc il suffit de reporter ce dernier résultat dans l'expression de $2I_5$ pour avoir

$$2I_5 = I_5 - \frac{\pi}{2}\ln 2 \quad \Rightarrow \quad I_5 = -\frac{\pi}{2}\ln 2$$

ECOLE NATIONALE PREPARATOIRE AUX ETUDES D'INGENIEUR

2è année préparatoire *Année Scolaire : 2001/2002*

PARTIEL N°2

Module : Analyse II *Semestre : 3* *Date : 23/01/2002*

Exercice 1 :

Soit donnée l'équation différentielle:

$$y'+y^2-2y\sin x+\sin^2 x-\cos x=0 \qquad (1)$$

1) *Montrer que y=sin x est solution de (1)*
2) *Trouver la solution de (1) qui vaut 1 quand x est égal à 0 .*

Exercice 2 :

Soit à résoudre l'équation différentielle :

$$x^3y''+2xyy'-x^2(y')^2-y^2=0 \qquad (2)$$

a) *En posant $x=e^t$ et $y=z.e^t$, ramener l'équation (2) à une équation de la forme : $F(z';z'')=0$ (3)*
b) *Poser z'= u et résoudre l'équation (3)*
c) *En déduire la solution générale de (2).*

Exercice 3 :

Soit donnée l'équation différentielle:

$$(x+1)^3y''+3(x+1)^2y'+(x+1)y=6\,Ln(x+1) \qquad (4)$$

1) *Trouver la solution générale de (4)*

2) *Trouver la solution y de (4) telle que: $y(0)=0,\ y'(0)=1$*

Barème : 6 + 7 + 7.

CORRIGE " ANALYSE II - PARTIEL 2 "

Exo I. $y' + y^2 - 2y\sin x + \sin^2 x - \cos x = 0$ (1)

(1p) Soit $y = \sin x$, alors $y' = \cos x$; En remplaçant dans (1) on trouve :

$\cos x + \sin^2 x - 2\sin^2 x + \sin^2 x - \cos x \equiv 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(2p) Par suite $y = \sin x$ est solution (1) sur $\mathbb{R}$.

Posons dans (1) $y(x) = z(x) + \sin x$:

$z' + \cos x + z^2 + 2z\sin x + \sin^2 x - 2z\sin x - 2\sin^2 x + \sin^2 x - \cos x = 0$

c-à-d $z' + z^2 = 0$. (2)

(2p) En posant $z = u^{-1}$ dans (2) on trouve :

$-u' + 1 = 0 \implies u = x + c$.

Par suite la solution de (2) est $z = \dfrac{1}{x+c}$.

la solution générale de (1) est donc :

(1p) $y = \dfrac{1}{x+c} + \sin x$.

$y(0) = \dfrac{1}{c} = 1 \implies c = 1$.

La solution demandée est.

$y = \dfrac{1}{x} + \sin x$

CORRIGE " ANALYSE II - PARTIEL 2 "

Exo II -

2p

$x^3 y'' + 2xyy' - x^2 y'^2 - y^2 = 0$ (1)

En posant $x = e^t$ $y = z.e^t$ on obtient

$y'_x = y'_t . e^{-t} = z' + z$ $y''_{tt} = (z'' + z')e^{-t}$

$e^{3t}(z''+z')e^{-t} + 2e^t z e^t(z'+z) - e^{2t}(z'+z)^2 - e^{2t} z^2 = 0$

Par suite : $z'' + z' - z'^2 = 0$ (2)

1p

Si on pose $z' = u$ on obtient :

$u' + u - u^2 = 0.$ (3)

En posant dans (3) $v = u^{-1}$ on obtient

$-v' + v - 1 = 0$ (4)

2p

La solution generale de (4) est :

$v = ke^t + 1.$ donc $u = \frac{1}{ke^t + 1}$

2p

Par suite $z = \int \frac{dt}{ke^t+1} = \log\left|\frac{e^t}{ke^t+1}\right| + L.$

d'où $y = x\left(\log \frac{x}{kx+1} + L\right)$.

Exo III $(x+1)^3 y'' + 3(x+1)^2 y' + (x+1)y = 6\,\mathrm{Log}(x+1)$ (1)

(1p) L'équation (1) est définie pour $x > -1$, donc on peut diviser ses deux membres par $x+1$.

$$(x+1)^2 y'' + 3(x+1)y' + y = 6\,\frac{\mathrm{Log}(x+1)}{x+1} \quad (2)$$

(1,5) En posant dans (2) $x+1 = e^t$ on obtient

$y'_x = y'_t \cdot e^{-t}$ $\qquad y''_x = (y''_{tt} - y'_t)e^{-2t}$

$$y'' + 2y' + y = 6t \cdot e^{-t} \quad (3)$$

(1p) la solution generale de l'équation homogène associée à (3) est : $y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-t}$.

(2p) La solution particulière de (3) est de la forme
$$y(t) = (at+b)t^2 \cdot e^{-t}$$

$$y' = [-at^3 + t^2(3a-b) + 2bt]e^{-t}$$

$$y'' = [at^3 + t^2(b-6a) + t(6a-4b) + 2b]e^{-t}$$

En remplaçant dans (3) on trouve : $b=0$; $a=1$.

la solution generale de (3) est donc :

$$y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-t} + t^3 e^{-t}$$

Sachant que $t = \log(x+1)$, la solution générale de (2) s'écrit sous la forme :

$$y = \frac{1}{x+1}\left[C_1 + C_2 \log(x+1) + \log^3(x+1)\right]$$

(1,5p)
$y(0) = C_1 = 0$
$y'(0) = C_2 = 1$.

La solution demandée est :

$$y = \frac{1}{x+1}\left[\log(x+1) + \log^3(x+1)\right]$$

ÉCOLE NATIONALE PRÉPARATOIRE AUX ÉTUDES D'INGENIORAT

2éme **Année Préparatoire** **Année Scolaire : 2001/2002**

PARTIEL 03

Module : Analyse II **Semestre : 4** **Date : 13/04/2002** **Durée : 2h 30 m**

	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Observation
BAREME											

Exercice1:(5pts)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|^p}{x^2 - xy + y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

où p est un nombre réel.

1) Pour quelles valeurs de p, la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

2) Pour quelles valeurs de p, la fonction f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

3) Pour quelles valeurs de p, la fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2 :(4pts)

On considère l'équation :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \qquad (E)$$

1) Transformer l'équation (E) en utilisant le changement de variables
$u = x + \alpha y$, $v = x + \beta y$ ou α et β sont deux nombres réels.

2) Choisir α et β pour que l'équation obtenue dans la question 1) soit de la forme:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$$

3) En déduire les solutions de l'équation (E).

Exercice3:(3pts)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue par apport à la variable x et $\frac{\partial f}{\partial y}$ est bornée sur $\mathbb{R}^2$.

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4:(4pts)

Etudier les extremas locaux de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui est définie par :

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - (x-y)^2$$

Exercice5:(4pts)

1) Calculer y'' pour la fonction définie par la relation $y = \sin(x+y)$

2)Donner le développement en série de Mac Laurin à l'ordre 6 de la fonction f définie par

$$f(x,y) = \sin x \sin y$$

Bonne chance

ECOLE NATIONALE PREPARATOIRE AUX ETUDES D'INGENIORAT
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

EXAMEN DE RATTRAPAGE

Module : Analyse II **Année universitaire : 2001/2002** **Durée : 2H00**

BAREME	Exercice I	Exercice II	Exercice III	Exercice IV	Exercice V
	3 pts	4 pts	4 pts	5 pts	4 pts

Exercice I :

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y' = \frac{2x+9y-20}{6x+2y-10}$$

Exercice II :

Calculer la dérivée $\frac{dU}{dt}$ si $U=x^3y$ et si les variables x et y sont liées à t par

$$\begin{cases} x^5 + y = t \\ x^2 + y^3 = t^2 \end{cases}$$

Exercice III :

Montrer que si on annule la fonction f donnée par

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy - 1$$

cela permet de définir , au voisinage de zéro, une fonction $\varphi : x \mapsto \varphi(x) = y$ telle que $\varphi(0) = 1$; donner dans ce cas un développement limité de φ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Exercice IV :

Pour le domaine D délimité par-dessus par la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

et par-dessous par le cône

$$z^2 \sin^2 \alpha = \left(x^2 + y^2\right)\cos^2 \alpha$$

où α est fixé sur le segment $[0,\pi]$.

a) Calculer le volume V de ce domaine et en déduire le volume d'une sphère .
b) Déterminer les coordonnées du centre d'inertie de ce domaine D et en déduire la position du centre d'inertie d'un hémisphère .

Exercice V :

Calculer l'intégrale

$$I = \iint_D (x^4 + y^4)\,dxdy$$

où $D = \left\{(x,y) \middle| \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\right\}$

en la transformant (et seulement en effectuant cela !) en une intégrale curviligne.

ECOLE NATIONALE PREPARATOIRE AUX ETUDES D'INGENIORAT
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET D'INFORMATIQUE

PARTIEL I

Module : ANALYSE II **Date : Mercredi le 27/11/2002** **Durée : 2H00**

	Exercice 1	Exercice 2	Exercice 3	Exercice 4
BAREME	8 points	6 points	2,5 points	3,5 points

Exercice 1 Soit $F(x) = \dfrac{x^2(x^2+3)}{(x-1)(x^2+1)^2}$

1. Donner la forme de la décomposition en éléments simples de la fraction F. **(0,5pt)**
2. Déterminer la décomposition en éléments simples de la fraction F. **(2,5pt)**
3. Calculer une primitive de chaque élément simple intervenant dans la décomposition de F. **(3pt)**
4. En déduire $\displaystyle\int \frac{\cos x\,(1+\cos x)}{1+\cos x-\sin x}dx$. **(2pt)**

Exercice 2 Considérons l'équation différentielle d'ordre 1 suivante:

$$\left(1-x^3\right)y' + x^2y + ay^2 + bx = 0 \qquad \text{(I)}$$

1. De quel type est l'équation (I) dans chacun des cas suivants
   (a) $a=0$ et $b\neq 0$ **(0,5pt)**
   (b) $a\neq 0$ et $b=0$ **(0,5pt)**
   (c) $a\neq 0$ et $b\neq 0$ **(0,5pt)**
2. (a) Déterminer la valeur de a et de b pour que l'équation (I) admette la fonction $y_1 = x^2$ comme solution particulière. **(1pt)**
   (b) Pour les valeurs de a et de b trouvées dans (a), effectuer le changement de variable qui permet de transformer l'équation (I) en une équation différentielle linéaire d'ordre 1 (II). **(1pt)**
   (c) Résoudre l'équation (II) et endéduire la solution générale de l'équation (I). **(2,5pt)**

Exercice 3 **(2,5pt)**Calculer la limite de la suite définie par

$$u_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)}$$

Exercice 4 Soit la fonction Φ définie par

$$\Phi(x) = \int_a^x \frac{dt}{\ln t} - \frac{2x}{\ln x}, \qquad a>1$$

1. Montrer que Φ est dérivable sur $[a,+\infty[$, puis calculer Φ'. **(2pt)**
2. En déduire que si $e^2 < a < b$ alors

$$\int_a^b \frac{dt}{\ln t} < \frac{2b}{\ln b} \quad \textbf{(1,5pt)}$$

E.N.P.E.I - Rouiba- Département de mathématiques

Corrigé du Partiel I d'analyse II- Année 2

Exercice 1 Soit $F(x) = \dfrac{x^2(x^2+3)}{(x-1)(x^2+1)^2}$

1. $F(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{bx+c}{(x^2+1)^2} + \dfrac{dx+e}{x^2+1}$ **(0,5pt)**

2. $\dfrac{x^2(x^2+3)}{(x-1)(x^2+1)^2} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{x+1}{(x^2+1)^2}$
   $a=1$ **(0,5pt)**; $b=1$**(0,5pt)**, $c=1$**(0,5pt)**, $d=0$ **(0,5pt)**, $e=0$ **(0,5pt)**

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x-1} = \ln(|x-1|) + c$**(0.5pt)**

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{(x^2+1)^2}dx &= \int \frac{x}{(x^2+1)^2}dx + \int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx \\
&= -\frac{1}{2(x^2+1)}\textbf{(0,5pt)} + \left(\int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2}dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx\right) \textbf{(0,5pt)} \\
&= -\frac{1}{2(x^2+1)} + \arctan x\textbf{(0,5pt)} - \left(-\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\arctan x\right) \textbf{(1pt)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x^2+1} + \arctan x\right)
\end{aligned}$$

4. On pose $t = \tan\frac{x}{2}$, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$ **(0,5pt)**, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ **(0,5pt)**

$$\int \frac{(\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x - \sin x}dx = 2\int \frac{1+t}{(1+t^2)^2}dt = \frac{t-1}{t^2+1} + \arctan t\,\textbf{(1pt)}$$

Exercice 2 1. (a) $a=0$ et $b\neq 0$ équation linéaire avec second membre **(0,5pt)**

(b) $a\neq 0$ et $b=0$ équation de Bernoulli**(0,5pt)**

(c) $a\neq 0$ et $b\neq 0$ équation de Riccati **(0,5pt)**

(a) $y_1 = x^2$ est une solution particulière de (I) $\Longleftrightarrow a=1$ et $b=-2$. **(1pt)**

(b) Posons $y = \dfrac{1}{z} + y_1 = \dfrac{1}{z} + x^2$, $\quad y' = \dfrac{-z'}{z^2} + 2x$ **(0.5pt)**
l'équation (I) devient

$$\left(x^3-1\right)z' + 3x^2z = -1 \qquad \text{(II)} \quad \textbf{(0.5pt)}$$

(c) Solution générale de l'équation Homogène: $z_H = \dfrac{\lambda}{x^3-1}$, $\lambda\in\mathbb{R}$ **(1pt)**

Variation de la constante: $z_p = \dfrac{-x}{x^3-1}$ **(1pt)**

$z = \dfrac{\lambda - x}{x^3-1}$, et par suite $y = \dfrac{x^3-1}{\lambda - x} + x^2$, $\lambda\in\mathbb{R}$ **(0,5pt)**

Exercice 3 considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1+x^2)$ alors

$$\ln(u_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \underline{\mathbf{(0,5pt)}}$$

(f est une fonction continue sur $[0,1]$, donc f est intégrable sur $[0,1]$) $\underline{\mathbf{(0,5pt)}}$ et on a

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \ln(u_n) \underline{\mathbf{(0,5pt)}}$$

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 \ln(1+t^2)\,dt = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2} \quad \underline{\mathbf{(1pt)}}$$

donc $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \ln(u_n) = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$
puisque la fonction exp est continue,

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \exp\left(\lim_{n\longrightarrow+\infty} \ln(u_n)\right) = \exp\left(\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}\right) = 2e^{\frac{\pi}{2}-2}$$

Exercice 4 $\Phi(x) = \int_a^x \frac{dt}{\ln t} - \frac{2x}{\ln x}, \qquad a > 1$

1. (a) $x \longmapsto 2x$ est une fonction polynôme donc dérivable sur $[a,+\infty[$
   $x \longmapsto \ln x$ est dérivable sur $]0,+\infty[$, et ne s'annule pas sur $]1,+\infty[$,
   donc $x \longmapsto \frac{1}{\ln x}$ est dérivable sur $[a,+\infty[$.
   $x \longmapsto \frac{2x}{\ln x}$ est dérivable sur $[a,+\infty[$, car c'est le quotient de deux fonctions dérivable. $\underline{\mathbf{(0,5pt)}}$
   $t \longmapsto \frac{1}{\ln t}$ est continue sur $[a,+\infty[$, donc la fonction $x \longmapsto \int_a^x \frac{dt}{\ln t}$ est une primitive de $x \longmapsto \frac{1}{\ln x}$. $\underline{\mathbf{(0,5pt)}}$
   conclusion: la fonction Φ est la somme de deux fonctions dérivables, donc Φ est dérivable sur $[a,+\infty[$.

   (b) $\Phi'(x) = \frac{1}{\ln x} - \frac{2\ln x - 2}{\ln^2 x} = \frac{2-\ln x}{\ln^2 x} \underline{\mathbf{(1pt)}}$

2. si $a > e^2$, alors: pour tout x dans $[a,+\infty[$, $2 - \ln x < 0$, d'où $\Phi'(x) < 0$. $\underline{\mathbf{(1pt)}}$
   $b > a$ et Φ décroissante alors

$$\int_a^b \frac{dt}{\ln t} - \frac{2b}{\ln b} = \Phi(b) < \Phi(a) = \frac{-2a}{\ln a} < 0 \quad \underline{\mathbf{(0,5pt)}}$$

   d'ou

$$\int_a^b \frac{dt}{\ln t} < \frac{2b}{\ln b}$$

ECOLE NATIONALE PREPARATOIRE AUX ETUDES D'INGENIORAT

2^e Année préparatoire — Année scolaire: 2002/2003

PARTIEL N°3

Module: ANALYSE II — Date 23/04/2003 — **Durée: 02 heures**

	Exercice 1	Exercice 2	Exercice 3	Exercice 4
Bareme	6	5	5	4

Exercice 1 On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|y|}{x^2} \exp\left(-\dfrac{|y|}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Calculer $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x, ax)$, où a est un paramètre réel.
2. La fonction f est-elle continue au point $(0,0)$?
3. Étudier la continuité de f aux points $(0, y_0)$, $y_0 \neq 0$.
4. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
5. f est-elle différentiable en $(0,0)$?

Exercice 2 Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par: $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$. Déterminer les extréma de la fonction f.

Exercice 3 On considère la fonction $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x,y,z) = z^3 - 3xyz - 8$.

1. Justifier l'existence d'une fonction $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}$, où U est un voisinage de $(0,0)$, vérifiant $f(x,y,\phi(x,y)) = 0$ pour tout (x,y) dans U, et $\phi(0,0) = 2$.
2. Écrire le developpement limité de la fonction ϕ à l'ordre 2 au voisinage de $(0,0)$.

Exercice 4 Soit l'application $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. g est-elle continue en $(0,0)$?
2. Étudier la différentiabilité de g sur $\mathbb{R}^2$.

L.I.N.F.E.I - Rouiba.
Dpt Mathématiques et Informatique

Correction " Partiel 03 " (Analyse II)

Exercice N°1 : (6/6)

1- Pour $x \neq 0$ $\quad f(x,ax) = \frac{|a|}{|x|} e^{-\frac{|a|}{|x|}} = \frac{\alpha}{e^{\alpha}}$

où $\alpha = \left|\frac{a}{x}\right| \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty$ (si $a \neq 0$)

Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x,ax) = \lim\limits_{\alpha \to \infty} \frac{\alpha}{e^{\alpha}} = 0$ (1/1)

(si $a = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x,ax) = 0$)

2- La limite suivante $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y = x^2}} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim\limits_{x \to 0} e^{-1} \neq f($

montre que f n'est pas continue au point $(0,0)$ (1,5/1,5)

3- On a par définition $f(0,y_0) = 0$, Donc : (1/1)

$f(x,y_0) = \frac{|y_0|}{x^2} e^{-\frac{|y_0|}{x^2}} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ (en effet $\alpha e^{-\alpha} \xrightarrow[\alpha \to +\infty]{} 0$, $\alpha = \frac{|y}{x}$

4- $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{0-0}{x} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim\limits_{y \to 0} \frac{0-0}{y} = 0$ (1/1)

5- Si f est différentiable on doit pouvoir écrire

$$f(x,y) = \underbrace{f(0,0)}_{0} + x \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}_{0} + y \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}_{0} + o(\sqrt{x^2+y^2})$$ (1,5/1,5)

Or en (2) il a été montré que f ne tend pas vers 0 lorsque $(x,y) \to (0,0)$.

Ainsi f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Mieux : f non continue en $(0,0) \Rightarrow f$ non diff en $(0,0)$

E.N.P.E.I - Rouiba

Dpt Mathématiques et Informatique

Correction " Partiel 03 "
(Analyse II)

Exercice N° 2 = $\frac{5}{5}$

La fonction f étant de forme polynomiale, elle est donc de classe $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^2)$. Les points stationnaires, s'ils existent, doivent vérifier le système :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 4(x-y) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 + 4(x-y) = 0 \quad (2)$$

$\frac{2}{2}$

On a $(1) + (2) \Rightarrow x^3 = -y^3 \Longrightarrow x = -y$

Repportons dans $(1) \Rightarrow x^3 - 2x = 0$. Ici les zéros sont $-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}$.

Donc on a trois points stationnaires : $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

Calcul des dérivées secondes.

$$A(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 - 4$$

$$B(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 4$$

$$C(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 4$$

Expression du discriminant :

$$\Delta = B^2 - AC = 16(1 - (3x^2-1)^2)$$

(car $x = -y$).

$\frac{2}{2}$

* Pour les points $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ et $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \Rightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ A > 0 \end{cases}$

Donc chacun de ces points est un ~~maximum~~ min pour f.

* Pour le point $(0,0)$ on aura $\Delta = 0$, donc cas douteux. On a ici

$$f(h,k) = \cancel{f(0,0)+} h^4 + k^4 - 2(h-k)^2$$

$\frac{1}{1}$

Pour $h = k$ on aura $f(h;h) = 2h^4 - 0 > 0$

Pour $h = -k$ on aura $f(h,-h) = h^4 + h^4 - 8h^2 = 2h^2(h^2 - 4)$

Ce dernier résultat aura le signe $(-)$ si $|h| < 2$

D'où f n'admet pas d'extremum au point $(0,0)$.

Correction "Partiel 03"
(Analyse II).

Exercice N°3 = $\frac{5}{5}$

1- On a $f(0,0,2)=0$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,2) = (3z^2 - 3xy)_{(0,0,2)} = 12 \neq 0$

φ est donc définie, et de classe C^∞ comme f, dans un voisinage de (0,0)

~~De plus cette fonction φ doit vérifiée :~~

~~- d'une part $\varphi(x,y)[\varphi^2(x,y) - 3xy] = 8$~~ permet d'écrire
~~$\varphi(x,y) \neq 0$ et $\varphi^2(x,y) \neq 3xy$~~

~~- d'autre part $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,t) \neq 0$ soit $3\varphi^2(x,y) - 3xy \neq 0$~~
~~c'est à dire $\varphi^2(x,y) \neq xy$.~~

$\frac{1,5}{1,5}$

~~Ainsi donc dans un voisinage de (0,0), φ existe et doit vérifiée~~
~~$\varphi^2(x,y) \neq xy$ et $\varphi^2(x,y) \neq 3xy$~~

2 - Calcul des dérivées premières et secondes de φ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0) = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial z} = \frac{y\,\varphi(x,y)}{\varphi^2(x,y) - xy}\Big|_{(0,0)} = 0$$

$\frac{3,5}{3,5}$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,0) = -\frac{\partial f/\partial y}{\partial f/\partial z} = \frac{x\,\varphi(x,y)}{\varphi^2(x,y) - xy}\Big|_{(0,0)} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(0,0) = \frac{y\varphi_x[\varphi^2 - xy] - y\varphi(2\varphi\varphi_x - y)}{(\varphi^2 - xy)^2}\Big|_{(0,0)} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(0,0) = \frac{x\varphi_y[\varphi^2 - xy] - x\varphi[2\varphi\varphi_y - x]}{[\varphi^2 - xy]^2}\Big|_{(0,0)} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{[\varphi + y\varphi_y][\varphi^2 - xy] - y\varphi[2\varphi\varphi_y - x]}{[\varphi^2 - xy]^2}\Big|_{(0,0)} = \frac{2^3}{2^4} = \frac{1}{2}$$

D'où il vient (symboliquement).

$$\varphi(x,y) = \varphi(0,0) + \frac{1}{1!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(1)}\varphi(0,0) + \frac{1}{2!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)}\varphi(0,0) + o(\|(x,y)\|^2)$$

$$\varphi(x,y) = 2 + 0 + \frac{1}{2}\left(x^2\cdot 0 + 2\cdot\frac{1}{2}xy + y^2\cdot 0\right) + o(\|(x,y)\|^2).$$

soit : $\varphi(x,y) = 2 + \frac{xy}{2} + o(\|(x,y)\|^2).$

Correction "Par Nck" 03

Exercice N° 4 : (4/4)

1- Utilisons les coordonnées polaires : $g(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \rho(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)$

On a ici : $0 \leq |g(x,y)| \leq 2\rho$

Ainsi si $\rho \to 0$ on aura $|g(x,y)| \to 0$ et donc g est continue en $(0,0)$.

(Autre démarche : On a l'identité : $x^3+y^3 = (x^2+y^2-xy)(x+y)$

D'où il vient : $g(x,y) = \left[1 - \dfrac{xy}{x^2+y^2}\right](x+y)$

Comme $|x|\,|y| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ on aura donc :

2,0/2,0

$$0 \leq |g(x,y)| \leq \left[1 + \frac{|x|\,|y|}{x^2+y^2}\right](|x|+|y|) \leq \frac{3}{2}(|x|+|y|)$$

Le dernier membre tend vers 0 si $(x,y)\to(0,0)$, il vient donc (d'après le théorème des deux gendarmes) $g(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$ d'où g est continue en $(0,0)$)

2) g est différentiable sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, il suffit par conséquent d'étudier la différentiabilité en $(0,0)$). On a :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x,0)-g(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x-0}{x} = 1$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{g(0,y)-g(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{y-0}{y} = 1$$

2,0/2,0

D'où ;

$$K = \frac{\left(g(x,y) - g(0,0) - x\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) - y\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\left(\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} - x - y\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$K = \frac{-(xy^2+yx^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}} = (\cos\varphi\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\sin\varphi)$$

Donc en passant aux limites, on aura :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} K = \lim_{\rho\to 0} (\cos\varphi\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\sin\varphi) \neq 0$$

Donc g n'est pas ~~bien~~ différentiable en $(0,0)$.

ECOLE NATIONALE PREPARATOIRE AUX ETUDES D'INGENIORAT

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET D'INFORMATIQUE

PARTIEL 3 - ANALYSE II

(Dimanche 11/05/2003 — Durée = 2 heures)

Barème	Exercice 1	Exercice 2	Exercice 3	Exercice 4
	5	6	5	4

Exercice 1 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^p \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{si } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

1- Pour quelle valeur de $p \in \mathbb{N}$ la fonction f est-elle continue dans $\mathbb{R}^2$;

2- Pour quelle valeur de $p \in \mathbb{N}^*$ la fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 :

Montrer que l'égalité $f(x,y,z) = x^3+y^3+z^3-2z(x+y)-2x+y-2z+1=0$ définit au voisinage de $(0,0)$ une fonction implicite $\varphi : (x,y) \mapsto \varphi(x,y) = z$ telle que $\varphi(0,0)=1$. Donner un développement de Taylor de φ, à l'ordre 2, au voisinage de $(0,0)$.

Exercice 3 :

Determiner les extrémums de la fonction implicite $\varphi : (x,y) \mapsto \varphi(x,y) = z$ donnée sous forme implicite : $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$

Exercice 4 :

Pour quelles valeurs de λ et β (deux constantes réelles), l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad \text{---} (*)$$

où $z = z(x,y)$, se transformera-t-elle en $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$ au moyen du changement de variables $u = x$ et $v = x+y$,

Donner dans ce cas l'expression générale des fonctions vérifiant l'équation donnée $(*)$

ECOLE NATIONALE PREPARATOIRE AUX ETUDES D'INGENIORAT
Département de Mathématiques

$2^{ième}$ Année Préparatoire
Durée : 2H 00

Année: 2003 – 2004
Module: Analyse II

Partiel I

Exercice 1 (11 pts)

1. Calculer $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin^2 x + 2\cos^2 x}$ **(3 pts)**

2. En déduire $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\sin^2 \frac{k\pi}{n} + 2\cos^2 \frac{k\pi}{n}}$ **(3 pts)**

3. Calculer $\displaystyle\int \frac{1-2\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)}{2\sqrt{x^2+x+1}\left(1+\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)^2\right)^2}dx$ **(3 pts)**

4. Calculer $\displaystyle\int \left(2x^3+5x^2+4x+3\right)e^{2x}dx$ **(2 pts)**

Exercice 2 (5,5 pts)
Quelle est la nature des intégrales impropres suivantes ? (justifier vos réponses)

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+\sqrt{x}}dx$ **(3,5 pts)** 2) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^3}$ **(2 pts)**

Exercice 3 (3,5 pts)
Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ et $x \in \mathbb{R}^2$. On appelle distance du point a à A et on note $d(x,A)$ le nombre réel positif défini par: $d(x,A) = \inf\{d(x,a) /\quad a \in A\}$.

1. Soient A une boule ouverte de centre a et de rayon R, $(R>0)$, et S le cercle de centre a et de rayon R. Déterminer $d(x,A)$ dans les cas suivants:

   (a) $x \in A$. **(0, 5pt)**
   (b) $x \in S$ **(0, 5pt)**
   (c) $d(x,a) > R$. **(0, 5pt)**

2. Soit A une partie quelconque de $\mathbb{R}^2$. Montrer l'équivalence suivante: **(2 pts)**

$$x \in \bar{A} \Longleftrightarrow d(x,A) = 0$$

ECOLE NATIONALE PREPARATOIRE AUX ETUDES D'INGENIORAT

Département de Mathématiques

$2^{ième}$ Année Préparatoire | Année: 2003 – 2004

Durée : 2H 00 | **Module: Analyse II**

CORRIGÉ DU PARTIEL N:I

Exercice 4 (11pts)

1. Calcul de $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin^2 x + 2\cos^2 x}$: on peut utiliser 2 changement de variables $t = \tan x$ ou $t = \tan \frac{x}{2}$.

(a) On pose $t = \tan x$**(0,5 pt1)** $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}$**(0,5 pt2)** $\sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$**(0,5 pt3)**,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1+\sin x+2\cos^2 x} &= \int \frac{dt}{3+2t^2}\mathbf{(0,5\ pt_4)} = \frac{\sqrt{6}}{6}\arctan\frac{\sqrt{6}}{3}t + c\mathbf{(0,5\ pt_5)}\\ &= \frac{\sqrt{6}}{6}\arctan\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\tan x\right) + c\mathbf{(0,5\ pt_6)}\end{aligned}$$

(b) ou bien on pose $t = \tan\frac{x}{2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}\boxed{\mathbf{(0,5\ pt)}}$,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1+\sin x+2\cos^2 x} &= \int 2\frac{1+t^2}{3t^4+2t^2+3}dt\boxed{\mathbf{(0,5\ pt)}}\\ &= \int\left(\frac{1}{3t^2-2\sqrt{3}t+3}+\frac{1}{3t^2+2\sqrt{3}t+3}\right)dt\boxed{\mathbf{(1\ pt)}}\\ &= \frac{\sqrt{6}}{6}\arctan\left(\frac{\sqrt{6}t-\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{6}}{6}\arctan\left(\frac{\sqrt{6}t+\sqrt{2}}{2}\right)+d\boxed{\mathbf{(1\ pt)}}\\ &= \frac{\sqrt{6}}{6}\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{6}\tan\frac{x}{2}-\sqrt{2}}{2}\right)+\arctan\left(\frac{\sqrt{6}\tan\frac{x}{2}+\sqrt{2}}{2}\right)\right)+c\end{aligned}$$

2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\sin^2\frac{k\pi}{n}+2\cos^2\frac{k\pi}{n}} = \int_0^\pi \frac{dx}{1+\sin^2 x+2\cos^2 x}\mathbf{(1\ pt)} = F(\pi)-F(0)$ où F est une primitive de $\dfrac{1}{1+\sin^2 x+2\cos^2 x}$ dans $[0,\pi]$. (*la fonction* $x \longmapsto \dfrac{1}{1+\sin^2 x+2\cos^2 x}$ *est une fonction continue sur* $\mathbb{R}$, *elle admet donc une primitive* F *continue et dérivable sur* $[0,\pi]$) alors

- si on avait posé $t = \tan x$ dans la question 1 alors:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{6}}{6}\arctan\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\tan x\right) + c_1 & \text{si } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\\ \frac{\sqrt{6}}{6}\arctan\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\tan x\right) + c_2 & \text{si } x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases} \quad \underline{\textbf{(1 pt)}}$$

si par exemple $F(0) = 0$ alors $c_1 = 0$. La continuité de F en $\frac{\pi}{2}$ donne

$$\lim_{x \longrightarrow \frac{\pi}{2}^-} F(x) = \lim_{x \longrightarrow \frac{\pi}{2}^+} F(x) \; \underline{\textbf{(0,5 pt)}}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{6}}{6}\frac{\pi}{2} &= \frac{\sqrt{6}}{6}\frac{-\pi}{2} + c_2 \\ c_2 &= \frac{\pi\sqrt{6}}{6} \end{aligned}$$

d'où $F(\pi) - F(0) = \frac{\pi\sqrt{6}}{6}$

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{n} \frac{1}{1 + \sin^2 \frac{k\pi}{n} + 2\cos^2 \frac{k\pi}{n}} = \frac{\pi\sqrt{6}}{6} \underline{\textbf{(0,5 pt)}}$$

- sinon:

$$\begin{aligned} &\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{n} \frac{1}{1 + \sin^2 \frac{k\pi}{n} + 2\cos^2 \frac{k\pi}{n}} \\ &= \left[\frac{\sqrt{6}}{6}\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{6}\tan\frac{x}{2} - \sqrt{2}}{2}\right) + \arctan\left(\frac{\sqrt{6}\tan\frac{x}{2} + \sqrt{2}}{2}\right)\right)\right]_0^{\pi} \\ &= \lim_{x \longrightarrow \pi^-} \frac{\sqrt{6}}{6}\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{6}\tan\frac{x}{2} - \sqrt{2}}{2}\right) + \arctan\left(\frac{\sqrt{6}\tan\frac{x}{2} + \sqrt{2}}{2}\right)\right) - 0 \boxed{\textbf{1 pt}} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{6}\pi \boxed{\textbf{1 pt}} \end{aligned}$$

3. $\displaystyle\int \frac{1 - 2\left(\sqrt{x^2+x+1} - x\right)}{2\sqrt{x^2+x+1}\left(1 + \left(\sqrt{x^2+x+1} - x\right)^2\right)^2} dx$: on pose $\sqrt{x^2+x+1} = t + x$ $\underline{\textbf{(1pt)}}$ alors $x = \dfrac{t^2 - 1}{1 - 2t}$, $dx = -2\left(\dfrac{t^2 - t + 1}{(2t-1)^2}\right)$

$$\begin{aligned} \int \frac{1 - 2\left(\sqrt{x^2+x+1} - x\right)}{2\sqrt{x^2+x+1}\left(1 + \left(\sqrt{x^2+x+1} - x\right)^2\right)^2} dx &= \int \frac{dt}{(1+t^2)^2} \underline{\textbf{(0,5 pt)}} \\ &= \int \frac{1+t^2}{(1+t^2)^2} dt - \int \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^2} \underline{\textbf{(0,5 pt)}} \\ &= \arctan t + \frac{1}{2}\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{2}\arctan t + c \underline{\textbf{(0,5 pt)}} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x^2+x+1} - x}{1 + \left(\sqrt{x^2+x+1} - x\right)^2} + \frac{1}{2}\arctan\left(\sqrt{x^2+x+1} - x\right) + c \underline{\textbf{(0,5 pt)}} \end{aligned}$$

4. $\int \left(2x^3 + 5x^2 + 4x + 3\right) e^{2x} dx$:

(a) Cherchons une primitive de $\left(2x^3 + 5x^2 + 4x + 3\right) e^{2x}$ sous la forme

$$\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) e^{2x} + k\underline{(\mathbf{0,5pt})}$$

$$\begin{aligned}\left(2x^3 + 5x^2 + 4x + 3\right) e^{2x} &= \frac{d}{dx}\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) e^{2x} \\ &= \left(2ax^3 + (2b + 3a)\, x^2 + (2c + 2b)\, x + c + 2d\right) e^{2x}\end{aligned}$$

Par identification on obtient le système suivant:

$$\begin{cases} 2a = 2 \\ 2b + 3a = 5 \\ 2c + 2b = 4 \\ c + 2d = 3 \end{cases} \underline{(\mathbf{0,5pt})} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \\ d = 1 \end{cases} \underline{(\mathbf{1pt})}$$

$$\int \left(2x^3 + 5x^2 e^{2x} + 4x + 3\right) e^{2x} dx = \left(x^3 + x^2 + x + 1\right) e^{2x} + k$$

(b) On peut calculer l'intégrale en utilisant l'intégration par parties trois (3) fois.

$$\begin{aligned}&\int \left(2x^3 + 5x^2 + 4x + 3\right) e^{2x} dx \\ &= \left(x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2}\right) e^{2x} - \int \left(3x^2 + 5x + 2\right) e^{2x} dx\underline{(\mathbf{0,5pt})} \\ &= \left(x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2}\right) e^{2x} - \frac{1}{2}\left(3x^2 + 5x + 2\right) e^{2x} + \int \frac{1}{2}(6x + 5)\, e^{2x} dx\underline{(\mathbf{0,5pt})} \\ &= \left(x^3 + x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) e^{2x} + \int \frac{1}{2}(6x + 5)\, e^{2x} dx \\ &= \left(x^3 + x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) e^{2x} + \frac{1}{4}(6x + 5)\, e^{2x} - \int \frac{3}{2}e^{2x}\, dx\underline{(\mathbf{0,5pt})} \\ &= \left(x^3 + x^2 + x + \frac{7}{4}\right) e^{2x} - \frac{3}{4}e^{2x} + c \\ &= \left(x^3 + x^2 + x + 1\right) e^{2x} + c\underline{(\mathbf{0,5pt})}\end{aligned}$$

Exercice 5 $(\mathbf{5,5}$ **pts**)

1. pour que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + \sqrt{x}} dx$ soit convergente il faut et il suffit que les deux intégrales $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2 + \sqrt{x}} dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + \sqrt{x}} dx$ soient convergentes$\underline{(\mathbf{0,5pt})}$.

(a) Pour la première intégrale, la fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x^2+\sqrt{x}} \leq 0$ sur $]0,1]$

$-\dfrac{\ln x}{x^2+\sqrt{x}} \geq 0$(**0, 5pt**).

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} x^{\frac{3}{4}} \frac{-\ln x}{x^2+\sqrt{x}} = \lim_{x \longrightarrow 0^+} x^{\frac{1}{4}} \frac{-\ln x}{x^{\frac{3}{2}}+1} = 0(\mathbf{0,5pt})$$

$\frac{3}{4}<1$, donc $\int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}}dx$(**0, 5pt**) converge, d'où d'après le critère de comparaison à la limite $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2+\sqrt{x}}dx$ est convergente.

(b) Pour la seconde intégrale, $\dfrac{\ln x}{x^2+\sqrt{x}} \geq 0$ (**0, 5pt**)pour tout x dans $[1,+\infty[$.

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x^2+\sqrt{x}} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{2}}+x^{-1}} = 0(\mathbf{0,5pt})$$

$\frac{3}{2}>1$, donc $\int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{5}{4}}}dx$ converge(**0, 5pt**), d'où d'après le critère de comparaison à la limite $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+\sqrt{x}}dx$ est convergente.

2. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3}$ est convergente si et seulement si les deux intégrales $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^3}$ et $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^3}$ sont convergentes toutes les deux(**1 pt**). $\int_0^1 \frac{dx}{x^3}$ diverge donc $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3}$ diverge(**1 pt**).

Exercice 6 (3, 5 pts)

1. Soient A une boule ouverte de centre a et de rayon R, $(R>0)$, et S le cercle de centre a et de rayon R.

   (a) Si $x \in A$ alors $d(x,A)=0$ (**0, 5 pt**)

   (b) si $x \in S$ alors $d(x,a)=0$ (**0, 5 pt**)

   (c) si $d(x,a)>R$ alors $d(x,A)=d(x,a)-R$ (**0, 5 pt**)

2. Soit A une partie quelconque de $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} x \in \bar{A} \overset{(1pt)}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon &> 0, \quad B(x;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \ (\mathbf{1\ pt}) \\ &\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0;\ \exists a \in A \text{ et } a \in B(x;\varepsilon) \\ &\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0;\ \exists a \in A;\ d(a,x) < \varepsilon \overset{(1pt)}{\Longleftrightarrow} \inf\{d(x,a) / \quad a \in A\} = 0(\mathbf{1\ pt}) \\ &\Longleftrightarrow d(x,A) = 0 \end{aligned}$$

ECOLE NATIONALE PREPARATOIRE AUX ETUDES D'INGENIORAT
Département de Mathématiques

$2^{ième}$ Année Préparatoire — Année: 2003 – 2004

Durée : 2H 00 — **Module: Analyse II**

Partiel II

Exercice 1 (7 pts) Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? **(4, 5 pts)**

2. Montrer que f admet des dérivées partielles secondes croisées $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sur $\mathbb{R}^2$ et que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. **(1 pt)**

3. Que peut-on conclure? **(0, 5 pt)**

4. Calculer $df_{(1,2)}(2,1)$. **(1 pt)**

Exercice 2 (5 pts) Soient $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y,z) = (x\cos y \cos z, x \cos y \sin z, x \sin y)$$

et $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
Ecrire la matrice jacobienne de la fonction $g \circ f$ au point (x,y,z)

1. sans calculer $(g \circ f)(x,y,z)$. **(4 pts)**

2. après avoir calculer $(g \circ f)(x,y,z)$. **(1 pt)**

Exercice 3 (4 pts) Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y \sqrt[3]{x-y}}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

étudier la différentiabilité de la fonction f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4 (4 pts) Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, différentiable deux fois.

1. Transformer l'expression
$$\Phi(f) = 4\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$
en posant $u = 2x + y$ et $v = x + 2y$. **(3 pts)**

2. En déduire les fonctions f de classe C^2 solution de l'équation: $\Phi(f) = 0$. **(1 pt)**

ECOLE NATIONALE PREPARATOIRE AUX ETUDES D'INGENIORAT
Département de Mathématiques

$2^{ième}$ Année Préparatoire — Année: 2003 – 2004

Durée : 2H 00 — **Module: Analyse II**

CORRIGÉ DU PARTIEL N: II

Exercice 1 1. Sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, f est une fraction rationnelle, bien définie sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ donc f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$**(0,5 pt)**

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{0-0}{h} = 0.$**(0,5 pt)**

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\longrightarrow 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\longrightarrow 0} \frac{0-0}{k} = 0$ **(0,5 pt)**

si $(x,y) \neq (0,0)$ alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(y^2 - x^2)\, y^3}{(x^2+y^2)^2}\,\mathbf{(0,5\ pt)} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(3x^2+y^2)\, xy^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathbf{(0,5\ pt)}$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| = \left|\frac{(y^2-x^2)\, y^3}{(x^2+y^2)^2}\right| = \left|\frac{r^5\left(\sin^2\theta - \cos^2\theta\right)\sin^3\theta}{r^4}\right| \leq 2r = h_1(r)$$

$\lim_{r\longrightarrow 0} h_1(r) = 0$ donc $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$**(1 pt)**

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| = \left|\frac{(3x^2+y^2)\, xy^2}{(x^2+y^2)^2}\right| = \left|\frac{r^5\left(3\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\cos^2\theta\sin^2\theta}{r^4}\right| \leq 4r = h_2(r)$$

$\lim_{r\longrightarrow 0} h_2(r) = 0$ donc $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$**(1 pt)**

Conclusion: f est de classe C^1 au point $(0,0)$.

2.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{0-0}{h} = 0\,\mathbf{(0,5\ pt)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) = \lim_{k\longrightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,k) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{k} = \lim_{k\longrightarrow 0}\frac{\frac{k^5}{k^4}-0}{k} = 1\,\mathbf{(0,5\ pt)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$$

3. L'une au moins des fonctions $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ ou $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$**(0,5 pt)**

4. $df_{(1,2)}(2,1) = \left(\frac{-24}{25}, \frac{28}{25}\right)(2,1) = \frac{-48+28}{25} = \frac{-20}{25}.$**(1 pt)**

Exercice 2 1. $D(g\circ f)(x,y,z) = Dg_{(f(x,y,z))} \bullet Df_{(x,y,z)}$ $\underline{(\mathbf{0,5\ pt})}$

$$Dg_{(x,y,z)} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\right) \underline{(\mathbf{0,5\ pt})}$$

$$Dg_{(f(x,y,z))} = (\cos y\cos z, \cos y\sin z, \sin y)\ (\mathbf{0,5\ pt})$$

$$\begin{aligned} Df_{(x,y,z)} &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f3}{\partial x} & \dfrac{\partial f_3}{\partial y} & \dfrac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix} \underline{(\mathbf{0,5\ pt})} \\ &= \begin{pmatrix} \cos y\cos z & -x\sin y\cos z & -x\cos y\sin z \\ \cos y\sin z & -x\sin y\sin z & x\cos y\cos z \\ \sin y & x\cos y & 0 \end{pmatrix} \underline{(\mathbf{1\ pt})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(g\circ f)(x,y,z) &= Dg_{(f(x,y,z))} \bullet Df_{(x,y,z)} \\ &= (\cos y\cos z, \cos y\sin z, \sin y) \begin{pmatrix} \cos y\cos z & -x\sin y\cos z & -x\cos y\sin z \\ \cos y\sin z & -x\sin y\sin z & x\cos y\cos z \\ \sin y & x\cos y & 0 \end{pmatrix} \\ &= (1,0,0)\ \underline{(\mathbf{1\ pt})} \end{aligned}$$

2. $g\circ f(x,y,z) = x$, donc $D(g\circ f)_{(x,y,z)} = (1,0,0)$.$\underline{(\mathbf{1\ pt})}$

Exercice 3 1. On pose $D = \{(x,x)/x\in\mathbb{R}\}$ et $U = \mathbb{R}^2 - D$, U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
sur U, $f(x,y) = \dfrac{x^2y\sqrt[3]{x-y}}{x^2+y^2}$

- la fonction $(x,y) \longmapsto \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ est différentiable sur U, car c'est une fraction rationnelle.
- la fonction $h \longmapsto \sqrt[3]{h}$ est différentiable sur $\mathbb{R}^*$ et la fonction $(x,y) \longmapsto x-y$ est différentiable sur U, car c'est une fonction polynôme, de plus, $x-y\in\mathbb{R}^*$ pour tout (x,y) dans D. Donc la fonction composée $(x,y) \longrightarrow \sqrt[3]{x-y}$ est différentiable sur U.$\underline{(\mathbf{0,5\ pt})}$
- donc la fonction $(x,y) \longmapsto \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\sqrt[3]{x-y}$ est différentiable sur U car c'est le produit de deux fonctions différentiables sur U.$\underline{(\mathbf{0,5\ pt})}$

2. étude au point $(0,0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{0-0}{h} = 0\underline{(\mathbf{0,5\ pt})} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{k\longrightarrow 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\longrightarrow 0}\frac{0-0}{k} = 0\underline{(\mathbf{0,5\ pt})} \end{aligned}$$

$$\lim_{(h,k)\longrightarrow(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)-h\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)-k\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} \underline{(\mathbf{0,5\ pt})} = \lim_{(h,k)\longrightarrow(0,0)} \frac{h^2k\sqrt[3]{h-k}}{\sqrt{h^2+k^2}^3}$$

On pose $h = r\cos\theta$ et $k = r\sin\theta$:

$$\left|\frac{h^2 k\sqrt[3]{h-k}}{\sqrt{h^2+k^2}^3}\right| = \left|r^{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{\cos\theta - \sin\theta}\right| \leq r^{\frac{1}{2}} = h(r)$$

$\lim\limits_{r\longrightarrow 0} h(r) = 0$, donc $\lim\limits_{(h,k)\longrightarrow(0,0)} \dfrac{h^2 k\sqrt[3]{h-k}}{\sqrt{h^2+k^2}^3} = 0$ $\underline{(\mathbf{0,5\ pt})}$

f est différentiable au point $(0,0)$.

3. étude au point (x_0, x_0) avec $x_0 \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,x_0) &= \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f(x_0+h,x_0) - f(x_0,x_0)}{h} = \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{\dfrac{(x_0+h)^2 x_0\sqrt[3]{h}}{(x_0+h)^2+x_0^2} - 0}{h} \\
&= \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{(x_0+h)^2 x_0}{h^{\frac{2}{3}}\left((x_0+h)^2 + x_0^2\right)} = \pm\infty \underline{(\mathbf{0,5\ pt})}
\end{aligned}$$

f n'admet de dérivée partielle par rapport à x au point (x_0,x_0), donc f n'est pas différentiable au point (x_0,x_0). $\underline{(\mathbf{0,5\ pt})}$

En résumé: f est différentiable sur $U\cup\{(0,0)\}$. et non différentiable sur $D - \{(0,0)\}$.

Exercice 4 1. $u = 2x+y$ et $v = x+2y$, alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 2\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \underline{(\mathbf{0,5\ pt})} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} + 2\frac{\partial f}{\partial v} \underline{(\mathbf{0,5\ pt})}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2\frac{\partial}{\partial u}\left(2\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(2\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right) \\
&= 4\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\underline{(\mathbf{0,5\ pt})} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 2\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 2\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u} + 2\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u} + 2\frac{\partial f}{\partial v}\right) \\
&= 2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 4\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\underline{(\mathbf{0,5\ pt})} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + 2\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u} + 2\frac{\partial f}{\partial v}\right) + 2\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u} + 2\frac{\partial f}{\partial v}\right) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u} + 4\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\underline{(\mathbf{0,5\ pt})}
\end{aligned}$$

$$\Phi(f) = 4\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 9\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 6\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} + 6\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\underline{(\mathbf{0,5\ pt})}$$

2. Si on suppose que f est C^2 alors $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}$ $\underline{(\mathbf{0,5\ pt})}$ et par suite

$$\Phi(f) = 0 \Longleftrightarrow 4\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = 0 \Longleftrightarrow f = \varphi(v)\,u + \psi(v)\ \underline{(\mathbf{0,5\ pt})}$$

où φ et ψ sont des fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. $f(x,y) = \varphi(x+2y)(2x+y) + \psi(x+2y)$.

ECOLE NATIONALE PREPARATOIRE AUX ETUDES D'INGENIORAT
Département de Mathématiques

$2^{ième}$ Année Préparatoire | Année: 2003 – 2004

Durée : 2H 00 | **Module: Analyse II**

Partiel III

Exercice 1 (3 pts) 1. Résoudre l'équation différentielle suivante(**1 pt**)

$$y'' - \frac{1}{4}y = 0$$

2. Résoudre l'équation différentielle suivante

$$\left(1+x^2\right)y'' + xy' - \frac{1}{4}y = 0$$

en effectuant le changement de variable $x = \sinh t$. (**2 pt**)

Exercice 2 (4,5 pts) Soit à résoudre l'équation différentielle

$$y' + (1-2x)\,y + y^2 = 1 + x - x^2 \qquad \text{(E)}$$

1. Résoudre l'équation différentielle: $y' - y - 1 = 0$ (**1 pt**)
2. Déterminer une valeur de a et une valeur de b pour que la fonction $y_0(x) = ax + b$ soit solution de (E). (**1 pt**)
3. Résoudre l'équation (E). (**2 pts**)
4. Déterminer une solution de (E) vérifiant $y(0) = 0$. (**0,5 pt**)

Exercice 3 (7,5 pts) 1. Intégrer l'équation

$$x\left(1-y^2\right)y' - y\left(1+y^2\right) = 0 \ \ (\mathbf{1\ pt})$$

2. Intégrer l'équation différentielle suivante (**2 pts**)

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2} \qquad \text{(F)}$$

3. Déterminer un facteur intégrant pour la forme différentielle

$$\left(y^2 - x^2\right)dy + 2xydx$$

dépendant uniquement de la variable y. (**2 pts**)

4. Intégrer alors, l'équation (F) en utilisant le facteur intégrant. (**2, 5 pts**)

Exercice 4 (5 pts) Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\longmapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z + x^3. \end{aligned}$$

1. Montrer que l'équation $f(x,y,z) = 0$ définit l'une des trois variables comme une fonction φ des deux autres variables au voisinage du point $(1,1)$, vérifiant $\varphi(1,1) = 1$. (**1 pt**)
2. Donner le développement de Taylor-Yong à l'ordre 2 de la fonction φ au voisinage du point $(1,1)$. (**3 pts**)
3. φ présente-elle un extrémum au point $(1,1)$? Si oui préciser sa nature.(**1 pt**)

ECOLE NATIONALE PREPARATOIRE AUX ETUDES D'INGENIORAT
Département de Mathématiques

$2^{ième}$ Année Préparatoire — Année: 2003 – 2004

Durée : 2H 00 — **Module: Analyse II**

CORRIGÉ DU PARTIEL N: III

Exercice 1 1. $y'' - \frac{1}{4}y = 0 \Longleftrightarrow y = c_1 e^{-\frac{1}{2}x} + c_2 e^{\frac{1}{2}x}$ **(1 pt)**

2. $(1+x^2)\,y'' + xy' - \frac{1}{4}y = 0$. $x = \sinh t \Longrightarrow t = \arg\sinh x$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ **(0, 5 pt)**

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dt}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \dfrac{d^2y}{dt^2}\dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\dfrac{dy}{dt}$ **(0, 5 pt)**

par suite:

$$\left(1+x^2\right)y'' + xy' - \frac{1}{4}y = 0 \Longleftrightarrow \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{4}y = 0 \textbf{(0, 5 pt)}$$

d'où

$$\begin{aligned} y &= c_1 e^{\frac{t}{2}} + c_2 e^{-\frac{t}{2}}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \\ y &= c_1 \exp\left(\frac{\arg\sinh x}{2}\right) + c_2 \exp\left(-\frac{\arg\sinh x}{2}\right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \textbf{(0, 5 pt)} \end{aligned}$$

Exercice 2 (4,5 pts) Soit à résoudre l'équation différentielle suivante

$$y' + (1-2x)\,y + y^2 = 1 + x - x^2 \tag{E}$$

1. $y' - y - 1 = 0 \Longleftrightarrow \dfrac{y'}{y+1} = 1 \Longleftrightarrow \ln|y+1| = x + c \Longleftrightarrow y + 1 = \lambda e^x \Longleftrightarrow y = \lambda e^x - 1$ **(1 pt)**

2. $y_0(x) = x$ $(a = 1$ et $b = 0)$ **(1 pt)**

3. C'est une équation de Riccati, On pose $z = \dfrac{1}{y - y_0} = \dfrac{1}{y-x}$ **(0, 5 pt)**, d'où $y = x + \dfrac{1}{z}$, donc $y' = 1 - \dfrac{z'}{z^2}$. Par suite

$$\begin{aligned} y' + (1-2x)\,y + y^2 &= 1 + x - x^2 \\ &\Longleftrightarrow \left(1 - \frac{z'}{z^2}\right) + (1-2x)\left(x + \frac{1}{z}\right) + \left(x + \frac{1}{z}\right)^2 = 1 + x - x^2 \\ &\Longleftrightarrow -\frac{z'}{z^2} + \frac{1}{z} - 2x\frac{1}{z} + 2x\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0 \\ &\Longleftrightarrow -z' + z + 1 = 0 \ \textbf{(1 pt)} \\ &\Longleftrightarrow z = \lambda e^x - 1 \text{ (d'après la question (1))} \\ &\Longleftrightarrow \frac{1}{y-x} = \lambda e^x - 1 \Longleftrightarrow y = \frac{1}{\lambda e^x - 1} + x \textbf{(0, 5 pt)} \end{aligned}$$

4. la solution de (E) vérifiant $y(0)=0$ est $y(x)=x$. **(0,5 pt)**

Exercice 3 (7,5 pts) 1.

$$\begin{aligned} x\left(1-y^2\right)y'-y\left(1+y^2\right) &= 0 \Longleftrightarrow \frac{\left(1-y^2\right)y'}{y\left(1+y^2\right)}=\frac{1}{x} \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{y}-\frac{2y}{1+y^2}\right)y'=\frac{1}{x} \\ &\Longleftrightarrow \ln\left|\frac{y}{1+y^2}\right| = \ln|x|+c \Longleftrightarrow \frac{y}{1+y^2}=\lambda x \text{(\textbf{1 pt})} \end{aligned}$$

2. On pose $z=\frac{y}{x}$**(0,5 pt)**, alors

$$\begin{aligned} y'=\frac{2xy}{x^2-y^2} &\Longleftrightarrow z+z'x=\frac{2z}{1-z^2}\ \text{(\textbf{0,5 pt})} \\ &\Longleftrightarrow \frac{\left(1-z^2\right)z'}{z\left(1+z^2\right)}=\frac{1}{x} \Longleftrightarrow \frac{z}{1+z^2}=\lambda x,\ \lambda\in\mathbb{R}\ \text{(\textbf{0,5 pt})} \\ &\Longleftrightarrow \frac{y}{x^2+y^2}=\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}\text{(\textbf{0,5 pt})} \end{aligned}$$

3. le facteur intégrant μ dépendant seulement de y, vérifie l'équation suivante

$$\frac{\mu'}{\mu}=\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}=\frac{-2}{y}\text{(\textbf{1 pt})}$$

d'où, il suffit de prendre:

$$\mu(y)=\frac{1}{y^2}\text{(\textbf{1 pt})}$$

4. $y'=\frac{2xy}{x^2-y^2} \Longleftrightarrow \left(y^2-x^2\right)dy+2xydx=0 \Longrightarrow \frac{\left(y^2-x^2\right)}{y^2}dy+\frac{2x}{y}dx=0$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{y} \\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\left(y^2-x^2\right)}{y^2} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u=\frac{x^2}{y}+c(y) \\ -\frac{x^2}{y^2}+c'(y)=\frac{\left(y^2-x^2\right)}{y^2} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u=\frac{x^2}{y}+y+k \\ c(y)=y+k,\ k\in\mathbb{R} \end{array}\right.$$

il suffit de prendre $u(x,y)=\frac{x^2}{y}+y=\frac{x^2+y^2}{y}$. Alors

$$\frac{\left(y^2-x^2\right)}{y^2}dy+\frac{2x}{y}dx=0 \Longleftrightarrow u(x,y)=c \Longleftrightarrow \frac{x^2+y^2}{y}=c,\ c\in\mathbb{R}^* \Longleftrightarrow \frac{y}{x^2+y^2}=\frac{1}{c},\ c\in\mathbb{R}^*$$

Exercice 4 (5 pts) Soit $\begin{array}{rl} f:\mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto x^2+y^2+z^2-2y-2z+1. \end{array}$

1. f est C^∞, $\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1)=5\neq 0\text{(\textbf{0,5 pt})} \\ f(1,1,1)=0\text{(\textbf{0,5 pt})} \end{array}\right.$, alors il existe un voisinage U dans $\mathbb{R}^2$ du point $(1,1)$, et un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant 1, et une fonction $\varphi: U\longrightarrow I$ qui associe à chaque point (y,z) de U, le point $x=\varphi(y,z)$ l'unique solution dans I de l'équation $f(x,y,z)=0$ et vérifiant $\varphi(1,1)=1$.

2.

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial y}(y,z) &= \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(y,z),y,z)}{\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(y,z),y,z)} = \frac{2-2y}{3\varphi^2(y,z)+2\varphi(y,z)};\\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}(1,1) &= 0\underline{(\mathbf{0,5\ pt})}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial z}(y,z) &= \frac{-\frac{\partial f}{\partial z}(\varphi(y,z),y,z)}{\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(y,z),y,z)} = \frac{2-2z}{3\varphi^2(y,z)+2\varphi(y,z)};\\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}(1,1) &= 0\underline{(\mathbf{0,5\ pt})}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(y,z) &= \frac{-2\left(3\varphi^2(y,z)+2\varphi(y,z)\right)-(2-2y)\frac{\partial\varphi}{\partial y}(6\varphi(y,z)+2)}{\left(3\varphi^2(y,z)+2\varphi(y,z)\right)^2};\\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(1,1) &= \frac{-2}{5}\underline{(\mathbf{0,5\ pt})}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}(y,z) &= \frac{-2\left(3\varphi^2(y,z)+2\varphi(y,z)\right)-(2-2z)\frac{\partial\varphi}{\partial z}(6\varphi(y,z)+2)}{\left(3\varphi^2(y,z)+2\varphi(y,z)\right)^2},\\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}(1,1) &= \frac{-2}{5}\underline{(\mathbf{0,5\ pt})}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}(y,z) &= \frac{-(2-2y)\frac{\partial\varphi}{\partial z}(6\varphi(y,z)+2)}{\left(3\varphi^2(y,z)+2\varphi(y,z)\right)^2},\\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}(1,1) &= 0\underline{(\mathbf{0,5\ pt})}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(1+h,1+k) &= \varphi(1,1)+h\frac{\partial\varphi}{\partial y}(1,1)+k\frac{\partial\varphi}{\partial z}(1,1)\\ &\quad+\frac{1}{2!}\left[h^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(1,1)+2hk\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}(1,1)+k^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(1,1)\right]+o\left(\|h,k\|^2\right)\ \underline{(\mathbf{0,5\ pt})}\\ \varphi(1+h,1+k) &= 1-\frac{1}{5}h^2-\frac{1}{5}k^2+o\left(\|h,k\|^2\right)\end{aligned}$$

3. $\varphi(1+h,1+k)-\varphi(1,1) = -\frac{1}{5}(h^2+k^2)+\varepsilon(h,k)\|h,k\|^2 = (h^2+k^2)\left(-\frac{1}{5}+\varepsilon(h,k)\right) < 0$ au voisinage de $(0,0)$. Donc φ admet un maximum locale au point $(1,1)$. $\underline{(\mathbf{1\ pt})}$

ECOLE NA[illegible]ALE PREPARATOIRE AUX ETUDES D'INGENIORAT

Département de Mathématiques

$2^{ième}$ Année Préparatoire | Année: 2003 – 2004

Durée : 2 heures | **Module: Analyse II**

Epreuve de Synthèse

Exercice 1 (5 pts) Soient $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ 1 \leq x^2 + y^2 < 4\}$, Γ son bord, et k une constante réelle. Calculer l'intégrale double $I = \iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy$ en utilisant la formule de Green, pour celà on exprimera l'intégrale I à l'aide d'une intégrale curviligne $\int_\Gamma Pdx + Qdy$ de façon que P ne dépende que de y et Q que de x, et vérifiant

$$P(0,0) = Q(0,0) = 0, \text{ et } \frac{\partial P}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial Q}{\partial x}(0,0) = k.$$

Exercice 2 (5 pts) Soient S la surface définie par :

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ x^2 + y^2 = z^2 \text{ et } 1 \leq z < 2\right\},$$

face positive vers le bas et $W = (y, z, xy)$ un champ de vecteur défini sur $\mathbb{R}^3$. Calculer $\iint_S \left(\overrightarrow{Rot}\vec{W}\right).\vec{n}d\sigma$ en utilisant la formule de Stokes.

Exercice 3 (6 pts) Soit $C = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ \ x^2 + y^2 + z^2 < 1 \text{ et } 0 < y < \frac{1}{2}\right\}$. Calculer de deux manières différentes le volume de C :

1. en utilisant une intégrale triple (**2 pts**)
2. en utilisant la formule d'Ostrogradsky. (**4 pts**)

Exercice 4 (4 pts) Soit ω la forme différentielle

$$\omega = \frac{x-1}{x^2 + y^2 - 2x + 1} dy - \frac{y}{x^2 + y^2 - 2x + 1} dx$$

1. Montrer que ω est fermée sur son domaine de définition. (**1 pt**)
2. Calculer $\int_C \omega$ où C est le cercle de centre $(1, 0)$ et de rayon 1 orienté dans le sens trigonométrique positif. (**1 pt**)
3. En déduire, en utilisant la formule de Green, la valeure de l'intégrale $\int_{C_R} \omega$, où C_R est le carré de sommets $(-R, R)$, $(-R, -R)$, $(R, -R)$, (R, R), $(R > 2)$, orienté dans le sens trigonométrique positif. (**2 pts**)

ECOLE NATIONALE PREPARATOIRE AUX ETUDES D'INGENIORAT

Département de Mathématiques

$2^{ième}$ Année Préparatoire

Durée : 2Heures

Année: 2003 – 2004

Module: Analyse II

Corrigé de la Synthèse

Exercice 1 (5 pts) Soient $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ 1 \leq x^2 + y^2 < 4\}$,

$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ où

$\Gamma_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$ orienté dans le sens trigonométrique négatif,

$\Gamma_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 4\}$ orienté dans le sens trigonométrique positif.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = x^2 + y^2 \underline{\textbf{(0,5 pt)}} \Longleftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - x^2 = \frac{\partial P}{\partial y} + y^2$$

P ne dépend que de y et Q que de x, donc il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que

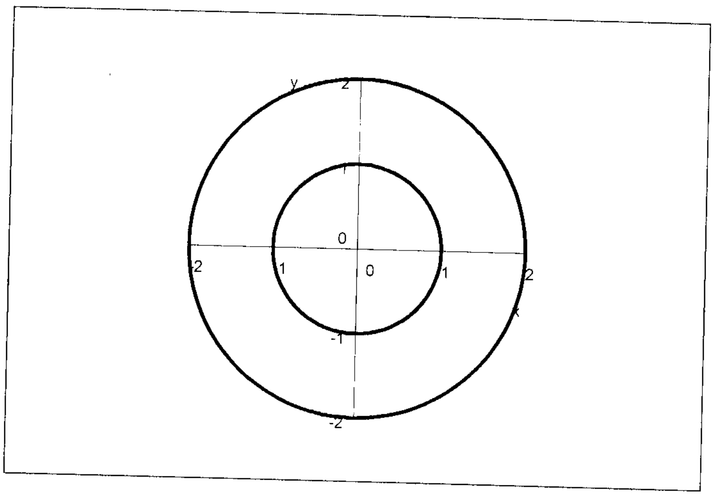
$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} + y^2 = c \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} - x^2 = c \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} P = cy - \frac{1}{3}y^3 + c_1 \\ Q = cx + \frac{1}{3}x^3 + c_2 \end{cases}$$

les conditions $P(0,0) = Q(0,0) = 0$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}(0,0) = \dfrac{\partial Q}{\partial x}(0,0) = k$ donnent

$$c_1 = c_2 = 0 \text{ et } c = k$$

donc

$$P(x,y) = ky - \frac{1}{3}y^3 \text{ et } Q(x,y) = kx + \frac{1}{3}x^3 \underline{\textbf{(1 pt)}}$$



$$\begin{aligned} \varphi_1 :]0, 2\pi[\ &\longrightarrow \Gamma_1 \\ t &\longmapsto (\cos t, \sin t) \end{aligned}$$

est un paramétrage de Γ_1 qui ne conserve pas l'orientation.

$$\begin{aligned}\varphi_2 :]0, 2\pi[&\longrightarrow \Gamma_2 \\ t &\longmapsto (2\cos t, 2\sin t)\end{aligned}$$

est un paramétrage de Γ_2 qui conserve l'orientation.

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \left(ky - \frac{1}{3}y^3\right) dx + \left(kx + \frac{1}{3}x^3\right) dy &= \int_{\Gamma_1} \left(ky - \frac{1}{3}y^3\right) dx + \left(kx + \frac{1}{3}x^3\right) dy \\ &+ \int_{\Gamma_2} \left(ky - \frac{1}{3}y^3\right) dx + \left(kx + \frac{1}{3}x^3\right) dy \underline{(\mathbf{0,5\ pt})}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int_{\Gamma_1} \left(ky - \frac{1}{3}y^3\right) dx + \left(kx + \frac{1}{3}x^3\right) dy \\ = &-\int_0^{2\pi} \left[\left(k\sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t\right)(-\sin t) + \left(k\cos t + \frac{1}{3}\cos^3 t\right)(\cos t)\right] dt \\ = &-\int_0^{2\pi} \left[k\left(\cos^2 t - \sin^2 t\right) + \frac{1}{3}\left(\sin^4 t + \cos^4 t\right)\right] dt \\ = &-\int_0^{2\pi} k(\cos 2t)\, dt + \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{3}\left(\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2\right)\right] dt \\ = &-\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1+\cos 4t}{4}\right) dt = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)(2\pi) = -\frac{\pi}{2}\underline{(\mathbf{1,5\ pt})} \\ &\text{si } \int_{\Gamma_2} = \frac{\pi}{2} : (0,5\text{pt})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int_{\Gamma_2} \left(ky - \frac{1}{3}y^3\right) dx + \left(kx + \frac{1}{3}x^3\right) dy \\ = &\int_0^{2\pi} \left[\left(2k\sin t - \frac{8}{3}\sin^3 t\right)(-2\sin t) + \left(k2\cos t + \frac{8}{3}\cos^3 t\right)(2\cos t)\right] dt \\ = &\int_0^{2\pi} \left[4k\left(\cos^2 t - \sin^2 t\right) + \frac{16}{3}\left(\sin^4 t + \cos^4 t\right)\right] dt \\ = &\int_0^{2\pi} 4k(\cos 2t)\, dt + \int_0^{2\pi} \left[\frac{16}{3}\left(\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2\right)\right] dt \\ = &\frac{16}{3}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1+\cos 4t}{4}\right) dt = \frac{16}{3}\left(\frac{3}{4}\right)(2\pi) = 8\pi\underline{(\mathbf{1,5\ pt})} \\ &\text{si } \int_{\Gamma_2} = -8\pi : (0,5\text{pt})\end{aligned}$$

$$\iint_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy = 8\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{15\pi}{2}$$

Exercice 2 (5 pts) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = z^2 \text{ et } 1 \leq z < 2\}$

$$\iint_S \left(\overrightarrow{Rot}\vec{W}\right).\vec{n}d\sigma = \int_{\partial S} ydx + zdy + xydz\underline{(\mathbf{0.5\ pt})}$$

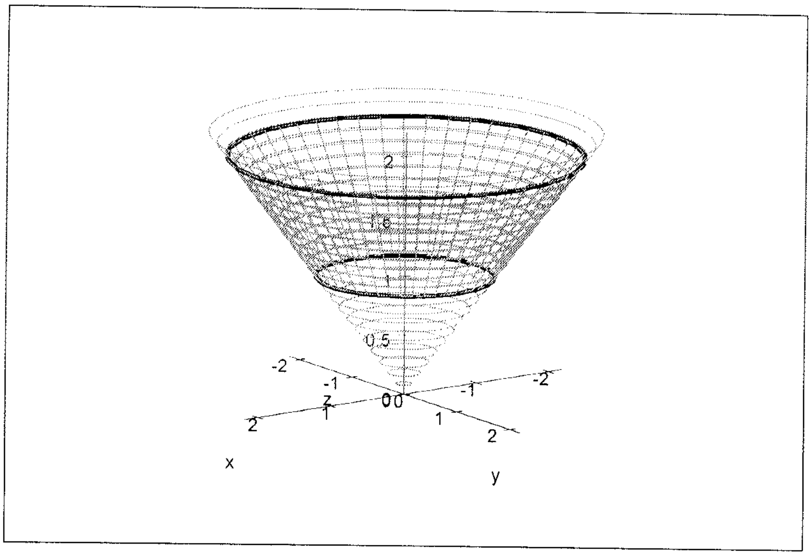


Figure 1:

Soit $\partial S = C_1 \cup C_2$, où:

$C_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 /\ \ x^2+y^2=1 \text{ et } z=1\}$

$C_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 /\ \ x^2+y^2=4 \text{ et } z=2\}$

orientées par le vecteur normal sortant de S.

Pour C_1 : On pose $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 1$, $0 < t < 2\pi$ $\underline{\textbf{(0.5 pt)}}$. l'orientation est conservée$\underline{\textbf{(1 pt)}}$

Pour C_2 : *On* pose $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = 2$, $0 < t < 2\pi$ $\underline{\textbf{(0.5 pt)}}$. l'orientation n'est pas conservée$\underline{\textbf{(1 pt)}}$

$$\begin{aligned}
\int_{\partial S} ydx + zdy + xydz &= \int_{C_1} ydx + zdy + xydz + \int_{C_2} ydx + zdy + xydz\underline{\textbf{(0.5 pt)}} \\
&= +\int_0^{2\pi} (\sin t)(-\sin t) + (1)(\cos t)\, dt \\
&\quad - \int_0^{2\pi} (2\sin t)(-2\sin t) + (2)(2\cos t)\, dt\underline{\textbf{(0.5 pt)}} \\
&= -\pi + 4\pi = 3\pi\underline{\textbf{(0.5 pt)}}
\end{aligned}$$

Exercice 3 (6 pts) Soit $C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 /\ \ x^2+y^2+z^2 < 1 \text{ et } 0 < y < \frac{1}{2}\right\}$.

1.

$$V(C) = \iiint_C dxdydz$$

On pose $x = r\cos t$, $z = r\sin t$, $y = y$, $0 < t < 2\pi$, $0 < r < \sqrt{1-y^2}$, $0 < y < \frac{1}{2}$$\underline{\textbf{(1 pt)}}$

$$V(C) = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{2\pi} r\,dt\,dr\,dy = \frac{11\pi}{24}\underline{\textbf{(1 pt)}}$$

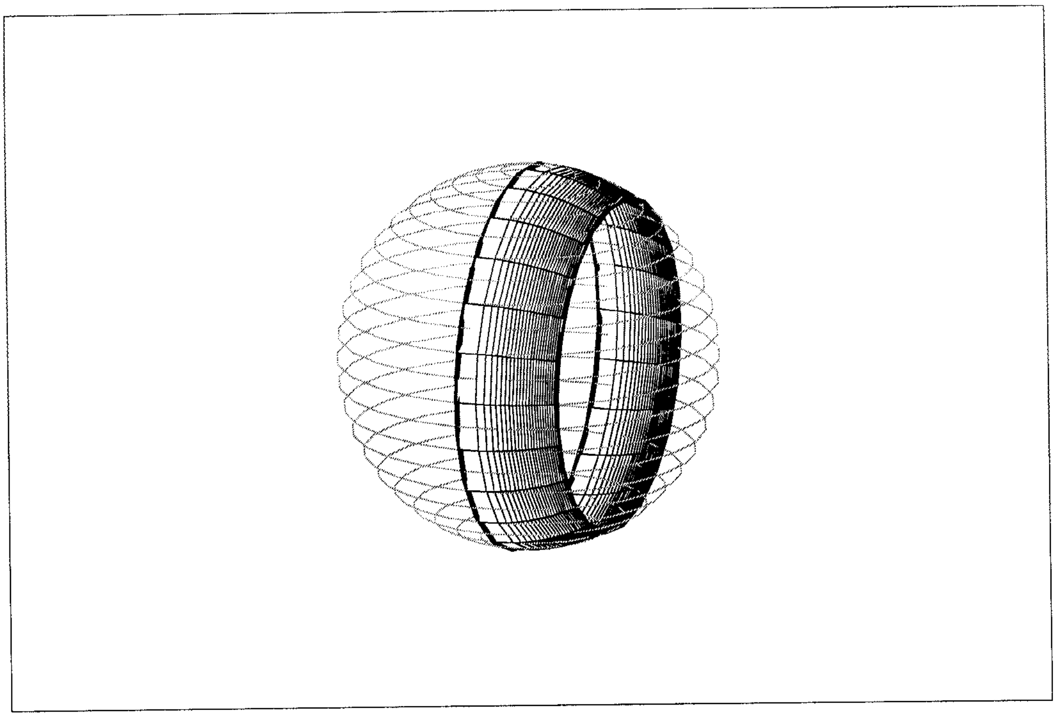


Figure 2:

2. en utilisant la formule d'Ostrogradsky:

$$V(C) = \iint\limits_{\partial C} x dy dz \underline{(\mathbf{0.5\ pt})}$$

$\partial C = S \cup d_1 \cup d_2$, où

$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ et } 0 < y < \frac{1}{2} \right\}$

$d_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + z^2 = 1 \text{ et } y = 0\}$

$d_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + z^2 = \frac{3}{4} \text{ et } y = \frac{1}{2} \right\}$

orientées par le vecteur normal sortant de C.

$$\iint\limits_{d_1} x dy dz = \iint\limits_{d_2} x dy dz = 0 \underline{(\mathbf{1\ pt})}$$

Pour S, l'application

$$\begin{array}{rcl} \varphi : [0, 2\pi] \times \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right] & \longrightarrow & S \\ (t, r) & \longmapsto & \left(r \cos t, \sqrt{1 - r^2}, r \sin t\right) \end{array} \quad \underline{(\mathbf{0.5\ pt})}$$

est un paramétrage de S.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \left(\frac{r^2 \cos t}{\sqrt{-r^2 + 1}} \quad r \quad \frac{r^2 \sin t}{\sqrt{-r^2 + 1}} \right) \underline{(\mathbf{0.5\ pt})}$$

φ conserve l'orientation de S.(**0.5 pt**)

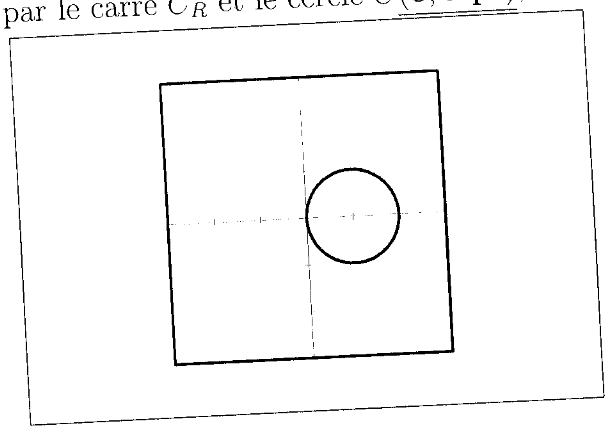
$$\iint_S xdydz = \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}(r\cos t)\frac{r^2\cos t}{\sqrt{1-r^2}}drdt = \pi\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} r\frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}}dr$$
$$= \pi\int_{\frac{1}{2}}^{0}\left(u^2-1\right)du = \frac{11\pi}{4}\left(u=\sqrt{1-r^2}\right)\ (\mathbf{1\ pt})$$

Exercice 4 (4 pts) $\omega = \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}dy - \frac{y}{(x-1)^2+y^2}dx$

1. On pose $P = -\dfrac{y}{(x-1)^2+y^2}$, et $Q = \dfrac{x-1}{(x-1)^2+y^2}$.
   ω est définie sur $\mathbb{R}^2 - \{(1,0)\}$
   $$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{y^2-(x-1)^2}{\left((x-1)^2+y^2\right)^2} = \frac{\partial Q}{\partial y}(\mathbf{1\ pt})$$
   donc ω et fermée

2. $$\begin{aligned}\varphi : [0,\pi] &\longrightarrow C\\ t &\longmapsto (1+\cos t, \sin t)\end{aligned}$$
   est un paramétrage de C qui conserve l'orientation.
   $$\int_C \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}dy - \frac{y}{(x-1)^2+y^2}dx = \int_0^{2\pi}\left[(\cos t)(\cos t) - (\sin t)(-\sin t)\right]dt = 2\pi(\mathbf{1\ pt})$$

3. Soit C_R le carré de sommets $(-R,R)$, $(-R,-R)$, $(R,-R)$, (R,R), où $R>2$
   Soit D le domaine limité par le carré C_R et le cercle C(**0, 5 pt**), alors:



$$\int_{C_R} Pdx + Qdy - \int_C Pdx + Qdy = \iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = 0(\mathbf{1\ pt})$$

où C_R et C sont orientées dans le sens trigonométrique positif. Donc

$$\int_{C_R}\frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}dy - \frac{y}{(x-1)^2+y^2}dx = 2\pi(\mathbf{0,5\ pt})$$

ECOLE NATIONALE PREPARATOIRE AUX ETUDES D'INGENIORAT
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET D'INFORMATIQUE

$2^{ème}$ année préparatoire **Année scolaire 2003/2004**

Module : ANALYSE II **Date : 04/09/2004** **Durée: 2 heures**

Epreuve de RATTRAPAGE

Exercice 1 (4 pts) :

La relation

$$y^2-2xy=a^2$$

définit y en fonction implicite de x , ou x en fonction implicite de y . Calculer $\frac{d^2y}{dx^2}$ et $\frac{d^2x}{dy^2}$

Exercice 2 (4 pts):

On scie un bâton de longueur L en trois morceaux de longueurs x, y , z . Trouver ces trois dernières longueurs qui rendraient extrémale (maximum) la quantité xy^2z^3.

Exercice 3 (4 pts) :

Après intégration de l'équation différentielle

$$y''+y=\cos 3x+3\cos x$$

résoudre le problème de CAUCHY correspondant .

Exercice 4 (4 pts) :

Calculer l'intégrale triple

$$I=\iiint_{\mathcal{D}} z^{x^2+y^2}\,dxdydz$$

avec

$$\mathcal{D}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / \ x^2+y^2\leqslant 16\ ,\ 0\leqslant z\leqslant 1\right\}$$

Exercice 5 (4 pts) :

a) Quelles conditions doivent vérifier les fonctions A et B pour que l'intégrale curviligne

$$\int_\Gamma P(x,y)\,dx+Q(x,y)dy$$

Soit nulle pour toute courbe fermée Γ sil l'on a

$$P(x,y)=\left(xA(x)+B(x)\right)y^2+3x^2y \qquad Q(x,y)=yA(x)+B(x)$$

b) Si A est un polynôme et que B(0)=0 donner l'expression explicite de cette intégrale curviligne .

ECOLE NATIONALE PREPARATOIRE AUX ETUDES D'INGENIORAT
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET D'INFORMATIQUE

2ème Année Préparatoire — Année 2003 / 2004

CORRIGE " EPREUVE DE RATTRAPAGE D'ANALYSE II "

Exercice 1 :

La différentiation de $y^2-2xy=a^2$ donne

$$2y\,dx+(2y-2x)\,dy=0 \quad ------(*) \qquad (0,5)$$

D'où il vient $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{y-x}$ (avec $y-x\neq 0$) (0,5)

* Pour $y=f(x)$, différentions $(*)$

$$(-2dy)\,dx+(-2dx+2dy)\,dy+(2y-2x)\,d^2y=0$$

Divisons ce résultat par dx^2 :

$$-4\frac{dy}{dx}+2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(2y-2x)\frac{d^2y}{dx^2}=0 \qquad (0,5)$$

d'où il vient

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2\frac{dy}{dx}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{y-x}=\frac{2\frac{y}{y-x}-\frac{y^2}{(y-x)^2}}{y-x}$$

soit

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y^2-2xy}{(y-x)^3}=\frac{a^2}{(y-x)^3} \qquad (0,5)$$

* Différentions $(*)$ avec $x=g(y)$

$$(-2dy)\,dx-2y\,d^2x+(-2dx+2dy)\,dy=0 \qquad (0,5)$$

Divisons par dy^2 :

$$-4\frac{dx}{dy}-2y\frac{d^2x}{dy^2}+2=0 \Longrightarrow \frac{d^2x}{dy^2}=\frac{1-2\frac{dx}{dy}}{y} \qquad (0,5)$$

Comme $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{y-x}{y} \Rightarrow \dfrac{d^2x}{dy^2}=\dfrac{1-2\frac{y-x}{y}}{y}=\dfrac{-y+2x}{y^2}=\dfrac{-a^2}{y^3}$ (0,5) (0,5)

(ici $y\neq 0$)

Exercice 2 :

Soit à maximiser $f(x,y,z)=xy^2z^3$ (1) avec comme contrainte $x+y+z=L$. Pour $\lambda\in\mathbb{R}$ posons comme fonction complémentaire de Lagrange la fonction suivante :

$$F(x,y,z)=xy^2z^3+\lambda(x+y+z-L) \qquad (1)$$

On aura donc : $F_x=y^2z^3+\lambda=0$, $F_y=2xyz^3+\lambda=0$, $F_z=3xy^2z^2+\lambda=0$ (1)

Ces trois équations et $x+y+z=L$ forment un système à quatre équations à quatre inconnues. La résolution donne :

$x=\dfrac{L}{6}$, $y=2x=\dfrac{L}{3}$, $z=3x=\dfrac{L}{2}$.

On aura dans ce cas $f_{max}=xy^2z^3=\dfrac{L^6}{432}$ (1)

Exercice 3 :

Equation caractéristique $k^2+1=0$. Cette équation conduit à la solution générale de l'équation différentielle sans second membre sous la forme :
$y_h = A\cos x + B\sin x$

On a après cela respectivement :

* Pour le cas de $\cos 3x$:

Comme $\cos 3x$ n'est pas solution de l'équation homogène, on cherchera y_1 (solution particulière) sous la forme :

$$y_1 = a\cos 3x + b\sin 3x \Rightarrow \begin{cases} y_1' = -3a\sin 3x + 3b\cos 3x \\ y_1'' = -9a\cos 3x - 9b\sin 3x \end{cases}$$ (0,5)

On doit donc avoir :

$(-9a\cos 3x - 9b\sin 3x) + a\cos 3x + b\sin 3x = \cos 3x$

soit

$$-8a\cos 3x - 8b\sin 3x = \cos 3x$$

d'où on tire : $b = 0$ et $a = -\frac{1}{8}$ (0,5) + (0,5)

* Pour le cas de $3\cos x$:

Puisque $\cos x$ est solution de $y_h'' + y_h = 0$, on cherchera donc une solution particulière sous la forme : $y_2 = x(\alpha\cos x + \beta\sin x)$.

Il vient alors : $-2\alpha\sin x + 2\beta\cos x = 3\cos x$

ce qui donne $\alpha = 0$, $\beta = \frac{3}{2}$ (1)

D'où la solution de l'équation différentielle de départ :

$$y = A\cos x + B\sin x - \frac{1}{8}\cos 3x + \frac{3}{2}x\sin x$$ (0,5)

* Résolution du problème de Cauchy : $\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{cases}$

On aura : $y_0 = A\cos x_0 + B\sin x_0 - \frac{1}{8}\cos 3x_0 + \frac{3}{2}x_0\sin x_0$ (0,5)

$y_0' = -A\sin x_0 + B\cos x_0 + \frac{3}{8}\sin 3x_0 + \frac{3}{2}\sin x_0 + \frac{3}{2}x_0\cos x_0$

Soit à résoudre : $A\cos x_0 + B\sin x_0 = y_0 + \frac{1}{8}\cos 3x_0 - \frac{3}{2}x_0\sin x_0$

$-A\sin x_0 + B\cos x_0 = y_0' - \frac{3}{8}\sin 3x_0 - \frac{3}{2}(\sin x_0 + x_0\cos x_0)$

Ce système de deux équations à deux inconnues (A, B) admet une solution unique car le déterminant de ce système est :

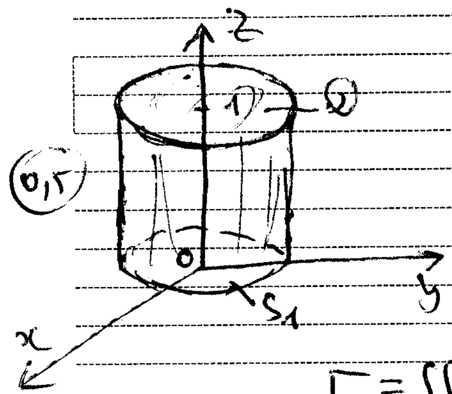
$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x_0 & \sin x_0 \\ -\sin x_0 & \cos x_0 \end{vmatrix} = 1 \quad (\neq 0)$$ (0,5)

et ce pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Cette solution du problème de Cauchy est définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 :

Le domaine D est représenté à la figure suivante.



(0,5)

Désignons par S_1 le disque circulaire, projection orthogonale de D sur le plan Oxy. On aura :

$$I=\iiint_D z^{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz = \iint_{S_1}\left[\int_0^1 z^{x^2+y^2}\,dz\right]dx\,dy \quad (1)$$

$$I=\iint_{S_1} \frac{z^{x^2+y^2+1}}{x^2+y^2+1}\Big|_0^1 dx\,dy = \iint_{S_1}\frac{dx\,dy}{x^2+y^2+1} \quad (0,5)$$

On effectue le changement de variable

$$\left.\begin{array}{l} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{array}\right\} \text{ avec } \{r\leq 4\ ,\ 0\leq\theta\leq 2\pi\} \quad (1)$$

Ce qui permet d'écrire

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^4 \frac{r\,dr\,d\theta}{r^2+1} = \pi\ln(16+1)=\pi\ln 17$$

(0,5) (0,5)

Exercice 5 :

(0,5)

On écrit $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ d'où il vient : $y\alpha'+\beta'=2y(x\alpha+\beta)+3x^2$ (1)

Cette relation doit être vérifiée pour x et y arbitraires, ce qui exige :

$$\beta'=3x^2 \quad \text{et} \quad \alpha'=2x\alpha+2\beta \quad (0,5)$$

On en déduit $\beta=x^3$, en utilisant la condition $\beta(0)=0$.
Par suite α vérifie l'équation

$$\alpha'=2x\alpha+2x^3 \Rightarrow \alpha=-x^2-1 \quad (1,5)$$

Donc on aura :

$$I=\int P\,dx+Q\,dy=\int(3x^2y-xy^2)\,dx+(x^2-yx^2-y)\,dy$$

$$I=x^3y-\frac{x^2y^2}{2}-\frac{y^2}{2} \quad (0,5)$$

ECOLE NATIONALE PREPARATOIRE AUX ETUDES D'INGENIORAT

Département de Mathématiques

$2^{ième}$ Année Préparatoire

Année: 2004 – 2005

Durée : 2H 00

Module: Analyse II

Partiel I

Exercice 1 (3 pts)

Déterminer $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} A_n$ avec

$$A_n = \frac{1}{n}\left[(n+1)(n+2)\cdots(n+n)\right]^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\left(\prod_{k=1}^{n}(n+k)\right)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 2 (6 pts)

Calculer l'intégrale

$$\int \frac{\ln\left(x^2+4x+5\right)}{(1+x)^2}dx$$

Exercice 3 (2 pts)

Donner le développement limité, à l'ordre 4, au voisinage de *zéro* de

$$f(x) = \ln\left(\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}\right)$$

Indication: On utilisera le développement suivant:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

Exercice 4 (3 pts)

Dessiner le domaine de définition de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \arccos\left(\frac{x+y+1}{x+1}\right).$$

Exercice 5 (6 pts)

Pour l'intégrale

$$I_\alpha = \int_0^1 x^{\alpha-1}\left(\sqrt[4]{\frac{x}{1-x}}\right)dx$$

1. Etudier la nature de cette intégrale suivant les valeurs du paramètre réel α.

2. Calculer I_0.

3. Donner une relation entre I_n et I_{n-1}, pour $n \in \mathbb{N}^*$, et en **<u>déduire</u>** la valeur de I_2.

ECOLE NATIONALE PREPARATOIRE AUX ETUDES D'INGENIORAT

$2^{ième}$ Année Préparatoire | Année: 2004 – 2005

Durée : 2H 00 | **Module: Analyse II**

Partiel II

Important: Ne pas rédiger plus d'un exercice sur une même double feuille
La copie d'examen doit comporter impérativement 4 doubles feuilles.

Exercice 1 (5 pts) Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \ln(x^2+y^2) + x - y & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pour tout (x,y) dans $\mathbb{R}^2$.(**2 pts**)

2. la fonction f est-elle continuement différentiable au point $(0,0)$?(**2 pts**)

3. Calculer $df_{(0,0)}(5,3)$.(**1 pt**)

Exercice 2 (5 pts) Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x^2-y^2|}{\sqrt[4]{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Etudier la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 (5 pts) Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = e^{x-y} - 1 - x - y$.

1. Montrer que l'équation $f(x,y) = 0$ définit implicitement au voisinage du point $(0,0)$ y comme fonction de x. (**1,5 pts**)

2. Calculer alors $y'(0)$ et $y''(0)$.(**2 pts**)

3. En déduire $\lim\limits_{x \to 0} \frac{y}{x^2}$.(**1,5 pts**)

Exercice 4 (5 pts) Soient $E = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / \ u > v\}$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y^2 - 4x > 0\}$ et g l'application bijective de E dans D définie par $g(u,v) = (uv, u+v)$. Soit f une fonction de D dans $\mathbb{R}$, deux fois différentiable.

1. Transformer l'expression

$$\Phi(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

en posant $x = uv$ et $y = u + v$ et sachant que f est indépendante de la variable v.(**4 pts**)

2. En déduire toutes les fonctions f de classe C^2 indépendantes de v.(**1 pt**)

ECOLE NATIONALE PREPARATOIRE AUX ETUDES D'INGENIORAT
DEPARTEMENT MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

2ème Année Préparatoire **Année universitaire : 2004/2005**

PARTIEL III

Module : Analyse II **Semestre : IV** **Date : 13/04/2005** **Durée : 2h00**

	Exercice 1	Exercice 2	Exercice 3	Exercice 4	OBSERVATIONS
BAREME	3	5	6	6	

Exercice 1 :

Déterminer la plus grande et la plus petite valeur de la cote z du plan

$$\mathbf{z=6-4x-3y}$$

pour l'ensemble des points d'intersection de ce plan avec le cylindre $\mathbf{x^2+y^2=1}$.

Exercice 2 :

1) Résoudre l'équation différentielle suivante

(E1) : $\mathbf{z''(t)-2z'(t)+z(t)=2\sin t+e^t}$

(on donnera une solution particulière pour chacun des seconds membres $2\sin t$ et e^t)

2) En utilisant le changement de variable $t=\tan x$, résoudre

(E2) : $\mathbf{y''(x)\cos^4 x-2y'(x)\cos^2 x[1+\sin x \cos x]+y(x)=3\sin(\tan x)}$

Exercice 3 :

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction numérique . On considère l'équation différentielle

(E3) : $$xyf(xy)+\frac{x^2}{2}(1+f(xy))y'(x)=0$$

Soient $M(x,y)=xyf(xy)$ **et** $N(x,y)=\frac{x^2}{2}(1+f(xy))$

1) Calculer $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$ et $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$

2) En utilisant la variable $t=xy$, déterminer f pour que (E3) soit une équation aux différentielles totales .

3) Résoudre alors cette dernière équation aux différentielles totales (obtenue au point 2) .

Exercice 4 :

Résoudre le système différentiel linéaire suivant : $\mathbf{X'(t)=AX(t)}$

où

$$A=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -2\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix} \quad , \quad X(t)=\begin{vmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{vmatrix}$$

ECOLE NATIONALE PREPARATOIRE AUX ETUDES D'INGENIORAT
DEPARTEMENT MATHEMATIQUES - INFORMATIQUE

Corrigé PARTIEL III - ANALYSE II

Exercice 01 = $f(x,y) = 6-4x-3y$. La contrainte étant $g(x,y)=x^2+y^2-1=0$

condition necessaire $\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ 0,5

1 $\begin{cases} 8y-6x=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{3}{4}x \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4/5, 3/5), \ \lambda=-5/2 \\ (-4/5, -3/5, \ \lambda = 5/2 \end{cases}$

$f(4/4, 3/5)=1$ et $f(-\frac{4}{5}, \frac{-3}{5}) = 11$ 0,5

f présente un minimum absolu lié en $(4/5, 3/5)$ et un maximum absolu lié en $(-4/5, -3/5)$.

Vérifions ce résultat au point $(\frac{4}{5}, 3/5)$

soit $h=x-4/5$ et $k=y-3/5$ d'où il vient :

$f(x,y)=1-4h-3k$; $g(x,y)=0=h^2+k^2+\frac{8}{5}h+\frac{6}{5}k$ soit 0,5

$4h+3k=-\frac{5}{2}(h^2+k^2) \Longrightarrow f(x,y)=1+\frac{5}{2}(h^2+k^2) \geqslant 1 = f(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$

Etude en $(-4/5, \frac{-3}{5})$: $f(x,y)=11-4h-3k$ ou $h=x+4/5$ et $k=y+\frac{3}{5}$

$g(x,y)=0=h^2+k^2-\frac{8}{5}h-\frac{6}{5}k \Rightarrow 4h+3k=\frac{5}{2}(h^2+k^2)$ 0,5

qui donne $f(x,y)=11-\frac{5}{2}(h^2+k^2) \leqslant 11 = f(\frac{-4}{5}, \frac{-3}{5})$.

Exercice 2 = 1) Equation homogène : $r^2-2r+1=(r-1)^2=0 \Rightarrow$ 0,5

0,5 $z_h(t) = (C_1t+C_2)e^t$

- Solution particulière pour 2 sin t : $z_{p_1}(t) = a\cos t + b \sin t \Rightarrow \begin{cases} -2b=0 \\ 2a=2 \end{cases} \Rightarrow (a,b)=(1,0)$

0,5 et $z_{p_1}(t)=\cos t$.

- Solution particulière pour e^t : $z_{p_2}(t)=at^2e^t \Rightarrow a=\frac{1}{2}$ et $z_{p_2}(t)=\frac{t^2}{2}e^t$

0,5 Enfin ! $z(t)=(C_1t+C_2)e^t+\cos t+\frac{t^2}{2}e^t$ est la solution générale de (E_1).

2) $t=\tan x \Rightarrow y(x)=z(t) \Rightarrow y'_x(x)=z'_t(1+t^2)$ et $y''_x(x)=(1+t^2)\frac{d}{dt}[(1+t^2)z'_t]$ 0,5

1 $=(1+t^2)z''_t+2t(1+t^2)z'_t(t)$

(E_2) devient :

$[(1+t^2)^2z''_t+2t(1+t^2)z'_t]\frac{1}{(1+t^2)^2} - 2(1+t^2)z'_t\left[\frac{1+t+t^2}{(1+t^2)^2}\right]+z=3\sin t$

(Ici on a utilisé $\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1}{1+\tan^2 x}\right)^2 = \left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2$

et $\cos^2 x(1+\sin x\cos x) = \cos^4 x\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\tan x\right) = \frac{1}{(1+t^2)^2}(1+t^2+t)$.

0,5 On a alors $z''_t+\frac{2t}{1+t^2}z'_t-2z'_t-\frac{2t}{1+t^2}z'+z=3\sin t$ soit $z''-2z'+z=3\sin t$

0,5 dont la solution générale est $z(t)=(C_1t+C_2)e^t+\frac{3}{2}\cos t$ en vertu de l'étape une.

0,5 Finalement $y(x)=(C_1\tan x+C_2)e^{\tan x}+\frac{3}{2}\cos(\tan x)$.

ENPEI-Rouiba - Département Mathématiques - Informatique.
Corrigé Partiel III - ANALYSE II.

Exercice 03 : 1) $\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y}(x,y) = x f(xy) + x^2 y f'(xy) & (1) \\ \dfrac{\partial N}{\partial x}(x,y) = x(1+f(xy)) + \dfrac{x^2 y}{2} f'(xy) & (1) \end{cases}$

2) $\dfrac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial N}{\partial x}(x,y) \iff x f(xy) + x^2 y f'(xy) = x(1+f(xy)) + \dfrac{x^2y}{2} f'(xy)$

$\iff \dfrac{x^2y}{2} f'(xy) = x \iff f'(xy) = \dfrac{2}{xy} \iff f'(t) = \dfrac{2}{t}$

D'où $f(t) = 2\ln|t| + C$ soit $f(xy) = \ln(xy)^2$ pour $c = 0$ (1,5)

3) L'équation obtenue est donc : $2xy\ln|xy| + \dfrac{x^2}{2}(1+2\ln|xy|)\, y'(x) = 0$

ou bien $xy\ln(xy)^2 + \dfrac{x^2}{2}(1+\ln(xy)^2)\, y'(x) = 0$ $(xy \neq 0)$.

Cherchons $u(x,y)$ telle que $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = xy\ln(xy)^2 & (1) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{x^2}{2}(1+\ln(xy)^2) & (2) \end{cases}$ (0,5)

Intégrons la 2ème relation : $u(x,y) = \dfrac{x^2}{2}y + (y\ln|xy| - y)x^2 + \varphi(x)$

$= -\dfrac{x^2y}{2} + x^2y\ln|xy| + \varphi(x)$. (1)

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = -xy + 2xy\ln|xy| + \dfrac{x^2y^2}{xy} + \varphi'(x) = 2xy\ln|xy| + \varphi'(x) = 2xy\ln|xy|$

on prend $\varphi(x) = 0 \Rightarrow u(x,y) = -\dfrac{x^2y}{2} + x^2y\ln|xy|$ (0,5)

$y(x)$ vérifie alors $-\dfrac{x^2y(x)}{2}\left(1 - \ln(xy(x))^2\right) = C$ (0,5)

Exercice 04 : 1) Valeurs propres $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 3 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 + 4\right] = 0$

d'où $\lambda = 1$, $\lambda_2 = 1-2i$ et $\lambda_3 = 1+2i$ (0,5) (0,5) (0,5) (0,5)

Vecteurs propres :

* $\lambda_1 = 1 \Rightarrow (A-I)V_1 = 0 \iff \begin{cases} 0 = 0 \\ 2v_1 - 2v_3 = 0 \\ 3v_1 + 2v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = v_3 \\ v_2 = -\frac{3}{2}v_1 \end{cases}$ on prend $V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ (0,5)

et $x_1(t) = e^t V_1$. (0,5)

* $\lambda_2 = 1-2i \Rightarrow (A-\lambda_2 I)V_2 = 0 \iff \begin{cases} 2iv_1 = 0 \\ 2v_1 + 2iv_2 - 2v_3 = 0 \\ 3v_1 + 2v_2 + 2iv_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_3 = iv_2 \\ v_3 = iv_2 \end{cases}$

$V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$. La solution complexe est $z(t) = e^{(1-2i)t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$. (0,5) (0,5)

dont la partie réelle est $X_2(t) = e^t\begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix}$ et la partie imaginaire est $X_3(t) = e^t\begin{pmatrix} 0 \\ -\sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix}$. (0,5) (0,5)

La solution générale du système est

$$X(t) = C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t) + C_3 X_3(t).$$ (0,5)

avec $X_1(t) = e^t V_1$, $X_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix}$ $X_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix}$ (0,5)

ECOLE NATIONALE PREPARATOIRE AUX ETUDES D'INGENIORAT

$2^{\text{ième}}$ AP
Durée : 2H 00

Juin 2005
Module: Analyse II

Epreuve De Synthèse

Exercice 1 (2 pts) Donner la nature de l'intégrale impropre suivante

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}} dx$$

Exercice 2 (3 pts) Calculer le développement limité généralisé au voisinage de 0 à l'ordre 2 de la fonction $x \longmapsto \dfrac{e^x}{\ln(1-x)}$.

Exercice 3 (4 pts) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation différentielle suivante

$$\left(1-x^2\right) y' - xy - xy^2 = 0$$

Exercice 4 (4 pts) Soit $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 0 < z < 1 \text{ et } x^2 + y^2 - 2y < 0\right\}$. Calculer l'intégrale triple suivante:

$$\iiint_{\Omega} \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2}\, dxdydz$$

Exercice 5 (7 pts) Soient V le champ de vecteur défini sur $\mathbb{R}^3$ par

$$V = \begin{pmatrix} 2ye^{x^2+y^2} \\ -2xe^{x^2+y^2} \\ y^2 - x \end{pmatrix},$$

$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = z \text{ et } 1 \leq z \leq 4\right\}$, A, B des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et C une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, telles que $A(0) = C(0,0) = 0$

1. Déterminer les fonctions A, B, C telles que le champ de vecteur $W = \begin{pmatrix} xA(y) \\ xB(y) \\ C(x,y) \end{pmatrix}$ défini sur $\mathbb{R}^3$, vérifie $RotW = V$. **(2 pt)**
2. Calculer en utilisant et seulement en utilisant la formule de **Stokes** l'intégrale
$$\iint_S V.nd\sigma$$
sachant que S est orientée vers le bas. **(3, 5 pts)**
3. Soit $\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 5x^2 + 5y^2 = z^2 + 4 \text{ et } 1 < z < 4\right\}$. En déduire, de la question précédente, la valeur de l'intégrale de surface suivante:
$$\iint_{\Sigma} V.nd\sigma$$
sachant que Σ est orientée vers le bas. **(1, 5 pt)**

ECOLE NATIONALE PREPARATOIRE AUX ETUDES D'INGENIORAT

Module: Analyse II **Année: 2005 – 2006** **Durée: 2 heures**

PARTIEL II

Exercice 1 (4 pts) Soit $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ |x| + |y| \leq 1 \text{ et } x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}$, D un domaine de $\mathbb{R}^3$, et φ l'application de Ω vers D qui à (x,y,z) associe $(u,v,z) = (x+y, y-x, z)$

1. Déterminer le domaine D de $\mathbb{R}^3$ pour que l'application φ soit bijective **(0, 5 pt)**

2. Calculer le jacobien de l'application φ. **(0, 5 pt)**

3. Calculer le volume **V** de Ω en utilisant le changement de variable $(u,v,z) = \varphi(x,y,z)$ **(3 pts)**

Exercice 2 (4 pts) Soient Γ le chemin ouvert $ABCDEFGH$, où $A\left(1,\frac{1}{2}\right)$, $B\left(\frac{1}{2},1\right)$, $C\left(-\frac{1}{2},1\right)$, $D\left(-1,\frac{1}{2}\right)$, $E\left(-1,-\frac{1}{3}\right)$, $F\left(-\frac{1}{3},-1\right)$, $G\left(\frac{1}{3},-1\right)$, $H\left(1,-\frac{1}{3}\right)$ et f l'application de : $\mathbb{R}^2 - \{(1,0)\}$ vers $\mathbb{R}^2$, définie par $f(x,y) = \left(\frac{2(1-x)}{\left((x-1)^2+y^2\right)^2}, \frac{-2y}{\left((x-1)^2+y^2\right)^2}\right)$

1. Montrer que f dérive d'un potentiel dans $\mathbb{R}^2 - \{(1,0)\}$. **(2 pts)**

2. Calculer $I = \int_\Gamma \frac{2(1-x)}{\left((x-1)^2+y^2\right)^2} dx - \frac{2y}{\left((x-1)^2+y^2\right)^2} dy$ **(2 pts)**

Exercice 3 (8 pts) Soient $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 = z \text{ et } z \leq 4\}$, face positive vers le bas, et $W(x,y,z) = (y, xz, 0)$, et $V = (x,y,z)$ deux champs de vecteurs définis sur $\mathbb{R}^3$.

1. Donner un paramétrage de S **(1 pt)**

2. Le paramétrage choisi conserve-t-il l'orientation de S? **(2 pts)**

3. Transformer l'intégrale de surface $I = \iint_S \vec{V}.\vec{n}d\sigma$ en une intégrale double **(1 pt)**

4. Calculer I**(1 pt)**

5. Soit Γ le bord de S. Donner un paramétrage de Γ**(1 pt)**

6. à l'aide de la formule de Stokes, transformer $J = \displaystyle\iint_S \left(\overrightarrow{Rot}\vec{W}\right).\vec{n}d\sigma$ en une intégrale curviligne **(1 pt)**

7. Calculer J en utilisant la formule de Stokes **(1 pts)**

Exercice 4 (4 pts) Quelle est la nature des deux séries suivantes? justifiez votre réponse

1. $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos n}{n^2-n+1}$**(2 pts)**

2. $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$**(2 pts)**

ECOLE NATIONALE PREPARATOIRE AUX ETUDES D'INGENIORAT

Module: Analyse II **Année: 2005 – 2006** **Durée: 2 heures**

PARTIEL 3

Exercice 1 (6 pts) Soit f une fonction 2π-pèriodique définie sur $]-\pi, \pi]$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1 - \dfrac{x}{\pi} & \text{si } x \in]-\pi, 0] \\ 1 - \dfrac{x}{\pi} & \text{si } x \in]0, \pi] \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle paire ou impaire? **(1 pt)**
2. Tracer le graphe de la fonction f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$. **(1 pt)**
3. Développer la fonction f en série de Fourier. **(2 pts)**
4. Calculer la somme de la série de Fourier pour tout x dans $]-\pi, \pi]$. **(1 pt)**
5. En déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$. **(1 pt)**

Exercice 2 (5 pts) Soit la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(2x)^n}{(n+1)(n+3)}$.

1. Calculer le rayon de convergence R. **(1 pt)**
2. Déterminer le domaine de convergence simple et uniforme. **(1 pt)**
3. En déduire la somme $S(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(2x)^n}{(n+1)(n+3)}$ pour $x \in]-R, R[$.
   (décomposer la fraction $\dfrac{1}{(n+1)(n+3)}$ en éléments simples). **(2 pts)**
4. En déduire $S\left(\frac{1}{2}\right)$. **(1 pts)**

Exercice 3 (4 pts) On considère la suite de fonctions f_n définies dans l'intervalle $[1, e]$ par:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^{\alpha} \frac{1}{x} (\ln x)^n & \text{si } x \in [1, e[\\ 0 & \text{si } x = e \end{cases}$$

où α est un paramètre réel.

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction f dans l'intervalle $[1, e]$. **(1 pt)**
2. Calculer $I_n = \displaystyle\int_1^e f_n(x)\,dx$ **(1 pt)**
3. Calculer $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} I_n$ en fonction de α **(1 pt)**
4. En déduire des valeurs de α pour lesquelles la convergence n'est pas uniforme sur $[1, e]$. **(1 pt)**

Exercice 4 (5 pts) Décomposer en séries entières les fonctions suivantes

$$g(x) = \arctan\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right), \quad h(x) = \cos^3 x$$

ECOLE NATIONALE PREPARATOIRE AUX ETUDES D'INGENIORAT

Chaire de Mathématiques
Module: Analyse II

2ième Année Préparatoire
Année: 2005 – 2006

SYNTHESE

Exercice 1 (5 pts) Soit f une fonction 2π-périodique définie sur $[0, 2\pi[$ par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, \pi] \\ 0 & \text{si } x \in]\pi, 2\pi[\end{cases}$$

1. Tracer le graphe de la fonction f sur l'intervalle $[0, 4\pi]$. **(0,5 pt)**

2. La fonction f est-elle paire ou impaire? **(0,5 pt)**

3. Développer la fonction f en série de Fourier. **(2,5 pts)**

4. Calculer la somme de la série de Fourier pour $x = \pi$**(0,5 pt)**

5. En déduire $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$ **(1 pt)**

....
....
....
....
....
....
....

Exercice 2 (3 pts) On considère l'équation différentielle

$$y'' + 3y' + 2y = e^{-t},$$

où y est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, +\infty[$, vérifiant: $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$

1. donner l'expression de $\mathcal{L}(y')$ et $\mathcal{L}(y'')$ en fonction de $\mathcal{L}(y)$**(1 pt)**

....
....
....
....

2. Déterminer $\mathcal{L}(y)$: **(1 pt)**

....
....
....
....
....
....
....
....

3. En déduire y.**(1 pt)**

....
....
....
....
....
....

Exercice 3 (12 pts) Le but de ce problème est de calculer $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sinh x} dx$.

On considère la fonction $f(z) = \frac{z}{\sinh z}$.

1. Déterminer la nature des singularités de la fonction f.**(1,5 pt)**

....
....
....
....
....
....
....

2. Calculer le résidu de f en chacune de ses singularités **(1,5 pt)**

....

....

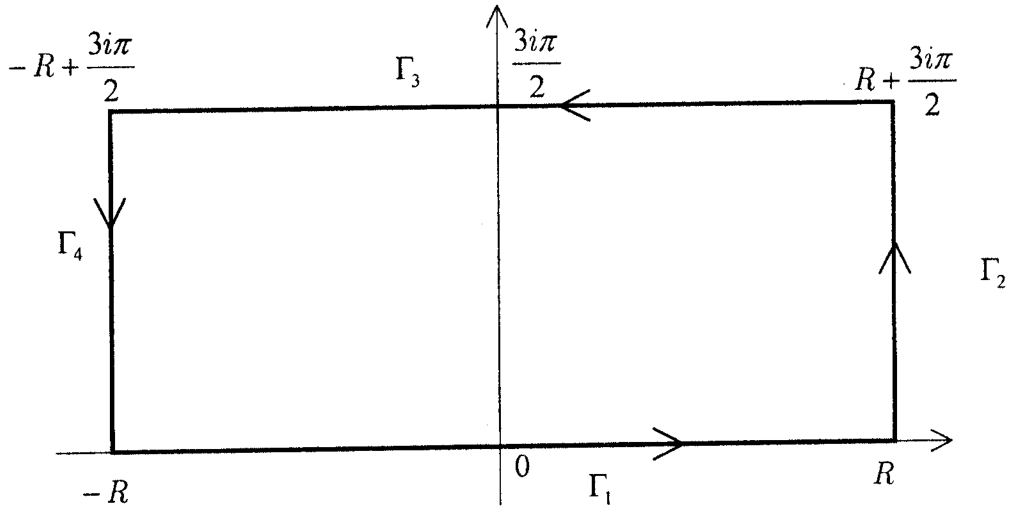
....

....

....

....

3. On considère le rectangle Γ de sommets $-R$, $+R$, $R+\dfrac{i3\pi}{2}$ et $-R+\dfrac{i3\pi}{2}$ $(R\in\mathbb{R}_+^*)$, de cotés $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ et Γ_4 et orienté dans le sens trigonométrique positif



Calculer $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz$ **(1 pt)**

....

....

4. Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{\cosh t}$ **(1 pt)**

....

....

....

....

....

....

....

5. En déduire $\displaystyle\lim_{R\longrightarrow+\infty}\int_{\Gamma_3} f(z)\,dz$.**(1, 5)**

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

6. Montrer que $\overline{\int_{\Gamma_2} f(z)\, dz} = \int_{\Gamma_4} f(z)\, dz$ **(1,5 pt)**

7. Montrer que $|\sinh(R+iy)|^2 = \sinh^2 R + \sin^2 y$ **(1 pt)**

8. En déduire $\lim_{R \longrightarrow +\infty} \int_{\Gamma_2} f(z)\, dz$ **(1,5 pts)**

9. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sinh x} dx$ **(1,5 pts)**