USTHB Faculté de mathématique **03/01/2012**

Epreuve Finale Proba/Stat 2Lic ST Coordination

Problème (13 points)

On fait passer un test dont les scores possibles sont 0,10, 20, 30, 40 et 50. à une population de 200 enfants âgés de 8 à 12 ans. Voici le tableau de contingence :

Y score / X âge	0	10	20	30	40	50
[8 - 9 [	12	6	3		3	
[9 -10[		15	21	32	12	
[10-11[		5	9	18	25	
[11-12]				4	14	21

Partie I

1. Quel est le nombre d'enfants âgés de moins de 10 ans et qui ont un score de 20 ?
2. Parmi les enfants ayant une note de 20, quel est le pourcentage d'enfants âgés entre 10 et 11 ans ?
3. Parmi les enfants âgés entre 11 et 12 ans, quel est le pourcentage d'enfants ayant comme note 40 ?

Partie II Etude de la série Score

1. Donner la distribution marginale de cette série.
2. Donner le(s) mode(s), et donner sa (leur) signification.
3. Quel est le score médian ?
4. Calculer la moyenne et la variance.

Partie III Etude de la série Age

1. Donner la distribution marginale ainsi que la représentation graphique de cette série.
2. Représenter le mode graphiquement.
3. Calculer le premier quartile. Donner sa signification.
4. Calculer la moyenne et la variance en utilisant un changement de variable.

Partie IV Etude de la série double

1. Calculer le coefficient de corrélation des variables X et Y. Que peut-on en dire ?
2. Calculer la droite de régression de Y en X en déduire le score d'un enfant de 14 ans.

Exercice 1 (4 points)

Dans une école, on propose deux activités sportives différentes (athlétisme et gymnastique). Le pourcentage d'élèves qui choisissent l'athlétisme est 55%, celui de ceux qui choisissent gymnastique est de 40% et de ceux qui choisissent les deux activités, est de 25%.

1. Calculer la probabilité de choisir au moins une activité.
2. Calculer la probabilité de ne choisir aucune activité.
3. Calculer la probabilité de choisir une et une seule activité.
4. Si l'élève a choisi l'athlétisme, quelle est la probabilité de choisir gymnastique.

Exercice 2 (3 points)

Un grand magasin est équipé d'un système d'alerte contre l'incendie. L'installateur du système assure qu'en cas d'incendie, il y a 99% de chance que l'alerte soit donnée. Il dit aussi qu'il y a 5% de chance que ce soit une fausse alerte. La compagnie d'assurance du magasin estime qu'il y a 1% de chance qu'un incendie se déclare.

1. Ecrire les évènements qui interviennent et donner leurs probabilités.
2. Calculer la probabilité que le système d'alerte se déclenche.
3. Si le système se déclenche, quelle est la probabilité que ce soit une fausse alerte ?

Corrigé

Problème 13 pts

Partie I (1,5)

0,5 1. $N_1 = n_{13} + n_{23} = 3 + 21 = 24$

0,5 2- $f_{x \in [10,11[/ y = 20} = \dfrac{9}{3+21+9} = 0,2727 = 27,27\%$

0,5 2- $f_{y=40 / x \in [11,12[} = \dfrac{14}{4+14+21} = 0,35897 = 35,90\%$

Partie II (4)

y_j	$n_{.j}$	$\tilde{n}_{.j}$	$n_{.j}y_j$	$n_{.j}y_j^2$
0	12	12	0	0
10	26	38	260	2600
20	33	71	660	13200
30	54	125	1620	48600
40	54	179	2160	86400
50	21	200	1050	52500
	200		5750	203300

-1°/ La distribution marginale de Y est donnée par le tableau

0,5 $(y_j, n_{.j})_j$ où $n_{.j} = \sum_i n_{ij}$

-2°/ $n_{.j} \max = 54 < \begin{matrix} n_{o_1} = 30 \\ n_{o_2} = 40 \end{matrix}$ 0,5

La série est bimodale.

Le plus grand nombre des enfants a un score de 30 ou 40 0,5

-3°/ $n = 200 \Rightarrow \dfrac{n}{2} = 100 \Rightarrow Med = \dfrac{y_{100} + y_{101}}{2} = \dfrac{30+30}{2} = 30$ 0,5

-4°/ $\bar{y} = \dfrac{1}{n} \sum_j n_{.j} y_j = \dfrac{5750}{200} = 28,75$ 1

$\sigma_y^2 = \dfrac{1}{n} \sum_j n_{.j} y_j^2 - \bar{y}^2 = \dfrac{203300}{200} - (28,75)^2 = 189,94$ 1

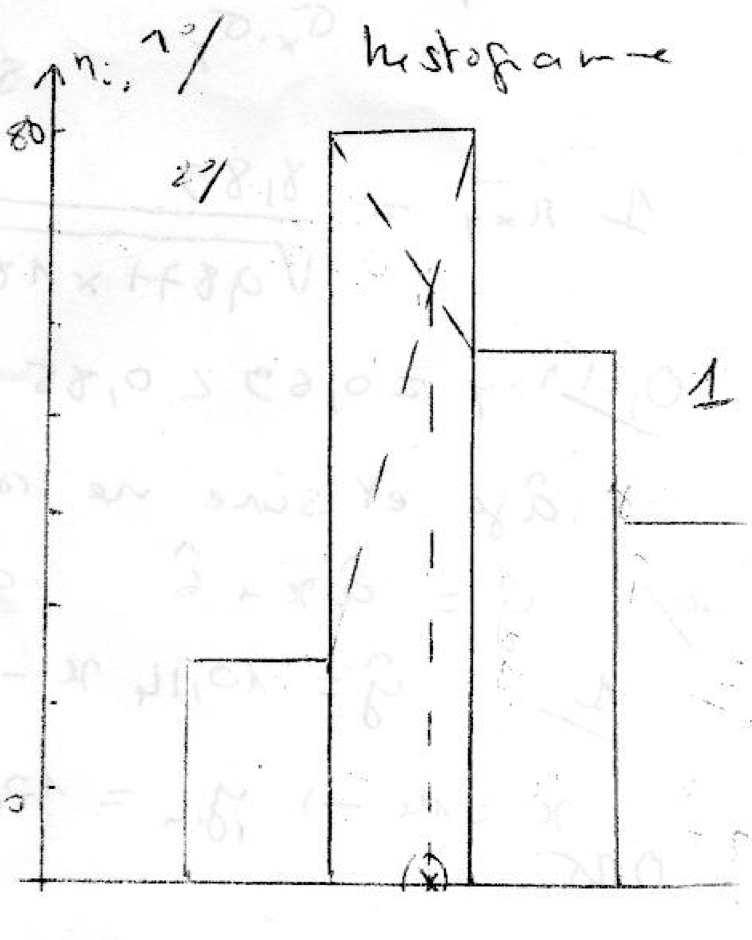
Partie III (5)

classe	$n_{i.}$	$\tilde{n}_{i.}$	x_i	x'_i	$n_{i.}x'_i$	$n_{i.}x_i'^2$
[8, 9[	24	24	8,5	-1	-24	24
[9, 10[	80	104	9,5	0	0	0
[10, 11[	57	161	10,5	1	57	57
[11, 12[	39	200	11,5	2	78	156
Σ	200				111	237

0,5 La distribution marginale de X est donnée par le tableau (classe de X, $n_{i.}$)$_i$ avec $n_{i.} = \sum_j n_{ij}$

1°/ histogramme

2°/



1

3°/ $Q_1 = ?$ $\quad n = 200 \Rightarrow \frac{n}{4} = 50 \Rightarrow Q_1 \in [a, b[= [9, 10[$

$$Q_1 = a + (b-a)\frac{\frac{n}{4} - \tilde{n}_{i-1}}{n_i} = 9 + (10-9)\frac{50-24}{80} = 9{,}325$$

1 Le quart des enfants a âgé de moins de 9,325 ans.

4°/ soit $X = aX' + b \Rightarrow \bar{x} = a\bar{x}' + b$ et $\sigma_x^2 = a^2\sigma_{x'}^2$

0,5 $x' = \frac{x-b}{a}$ $\quad a =$ amplitude $= 1$, b milieu de la classe modale $b = 9{,}5$

1 $\bar{x}' = \frac{1}{n}\sum_i n_{i.}x'_i = \frac{111}{200} = 0{,}555 \Rightarrow \bar{x} = 10{,}055$

1 $\sigma^2_{x'} = \frac{1}{n}\sum_i n_{i.}x'^2_i - \bar{x}'^2 = \frac{237}{200} - (0{,}555)^2 = 0{,}877 \Rightarrow \sigma^2_x = 0{,}877$

Partie IV 2,5

X \ Y		0	10	20	30	40	50	$n_{i.}$	$\sum_j n_{ij}y_j$	$x_i\sum_j n_{ij}y_j$
[8, 9[	8,5	12	6	3		3		24	240	2040
[9,10[	9,5		15	21	32	12		80	2010	19095
[10,11[	10,5		5	9	18	25		57	1770	18585
[11,12[	11,5				04	14	21	39	1730	19875
$n_{.j}$		12	26	33	54	54	21	200		59595

1°/ $r_{xy} = \frac{S_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$ $\qquad S_{xy} = \frac{1}{n}\sum_i\sum_j n_{ij} - \bar{x}\bar{y}$

$$S_{xy} = \frac{59595}{200} - (10{,}055)(28{,}75) = 8{,}89$$

1 $r_{xy} = \frac{8{,}89}{\sqrt{0{,}877 \times 189{,}94}} = 0{,}69 = r_{xy}$.

0,25 $r_{xy} = 0{,}69 < 0{,}85$ (ou $r^2_{xy} = 0{,}47 < \frac{3}{4}$) $\Rightarrow$ les variables âge et score ne sont pas fortement corrélés.

2°/ $\hat{y} = \hat{a}x + \hat{b}$ $\qquad \hat{a} = \frac{S_{xy}}{\sigma^2_x} = 10{,}14$, $\hat{b} = \bar{y} - \hat{a}\bar{x} = -73{,}20$

1 $\hat{y} = 10{,}14x - 73{,}20$.

0,25 $x = 14 \rightarrow y_{14} = 10{,}14 \times 14 - 73{,}20 = 68{,}76$.

exerci 1. (4)

A : " choisir l'athlétisme $\quad P(A)=0{,}55 \quad P(A\cap G)=0{,}25$

G : " " la gymnastique $\quad P(G)=0{,}4$

1 1°/ $P(A\cup G)=P(A)+P(G)-P(A\cap G)=0{,}7$

1 2°/ $P(\bar A\cap\bar G)=P(\overline{A\cup G})=1-P(A\cup G)=0{,}3$

1 3°/ $P((A\cap\bar G)\cup(\bar A\cap G))=P(A\cap\bar G)+P(\bar A\cap G)$

$=(P(A)-P(A\cap G))+(P(G)-P(A\cap G))$

$=P(A)+P(G)-2P(A\cap G)=0{,}45$

1 4°/ $P(G/A)=\dfrac{P(A\cap G)}{P(A)}=0{,}4545$.

ex 2 (3)

1°/ A : " l'alerte est donnée

I : " l'incendie se déclare

1 $\quad P(A/\bar I)=0{,}05 \quad P(I)=0{,}01$.

$P(A/I)=0{,}99$

2°/ $P(A)=P(A/I)\cdot P(I)+P(A/\bar I)\cdot P(\bar I)=0{,}0594=5{,}94\%$

1 avec $P(\bar I)=1-P(I)=0{,}99$

3°/ $P(\bar I/A)=\dfrac{P(A\cap\bar I)}{P(A)}=\dfrac{P(A/\bar I)\cdot P(\bar I)}{P(A)}=\dfrac{5}{6}=83{,}33\%$

1

(3)